明治初期算術教科書の自然数指導

―― 塚本明毅『筆算訓蒙』を中心にして ――

須　田　勝　彦
(北海道大学教育学部)

は　じ　め　に

数学はその発生以来，その学問の最も基礎的概念・法則を未知の人間にあまねく伝える方法を内部に形成していた。数を，誰もが所有する指や手足など，体の部分に対応させて表すという優れた工夫がその一例である。諸量の計量の方法を，具体的・特殊的な問題の中に一般性を内包させるという仕方で示すことも，古代エジプトの時期に用いられ，現在も広く使われている。この方法は数学に特殊的なものではなく，人間の認識能力そのものの特色だろう。古代ギリシアにおいて確立した論証という方法も，その典型的な一例である。現代の数学も例外ではない。集合と写像という，人間の最も素朴な行為を起源とする概念を用いてその理論を展開するという方法が採られる。数学の学問的進展とともにその方法もまた，人間の認識にとってなにが自然であるかが工夫され続けている。

一方，近代教育の進歩による数学的概念の教授法における進歩もまた著しい。子どもの思考の論理については知見が経験的に蓄積されている。子どもの興味を喚起し，子どもの自発性，活動性に依拠する授業方法の開発が続けられている。教科書を例にとっても，明治期のものと今日とを比較すれば，その進歩の大なることは何人も疑いえない。

しかし，数学における研究の進展は著しく，またそれに伴う専門分化の進行も急速である。それに比べて特に初等数学教育の内容は大きな変化があるわけではなく，当然のことながら昔も今も，その中心に有理数とその四則計算が位置している。これは，数学の側から見た学問としての数学と，その教育の乖離の拡大にほかならない。一方では，教授法の研究もまた進歩の速度はめまぐるしい。教育哲学と一体となった心理学がその指針であった時代（ヘルバルトやペスタロッチの時期）を出発点に，今日の認知心理学的アプローチに至るまで，多くの方法の開拓が試みられ，教育方法学は独自の学問的方法を確立しつつあるかのようにも見える。しかし，教育内容とは独立の教育方法が存在するかのような立場を採るかぎり，このこともまた教育学の側からの学問と教育の乖離の促進要因にさえなっているのである。

戦後新教育は，多くの誤りや偏向を含んでいたにしても本質的には，学問と子どもの底の深い結合，あるいは子どもの社会生活の確立という文脈における，教育的諸活動のインテグレーションの契機としての数学的認識の形成が実現される可能性を有していたのであり，先に見た乖離の克服への一つの試みであった。しかし，主として外的要因で開始まもなく中断された。

60年代に国際的に展開された数学教育の現代化も同様，教育内容の再構成という視点でその乖離を埋める試みではあったが，いくつかの「偏向」（偏向というより，教授法の未確立というべきだろう）を理由に，その開始まもなく中断された。教育の世界における新しい試みは，少なくとも50年のオーダーでその成果が検証されうるものとすれば，戦後新教育も現代化も，そ

の検証を受けることなく中断されてしまったのである。

こうした中で日本の数学教育はあわただしい変遷をとげてきた。そこに確認されうる進歩は少なくないが，一つの直線上を歩んできた進歩というよりは，あわただしく進む中で陥りがちな偏向に対する「古い」立場からの軌道修正であったり，あるいは忘れられていた過去の教育実践上の遺産への回帰であったり，という側面の方が強かったのではないか。そしてそのような進歩の一つ一つは過去の遺産と正確に照合されることは少なく，いつでも「最新の動向」であるかのように語られることが多かったのではないか。

今日の日本の数学教育は，国際的にもある水準を保っているといわれる。それは事実だろう。しかし，何よりも重要な「子どもたちは数学を楽しんでいるのか」という問いには極めて不満足な答えしか得られないことを始めとして，問題も山積している。日本の数学教育が一定の水準にあることも，またそれが基盤において崩れ去る可能性を内包していることも，同一の根源，即ち数学が受験競争の鍵となる教科となっているという事実に根ざしていることは多くの人の承認するところだろう。しかし今日，遅まきながらも学歴社会は多方面から見直されて来ており，また多くの若者も受験競争に「成功」する以外の方法で自らの人生の構築に成功している。受験競争における「成功」が数学学習の決定的動機づけにはならなくなってきているのである。これは数学本来の姿からすると，むしろ望ましいことである。数学は人類の生活から生まれ，人類の生活を豊かにする過程で発展し，万人に共有しうるための方法を開拓し，そのことによって計りしれないほどの知的喜びを創造してきたのであって，個人生活のささやかな安定を目的とするものではないし，ましてやその技の巧みさで人間の価値を決める指標となるものでもないのである。

現状では，日本の若者の数学ぎらいや数学離れは一層進み，数学の学力水準の低下が進むだろう。予想される国際比較から見た日本の学力到達水準の低下それ自体は，それほど重要な問題だとは思われない。国際的水準の向上の結果と見れば，むしろ良いことでさえあろう。しかし，このことは数学や教育学の進歩によるものとはまた別の，事実としての学問と教育の乖離にほかならない。人類の共有財産であり，すべての人がそれを楽しむことができ，そのことによって人類の将来生活をさらに豊かにする数学という学問を，人から疎遠にし，またいわれない嫌悪の対象としておいてよいのか，という素朴な教育学的問題に立ち返ることが今日求められているのである。このような問題意識から，これまでの日本における数学教育の進歩に貢献した無限に多くの試みの中から，価値あるものを見いだすという課題が浮かび上がる。価値あるものとは，今日の数学教育の改善の指針となりうるものという意味と，過去の歴史的文脈において進歩をもたらし得たものという意味の二通りが考えられる。この二つは明確に区別できるものではない。もとより，直接に今日の数学教育に活用できそうな知見を探すことはほとんど無意味であり，過去の進歩をもたらしえた事実とその条件こそが問題なのである。そのような考察が，今日の数学教育研究と実践になんらかの方向性を示唆するものとなるであろう。

1．問題の設定と方法

小論では，数学と学問の乖離が今ほど進んでいなかった時期，数学教育の先達がいかなる教育内容を構想していたのかという問題の一端を明らかにすることを目的とする。日本において数学教育が組織的に開始されたのは「学制」(1872 年) に始まる。「学制」の理念及びそれに基づくカリキュラムの全体的特色は既に板倉聖宣 (1968 年) が示すところである。「『学制』と『小

学教則』こそは，日本の教育史の中で，最も多く科学に期待をかけ，科学を中心にしてあらゆる教科を排列したきわめて野心的な試みであった。そして日本の『小学教則』こそは，おそらくその時代における世界で最も多く科学に期待をかけた教則であった。」[1] 算術においても洋法算術を用いるという選択自体，野心的な試みだった。松原元一（1982 年）の指摘するように「国内の実状からいえば洋算すなわち筆算に通じた人はほとんどいないということができるほど少なかった。まず，これを指導できる教師はいなかったといっても過言ではなかったのである」[2] という状況においてである。その教育内容及び教授法は当然，全く未開拓であったのはいうまでもない。しかし，ここで注目したいのはこの時期こそ，数学と教育の乖離が最も少なかったということである。先進的洋学者たちはいちはやく我がものとした西洋数学を多くの日本人に伝えるべく，教科書を著した。ディビス（Davis）をはじめ，外国教科書の翻訳も進められ，それが教科書となったが，今日的意味での翻訳書ではなく，日本の洋学者による日本の学習者のための再構成がなされている。そしてそれらの教科書が「小学教則」のカリキュラムに指定されるなど，初等算術教育におけるその後の発展のいしずえが築かれるのである。

小論では「小学教則」の指定する教科書のひとつ（下等小学第 8 級）であるとともに，その内容においてこのような明治初期算術教科書の代表[3] ともいえる塚本明毅『筆算訓蒙』（1869 年，明治 2 年）巻一（数目，加減乗除），に焦点をあて，それを同時代のいくつかの初等教育算術教科書と比較しながら，その教育内容構成上の特色を示すことを課題としたい。[4] ここで明治初期教科書というのは，さしあたり 1872 年（明治 5 年）の「学制」から 1881 年（明治 14 年）の「小学校教則綱領」までの時期に用いられたもの，としておく。教科書の進歩の歴史を記述するための時期区分の問題は後の課題として残したい。なお，この時期の教科書はほぼ教師用書と考えてよく，学年的な進行・配列は教科書には表れていないと考えられる。それだけ，著者の数学観または数学論を直接的に読み取ることが可能であろう。

初等算術教育における教育内容構成上の特色を明確にするために，ここでは(1)数学（算術）教育の目的は何か，(2)自然数とは何か，0 とは何か，また量との関係如何，(3)四則演算の意味づけ，演算諸法則，及び計算のアルゴリズムの指導過程の構成の方法，という 3 つの相互に密接に関連しあった問題群を設定する。これらは現在の日本の初等数学教育の研究においても，まさに中心問題であるばかりでなく，数学教育研究があるかぎり，常に立ち返るべき問題群であるからである。

使用した資料は主として『日本教科書大系』近代編第 10 巻，算数(1)，1962 年，講談社に拠る。これに収められていない教科書の多くは，東書文庫図書室所蔵のものを用いた。なお，小論における明治初期教科書からの引用は通常はページ数を示すが，東書文庫図書室所蔵教科書についてはいずれもそれほど厚くはない和装本なのでページ数は割愛する。また，とりあげた教科書はすべて縦書き（一部横書きまじりを含む）であるが，横書きに直したことのほか，原則として現代の字体・記法に直した。

注

(1) 板倉聖宣『日本理科教育史（付・年表）』1968 年，第一法規出版，73 ページ

(2) 松原元一『日本数学教育史 I 算数編 1』1982 年，風間書房，70 ページ

(3) 小倉金之助は『数学教育史』（原著 1932 年）で，本書について次のように述べている。「この書は算術を，系統的に，しかも近代的なる教科書の形式において提供した，恐らく日本最初の著述であろう。」「…いずれにしても，『筆算訓蒙』は数学教育上の傑作であった。人もし明治維新を記念すべき名教科書を求めるなら，私は先

ず第一にこの書を推したいと思う。」小倉金之助著作集第6巻，1974年，勁草書房，223〜224ページ

(4) 著者塚本明毅（1833年〜1885年）の略歴，学問歴などについては松原元一，前掲書(2)参照。

2．数学教育の目的論について

(1) 本章の目的

一般に「教育の目的」が直接に論じられる時，多くは実態とは対応しない美辞麗句が並べられるだけのことが多い。しかし，他教科においても同様だろうが，数学教育におけるその目的に関する論議は，カリキュラム構成，教育内容構成の基本方向を定める重要な位置を持ち続けてきた。とりわけ算術を中等教育受験のための難問解法術から解放し「サイエンス」としてその内容構築を試みた寺尾寿，そして徹底した寺尾批判を展開し，日本の初等数学教育の進路を定めた藤沢利喜太郎などの貢献は大きい。寺尾と藤沢が正面から取り組んだ目的論の確定とそれに基づくカリキュラム構成の基本原則の解明のしごとは，今日においても引き続き数学教育の根本問題の解明の出発点であり続けている。[1]

「学制」の時期には，数学教育の目的論は本格的な検討課題にはなっていない。洋法算術の教科書名さえ「算術」だけでなく「洋算」「筆算」をはじめ「算学」「数学」など多様なことばが用いられている。（佐藤英二は「『算術』と『数学』は，江戸時代には『算学』『算法』などの言葉とともに特に区別なく用いられた言葉であったが，明治に入り両者がそれぞれ〝Arithemetic〟と〝Mathematics〟の訳語と見なされる事によって，今では異なる意味を持つ言葉となった。東京数学会社訳語会の〝Arithmetic〟の訳語をめぐる論議（1880〜82）は『算術』と『数学』の意味の違いを生み出し固定化した重要な論議である。」と指摘している。[2]）「学制」の理念はそれ自体鮮明なものであり，こと改めて算術の目的を論ずることもなかったのかも知れない。数学において「洋法算術」を選択したこと自体が目的論における大きな飛躍だったのである。

しかし「学制」の基本理念たる「学問」を万人のものにという思想と「実学」という思想は，数学教育においては必ずしも調和的な関係にあるわけではない。そればかりか，それが本来的な対立でありうるか否かは別として，いつでも数学教育における論争的なテーマとさえなってきているのである。まだ「学問」と「実用」またはより広く「生活」が対立として明確に意識されていない時点において，塚本明毅をはじめとする教科書の著者たちはいかなる「学問」を通して，いかなる「生活」に資するものを創り出そうとしたのかを本章で検討する。

(2) 「諸学」との関連における算術

塚本の教科書においても，特に数学教育の目的が明示されている訳ではない。次章以下に見るように，目的は内容構成上の特色の中に具体的かつ内包的に示されていると見るべきだろう。ただしその「凡例」の中の次の項目は注目に値する。「凡そ設題の多くは，我国の度量衡を主として，万国歴史地理並びに天文，究理（物理の意－須田）等，諸学に関渉せるものを載す。これ幼学の者をして，傍らこれを諳熟せしめて，前途の裨益たらしめん事を欲するなり。」[3]

算術教科書を「諸学」との関わりで構成するという考えは当時にあって新鮮であったばかりでなく，今日においてもなお教科書改善の重要な指針たりえよう。この視点は四則算法の指導後の「設題」（いわゆる「応用問題」）[4] の工夫に著しい。例えば加法，減法には次のような問題が見られる。

「西洋人其の輿地里法にて，日本国を算するに，畿内，中国，二道及び東北三道ともに四千二

百七十八方里なり，南海四国は三百二十八方里，西海九州は八百十二方里，蝦夷及び其諸島は一千六百三十九方里なりという。然る時は全国方里，幾何なるや。」[5]

日本の国土の面積を正確に知るという意識がほとんど為政者とその周辺にしかなかったであろうこの時期には，このような問題は新鮮に受け止められたことが想像できる。同様に地球上の5大州（アジア，ヨーロッパ，アフリカ，アメリカ，オーストラリア）の面積の総計，人口の総計を求める問題などの地理的な問題が配せられている。また，今日的な意味では「諸学」とはいえないが，フランス陸軍の歩兵，騎兵，砲兵などの人数の合計，ヨーロッパ諸国の海軍の艦船数を求める問題などもこの時代，多くの人の興味を引く問題であったろう。歴史的な分野では例えば桓武天皇が都を平安に定めてから現在までどれだけの年数が経っているか，などの問題とともに西ローマ帝国の滅亡からコロンブスのアメリカ検出まで何年か,とかワシントン，ナポレオン，マゼランなど豊富な話題と登場人物で構成されている。

博物学，天文，究理などの研究成果も四則計算の練習に豊富に用いられている。「泰西の格物家リンナオなる者，世界中動物の種類を計るに，哺乳類二百三十種，飛禽類九百四十六種，水陸に棲むもの二百九十二種，魚介類四百〇四種，無血虫三千〇六十種，昆虫類一千二百〇五種ありという。因って動物の総数を問う。」[5]

乗法の問題には次のようなものがある。「凡そ物の響きは一秒間に一百八十七間に達す。今敵営の砲煙を見て，八秒の後其の音を聞く時は，其の距離幾何なるや。」[6]「地球の周囲は輿地里にて五千四百里なり。地球自転する毎に，其の光輝これに先立て走る事，一秒時中に凡そ八倍なりという。然る時は光力の速なる事，一秒時中に幾万里なるや。」[6] 音の速さ，光の速さなどは常識的直観を越えている。どのように人知はそれを知り得たのかという疑問も含めて，自然に対する新たな目を開くことができよう。「無病の人の脈は，一分時中に七十六度あり。此人一昼夜一千四百四十分時中の脈度，幾何なるや」[6] というのもある。除法には次のような問題が見られる。「地球赤道周囲は，輿地里法にて五千四百里なり。今快駆の蒸気船あり。一日七十二里駆る時は，幾日にて地球を一周すべきや。」[7]「およそ光力の速なる事，一秒時中に，輿地里にて四万二千里走れりという。今地球と太陽の距離二千〇七十〇万六千里なり。其の光力幾何秒にて我地球に至るや。」[8] 分数，比例などに進んでも，諸学と結びついた興味深い問題がさまざまに工夫されているのはこの書の大きな特色である。

この特色は同時期の多くの算術教科書に引き継がれている。後に算術と生活との距離を埋める試みが進む中で，事実問題の構成は様々な工夫がなされるが，この時期の教科書ほど，スケールが大きく，あるいは広範囲にわたる，興味ある問題に満たされていたものはなかったように思われる。

(3) 中条澄清の算術教科書に見られる目的論

理論算術が盛んであった1889年，中条澄清は次のような一文を『数理会堂』に載せている。「小学算術の教授は，宜しく従来の器械的教授を廃し，理論に基づきて教授すべきとの説に就きては，今や復た一人の反対を唱うるものなく，殆ど今日の輿論とも云うべき有様とはなりぬ。我輩は今を隔たること17年以前より，算術の教授は問題の解答のみに止む可からず，宜しく先に原理を詳説して然る後応用を授くべしと主張しつつあるものなり。」[9]「17年以前」にどのような主張が中条によってなされたのかは不明であるが，少し後，彼の1876年の著作『算学教授書』には理論，原理をキーワードとする教授思想が明瞭に表れている。（ただし，東書文庫には巻之

一，九，十，があるだけで，より立ち入った検討ができないのは残念である。）最初に「算学」が定義されている。[10] まず，算学が数理学の一領域であることを述べる。「数量は増減し得べく，或いは計るを得べき者を云う。例えば距離・重量・運動・時間・空間等の如し。数理学は何ぞや，即ち数量の理を究め法を探るの学なり。而して算数学は其の一科とす。」続いて虚数（特別な名称のない数＝数）と物数（特別な名称がある数＝数表現された量）及び諸等数が定義され，算学が次のように定義されている。「算数学（或いは単に算学とも云う）は虚物両数の理を尋究し法則を求め而して之を実地に応用する者なり。」[10]

数学という学問の対象を規定し，その中での算術の位置を数と量の「理」と「法則」の解明にあるとする中条澄清の目的論は，この時期の教科書の中では際だっている。後に同様に，数学の対象を「計り得べき量の学問の総称なり」と規定し，算術をその中で特に「数の学問」[11] と規定した寺尾寿の次のことばを参照することは興味深い。「そもそも余が算術書を編纂するの志を起こしたるは今を距ること已に（すでに一須田）十年余，明治九年か十年の頃のことなり。白面書生には不相応の事業なればとて一時思い止どまりたり。」[12] 数学及び算術の学問対象について，それを教科書において明記しようとする試みは中条によって1876年（明治9年）からすでになされたのであり，後にフランスから帰国した寺尾が東京物理学講習所の講義を通して，それをより洗練された内容で復活させたのである。

(4) 永峰秀樹の算術教科書に見られる目的論

前節の中条の教科書とほぼ同時期に出版された永峰秀樹『筆算教授書』巻之一～四には，その「自序」に算術の目的に関する次のような記述が見られる。「数字（ママ）の生計に欠く可からざるは人の知る所なり。然れども人只其の計算の学たるを知りて思想の開発の学たるを知らざるもの有り。数学豈ただ計算のみならずんや。蓋し数学は実に人の神智を煥発し世の開明を誘導するの一大学科なり。故に数学に精しからざる者は其の思想往々緻密なる能わず。是れ余の此の書に已む能わざる所以なり。」[13]

数学教育が「思想の開発」に資し，「世の開明を誘導する」という目的の設定もまた，この時期の教科書としては出色である。永峰の「思想の開発」がたんなる宣伝文句でも精神論でもないこと，教育内容構成に具体化されているものであることは次章以下で示したい。

注

(1) 寺尾及び藤沢による目的論をめぐる検討の論点と今日的意味について，佐藤英二によって整理と解明がなされつつある。佐藤英二「藤沢利喜太郎の数学教育理論の再検討 ―『算術』と『代数』の関連に注目して ―」（『教育学研究』62-4，1996年）及び，同「『理論流儀算術』の持続とその歴史的文脈」（『日本数学教育学会誌』79-3，1997年）参照。

(2) 佐藤英二「東京数学会社訳語会における『算数学』と『算術』をめぐる論争」（『東京大学大学院教育学研究科紀要』第35巻，1995年，295ページ）

(3) 塚本明毅『筆算訓蒙』明治2年（1869年），『日本教科書大系』近代編第10巻，算数1，1962年，講談社，113ページ。

(4) 教科書の構成を記述することばとして「応用問題」という概念が適切であるか否かは時を改めて検討したい。日常語としての意味を越えて，初等数学教育におけるこのことばは「計算問題」とのセットで用いられてきたこと，また，それに対する批判が数学教育研究上の本質的な進歩と結びついていたことを考慮すれば，新たな視点での整理の必要は明白である。例えば成城学園訓導佐藤武の著作によせた序文において，沢柳政太郎は次

のように述べている。「従来応用問題と称し来たれるものを事実問題と改むべきことに思い至れるは一大発見といってもよいと思う。応用問題といえば法則なり形式なりを理解して而して後之を実地の問題に応用するとより考えられない。されば是までは多くは形式算に習熟せしめて後応用問題を課するを常としていた。具体より抽象に，事実より法則に，実質より形式に進むは自然である。事実問題として形式算に先たちて主として之につき教授し練習せしむべしとは算術教授上の一革命である。」(佐藤武『算術新教授法の原理及実際』1919 年，同文館，5 ページ)

「事実問題」という概念が佐藤の発見だったかどうかは別にして，これが算術新教育運動のもたらした大きな研究成果であったことは疑いえない。(拙稿「算数の教科書のあり方一算術から数学へ」，柴田義松編『教科書』1983 年，有斐閣参照）にもかかわらず，今日このような成果は必ずしも十分に意識されているとは言い難い。そればかりか，「応用問題」が「文章題」という，さらにあやしげな概念とさえ混用されている。数学において，およそ「文章」で表現されていない問題がありえようか。

(5) 塚本明毅，前掲書(3)，119 ページ

(6) 同上，128 ページ

(7) 同上，133 ページ

(8) 同上，134 ページ

(9) 中条澄清「小学算術科」(『数理会堂』社説，1889 年，日本科学史学会編『日本科学技術史大系』教育 1，1964 年，第一法規，525 ページ）この資料は中条澄清の 1887 年の教科書について「あとで触れる新しい算術教育の理論 — とくに『理論算術』の影響がうかがえる」（仲新他編『近代日本教科書教授法資料集成』第 8 巻，1983 年，東京書籍，737 ページ）とする評価が正確ではないことを示している。

(10) 中条澄清『算学教授書』巻之一，東書文庫図書室所蔵（冒頭の書名に続いて，中条澄清訳述となっているが，特定の外国教科書の訳というより，幾つかの外国書を参照しながら独自に構成したものと思われる。)

(11) 寺尾寿『中等教育算術教科書』上巻，1888 年（明治 21 年），敬業社，10 ページ

(12) 同上，緒言，7 ページ

(13) 永峰秀樹『筆算教授書』巻之一，1877 年（明治 10 年），甲府書肆，東書文庫図書室所蔵

3．自然数（0 を含む）の取り扱いについて

(1) 本章の目的

いかなる数学論的な立場も，従って数学教育論上の立場も，数学の出発点である自然数（現在の学校数学では自然数は 0 を含まないが，例えば自然数を有限集合の基数(集合の要素の数)とする立場からは空集合の基数である 0 を含む。小論では自然数ということばを 0 を含む意味で用いることにする）をどうとらえ，どう教えるかという問題への解答を自らの内に含んでいる。しかし，この問題が数学という学問の内部で課題として意識されたのは最近のことと云ってもよいだろう。ブルバキの『数学史』は次のように述べている。「19 世紀以前には自然数の加法，乗法を，直観に直接うったえる以外の仕方で定義しようと試みた例はなかったようである。…19 世紀の中頃になっても，この方面にはなお何の進歩も現れなかった。たとえばヴァイエルシュトラスなどは，その講義が《数論化》の見地（実数を量の概念から自立させ，自然数から構成する試み一須田）を普及させるのに大いに貢献した人だが，この人でさえ整数の理論を論理的に明らかにすべき必要は感じていなかった模様である。この方向での第一歩を踏み出したのはグラスマンの功績であるらしい。彼は 1861 年に…整数の加法，乗法に一つの定義を与え，$x \to x+1$ という演算と帰納法の原理…とだけを用いて，その基本的性質(交換法則，結合法則，分配法則)を証明している。…ところがここに 1888 年になって，初めてデデキントが…数論に対する完全な公理系を発表した。これは（3 年後にペアノによってふたたび提出され，普通は

ペアノの公理の名で知られているのだが）帰納法の原理の厳密な定式化を含んだものであった。」[1] だから明治初期の算術教科書を数学研究の到達点とどう関連づけるかという問題は立ちにくい。そして日本の初等数学教育を大きく進歩に導いた「数え主義」の側からの「直観主義」批判はもう少し後のことである。勿論，数学を量の学問と規定した寺尾寿の所説も，それを批判した藤沢利喜太郎の所説も後のことであり，小論の対象ではない。

にもかかわらず，いかなる算術教科書も，算術あるいは数学の基礎事項を最初から説明するという方向を必然的に持っているのであり，自然数とは何かという問いへの答えを様々な形で含んでいるのである。この章では数と量の関係，及び算術において数範囲の拡張をどのように進めているかという問題に限定して考察し，演算の意味づけと関連する問題は次章にゆずることにする。

(2) 数の範囲

塚本明毅の教科書は，西洋算術教科書に習いながら日本の土壌にふさわしい再構成をなしたものであることは，次に見る最初の数の導入の部分で明らかである。「数目に三種あり。一を基数といい，一を大数といい，一を小数という。基数は，数の因って起こる所にして，大数は，数の重加するものにして其の極みは天地の大も容るる能わず，小数は，其の数 1 に満たざるものにして，其の極みは目力もおよぶ能わず。」[2] 数について特段の説明はなく，小数をも含めた「すべての数」を一挙に導入するのである。この教科書が「幼学入門の資」[3] として書かれたものではあっても，珠算の初歩や和算の初歩くらいの知識を有しているものを対象としていることは明らかである。このような学習者には数の名から入っている『塵劫記』など，伝統的な和算入門書の形式をふまえるのが有効と考えられたのだろう。ただし，和算入門書とは次の 2 点で大きく異なっている。

①，基数に 0 が含まれ，0 から始まっていること。

②，大数は平板に万進法を記述するのではなく「兆以上の大数は，近世大抵用いず，億を以て極値となす。」[2] と，無用に大きな命数を軽く扱っていること。そして筆算においては基数のみを用いて大数は用いず，基数と 0 で表すこと，基数を表すにも洋字が字画も少なく誤りも少ないこと。つまり計算はアラビア記法で一貫するという方針。

このように塚本明毅の教科書は，和算の伝統的形式に拠って出発しながら，10 進位取り記数法を速やかに導入した後に演算を定義し，数計算はすべて縦書きで行えるような構成となっているのがその特徴である。中条澄清，及び永峰秀樹の教科書はそれを引き継いでいる。山田正一の『筆算教授本』も同様である。[4]

「学制」以後作成された教科書で「ロビンソン著，神津道太郎訳」とされている（前述のように，この時期における「訳」は今日のような原作に忠実な訳というより，訳者による独自な構成を含んでいる）『官許筆算摘要』巻一も，「記数法」「誦数法」において特定の数範囲に止めることなく，万進法で一挙に京までの数を導入している。ただし，小数は巻二の分数の後になっている点では塚本とは異なる。また，0 もアラビア数字の十個の数字の最初に導入し，「始めの 0 は一個の価をも有せざる者なり。故にこれを零或いは無と称し…」という解説を加えている。さらに十個の数を記そうとしても，十という数字がないから 0 の左に 1 を記してそれをあらわすこと，同様に 20 や 30 などが記されることを説明し，さらに多くの具体例や問題を通して位取り記数法の定着をはかっている。[5]

日本の伝統的命数法が10進であり，アラビア式記数法に近いものであることは，学習者の理解を容易にする反面，0の欠如や数を表す文字が一〜九のほか，十，百，千など多くの文字を持つこと，とりわけ十（じゅう）という数字を持つことは現在でも初学者の混乱を招くことである。[6] 漢数字による数表記とアラビア数字の数表記の対応の問題はロビンソンの原著にはないだろうから，神津道太郎の独自な工夫であろう。この点に関して，山田正一のの教科書では，例えば「三百〇四」とか「五千〇六十三」のように漢数字の標記においても空位の0を用いるという，優れた工夫を用いていることにも注目したい。[7]（前章(2)の設題例にあるように，塚本明毅もときどき〇を用いた漢数字記法を用いているが，一貫しているわけではない。）

10進位取り記数法の本質を日本の学習者に過不足なく説明しようとする先達の地味な試みには，教育実践の開拓者に共通のエートスを感じさせるものがある。

(3) 数と量

塚本明毅の教科書には，演算の導入に先立った数や量，あるいはその相互関係についての記述は特にない。加法に入って，その定義と例題の後，量と数に関する重要な注意を次のように述べている。「凡そ諸数を加えるに，各其の類に従い，其の相異なる者は加えること能わず，初学の者予めこれを弁ぜざるべからず。数に二種あり，一に曰く名数，これは其物を指して，数を命ずる者にして，即ち三尺　五人　六斤等なり。一に曰く不名数，これは数を泛称して，物を指して命ぜざる者にして即ち三十　五十七　一百十四等なり。名数また二種に別つ，一に曰く同名数，これは其の類を同じくするものにして即ち三年と五年…これは直に相加うべし。一に曰く異名数，これは其の類を異にする者にして，即ち五匁　三十両　十三尺　七人等なり，これは相加えること能わず。」[8]

今日的な表現でいえば，数（不名数）は様々な量（名数）を「泛称」（はんしょう，ひっくるめたもの－須田）したものという立場がとられている。これは現在も含めて，多くの初等数学教科書の共通するところである。明治初期，その両者を明確に区別しようとしたことの積極性と，今日の教科書が未だこの関係を明確に説明していないという事実との対比は，数学教育の進歩の遅さを感じさせるに十分であろう。その後，直観主義批判を媒介とする数え主義の確立，「集合の大きさ」というとらえかたの形成，戦後の数学教育協議会による「量の理論」の提起等，いくつかの重要な進歩があったことは疑いえない事実としても，量と数の関係が数学的認識の発生や発達の見地から，整合的に説明されるようになったとは未だに思われないのである。[9]

神津道太郎の教科書では，量，算学，数などの基礎概念に対する説明が，相互の関連において，冒頭の「釈義」(「定義」と同義－須田)でなされている。[10] 一，「量は増減即ち測る事を得べき所のものなり」二，「算学は此の量を論ずる者なり」三，「単位は一にして即ち数の最も簡単なる者なり」四，「数は其の単位の聚合したる者なり」五，「整数は完全なる者なり」六，「数の単位とは其の数と同種類の一をいうなり。故に二十三個の単位は一個，二十三円の単位は一円，二十三尺の単位は一尺なり」七，「同名数は同種類の数にして即ち七十四個十六個二百五十個，また七円六十二円，また九斤三百二十斤八十六斤…等の如し」八，「不名数は物の名をさして命ぜざる所の数にして即ち十七，三百六十五等の如し。」九，「名数は物の名をさして命ずる数にして即ち十七円，三百六十五日…等の如し。」十，「数学は数を論ずる者にして即ち計算の術なり」十一，「記号は其の計算の様を表す者なり」十一，「法則は其の計算の方法を示す者なり」

算学の対象が量であること，量は数を含むものであること，数が2種に分類されることをは

じめ，量と算学，数の関連を最初に定義するという方法も，前章に見た中条澄清（さらには後の寺尾寿）への影響をうかがわせるものである。三と四と六は循環論のようにも見えるが，近代数学がまだ数の数学的理論を確立しない時期においては「一」と「多」の関係で哲学的に数が説明されていたことからすれば，十分にレベルの高い説明であったといえよう。その関係を弁証法として説明するかどうかは別として，「一」と「多」は相互に規定される関係なのだから循環論的になるのである。五の「完全」という意味は英語教科書からの訳語であるが，たとえば「fraction」という言葉と対比されない限り理解されがたいだろう。「記号」「法則」などの語について説明を試みていることも興味深い。

前章に見たように，中条澄清の教科書も同様に数を 2 種（「虚数」と「物数」）に分類している。そして「一」と「多」にもかかわる数の説明が同様に，次のようになされる。「一個はすべて単一無併の物を云う」「数は一個或いは数件の一個の集合して成る者なり」「数の一個は即ち其の数を成す一個を云う。例えば四十八個の一個は一にして四十八日の一個は一日なるが如し」「虚数は其の一個に特別なる名称なき数を云う。例えば八個，七十九個…等の如し」「物数は其の一個に特別なる名称ある数を云う。例えば五円，二十四時…等の如し」ここでも「一」と「多」の相互規定的な関係が説明されている。なお，今日の感覚からすれば「個」はひとつの助数詞であるが，塚本の教科書も含めて，「個」は任意の名数の助数詞であるとともに，無名数の大きさ，あるいは無名数の整数部分などを表すのに用いられている。(11)

以上見たようにここで採り上げたいくつかの教科書はそれぞれ，後の教科書に特徴的な四則併進主義はとらず，むしろ最初に一挙に「任意の大きさの整数」さらには「任意の大きさの小数」までを導入し，しかる後に演算を導入していたことが分かる。数の拡張と演算の導入の問題は今日では四則併進主義がとられていないことは当然であるが，同時に現行小学校学習指導要領におけるその関連づけも必ずしも必然性があるものとは思われず，研究課題として残っている。明治初期の教科書の構成を今日そのまま再現することは無論誤りであるにしても，十分に検討の素材を提供しているものといえる。また，数についての数学的理論が未だ確立していない時期にあっても，数とは何か，また数と量の区別と関連の問題如何等，現在にも引き続く初等数学教育の基本課題は十分に意識され，この時期になしうるであろう最大の厳密さをもってこれらの問いに答えようとしていたことがわかる。この問題はさらに次章の演算の指導内容の構成の問題としても考察の対象としていく。

注

(1) ブルバキ『数学史』（村田全他訳，1970 年，東京図書，35～36 ページ）

(2) 塚本明毅『筆算訓蒙』（『日本教科書大系』近代編第 10 巻，算数(1)，1962 年，講談社)，115 ページ　なお，数の表記は日本の習慣に即した 4 桁区切りであるが，このことの意義について大矢真一は次のように述べている。「このように外国との関係を中心としてみれば，三桁区切りは当然のようである。しかしわが国を中心にして考えれば，四桁区切りは当然のことであった。同じ数字を並べて書いても日本人は日本語で読み，英国人は英語で読む。区切りのしるしは読みやすいために付けるのであるから，数字に固有のものではなく，言葉に付随するものである。外国の書物に三桁区切りで書かれている数を，日本語に翻訳した書物のなかで四桁区切りにするのは翻訳の一部分である。世間の習慣ということより理論ということを重くみれば，このような結論になる。当時までの数学者がすべて四桁区切りをとっていたのは，このように理論を中心に筋を通すことを強く考えたことによる。」（大矢真一・片野善一郎著『数字と数学記号の歴史』，1978 年，裳華房，49～50 ページ）

(3) 同上，113ページ

(4) 米国　タウヱス氏著，静岡　山田正一訳述『小学筆算教授本』巻の一，1873年（明治6年），京都書林，東書文庫図書室所蔵

(5) 米国　ロビンソン氏著，神津道太郎訳述『官許筆算摘要』巻一，1875年（明治8年），東書文庫図書室所蔵

(6) 今日の小学校1年生の算数教科書では，「10」がひとつの文字なのか，1と0から構成された新しい記法なのかをあいまいにしている。このような「ごまかし」はやむをえないこととは思われない。

(7) 山田正一，前掲書(4)

(8) 塚本明毅，前掲書(2)，118ページ

(9) たとえば1970年代に，小島順，田村二郎などによって「数は量の倍変換」という立場が表明されたが，その原型は中条澄清や寺尾寿にも見られる。しかし，数学教育の問題として正面から議論されているのはごく最近のことである。

(10) 神津道太郎，前掲書(5)

(11) たとえば塚本明毅の教科書巻二の分数の定義（命分）の部分には次のような2つの例がある。「金三百五十八両を五人にて相別つに，各の所得如何，…即ち一人の所得七十一両五分の三なり」「物一九個あり，これを三分すれば其の数如何…六個三分之一なり」（前掲書(2)，147～148ページ）名数の名（単位）は整数部分につけられ，不名数のときもそれと同じく「個」または「箇」が整数部分につけられる。今日も一部残っている帯分数の読みに用いられる「か」はこの意味だろう。

4．四則演算の説明について

(1) 本章の目的

初等数学教育はどのようなものであれ，有理数の四則計算に関する指導をその内に含んでいる。立場によって，「四則」というのは現象論的で，本質的には加法と乗法の二則しかないという考え（有理数の代数的性質を現代的に整理すれば自然数を含むアルキメデス的順序体であり，そこには加法と乗法だけが存在する，減法や除法は逆元の加法，乗法にすぎない）や，本質的には加法だけという考え，さらには1を加える加法だけが本質的で，あとは派生的とする立場（ペアノの公理系）さえありえよう。どの立場を採るべきかは決定的な結論が知られているとは思われないので，ここではさしあたり四則がある，という現象論的な立場を採ることとする。それがどのように指導されているか，という問題に対する答え方は多様であろうがここでは次の3点に限定したい。

①どのように定義されているか，また定義がどのように説明されているか

②それぞれの演算の代数的性質，例えば交換法則，結合法則，分配法則などがどのように説明され，あるいは用いられているか

③計算のアルゴリズムをどのように形成しようとしているか

このような観点から，本章では塚本を中心に，四則演算がどのように説明されているのかを検討し，特筆すべき相違のある点，特に優れた工夫と認められる点について他の教科書の検討を加え，全体としてこの時期の教科書の到達点の特色を明らかにしたい。

(2) 加法と減法

i）塚本明毅『筆算訓蒙』における加減

塚本明毅の教科書の加法の最初の部分を示す。「加は，俗に寄算という。衆数を合せて，其の総数を求めるなり。其の得る所の総数，これを和と称す。加の標識，＋を用ゆ。甲乙の両数あり，

是を加えんとするに，先甲数を横書し，其下に乙数を横書し，甲の一位，乙の一位と相い並べ，其十位は十位と相並べ，千万位もまた是の如くにして，甲乙一位の両数を合わせて，其の位下に記し，十位に進む時は，則十位へ加え一となし，其の十位の数と合し，これを算え，其の数を其の位下に記し，又十位に進む時は，即百位へ加え一となし，以てこれを算え，逐次此の如くにして其の総数を得るなり，甲乙丙丁等，多項数ある時も，又これに習う。」(1)

さきに述べた（3 −(2)），この教科書が一定の算術的知識を有した読者を対象としていることはここからも裏づけることができる。すでに知識を有している寄せ算について，加法，和のことばと，＋の記号が与えられているのみである。この点は減法も同じである。「減は俗に引き算という。多数より寡数を引き去りて，其の残を求むるなり。その残り数を，差と称す，又較と称す。減の標識−を用ゆ。」(2) と述べただけで，計算法に進む。ただし，前章(3)でふれたように，名数，不名数の区別，同名数，異名数の区別をした上で「其の類を同じくするもの」についてだけ加法が定義できることにふれていることは，それが加法の量的意味にかかわって本質的に重要であるだけに注目に価しよう。

この教科書の著しい特徴は，加法及び減法に関して，一挙にそのアルゴリズムを説明するという点にある。先の一般的説明に続いて，2.5673 と 8499 の和が例題(縦書き，ピリオドは 4 桁区切りを示す）とされて，その計算の実行過程が丹念に説明されている。次の例題が 3 位数と 6 位数の混ざった 4 つの数の和を求める問題で，これもに同様，丹念な説明がついている。減法についても同様に，加法と同じ一般的説明の後の最初の例題が 20.0735−3.5468 という，繰り下がりの処理に関してのすべてが含まれている問題が用いられている。このような構成の方法は「凡例」に記されている次のような方針に基づくことは明らかである。「毎法先に其の理を概論し，必ず一例を挙げて是を詳解し，且つ問題数条を設けて，幼学の者をして，其の答えをなさしめんと欲す」(3) これが小倉金之助をして「近代的教科書の形式」(4) と評価せしめた所以である。代数的法則については，「諸多数」の和が定義されることによって加法の結合法則が使用されていることのほか，特にふれられていない。

ii）加減算に関する他教科書との比較

① 事実問題と定義

神津道太郎の教科書は「数目」のあと，「暗算」として「ある人五円と七円の品を買うあり。この払いは如何　解　五円と七円を合して十二円なり。故に十二円を払しことを知る。」という例題とその回答がなされている。同程度の事実問題が 2 題だされ，「加法は幾多の同名数を合して一数を得るの術なり」と，加法の定義がなされる。山田正一の教科書は一応の定義を述べた後，やはり平易な事実問題を扱っている。中条澄清の教科書も神津と同様，加法の導入は加法が生ずる平易な場面について「心算」を行うことから始める。「孝太郎金二円を以て物理書を買い金三円を以て算術書を買えり。此の二書の値合わせて幾円なりや」という形の事実問題 4 題，「一個に一個を合わせて幾個なるや」「一と七は幾個なりや」「五と九は幾許なるや」という形の単位のない数の問題が 12 題，さらに，一位数の加法に十分に習熟すべきことを述べ，さらにそれを 0 〜 9 までの加法九九表にまとめた上で次のように定義している。「加算は同種の二数あるいは諸数を合わせ総数を求める者なり。」同種の量でなければならないことへの言及はどの教科書にもあるが，永峰はさらに次のような例をあげて説明している。「故に桃と梨とは相加ふる能わず。」かつて「現代化」批判の中で「『公証人の鼻，月，4』のようなさまざまな集合」(5) が問題にされたことに見られるように，同種であることの意味は一義でないが，永峰はかなり厳密

にとらえているようである。

加減算について，特に計算らしいものを必要としない平易な事実問題を通して定義を理解させようとする試みはほぼ共通になされているといえよう。

② 等 号

神津の教科書では定義の次に和及び総数ということば，記号＋及び＝が説明される。塚本の教科書では四則計算をすべて縦書きで行っているから等号についての説明はないし，巻一では1回も使われていない。記号＝は「相等を表す」もので2数の間にこれが書かれている時，この両数は互いに等しいことを示す，という説明である。山田，中条も同様，等号の定義が2数の相等として説明されている。一見，当然のことのようにも見えるが，例えば現行小学校教科書が最初のうち，記号＝は「は」と読み，演算の「結果」を示すものであるかのように扱われていて，後にいつか「相等」の意味が付与されていることを考えれば，このような直接的な指導はむしろ新鮮にも見える。等号の意味の指導過程は今も未解決の課題なのである。

③ 計算のアルゴリズム

神津は加法計算の指導は繰り上がりのないものとあるものの2段階に分け，それぞれ3つの数の加法を例として説明している。繰り上がりのあるものについては，まず，1位の数の和，十位の数の和，百位の数の和をそれぞれ求めて各位の下に記し，それを最後に加える（つまり部分和3段，総和1段の縦書き計算）という，実にていねいな方法を示した後，「便法」として総和1段ですませる方法に移行している。永峰秀樹も同様，例1で事実問題から縦書きに63銭＋13銭を立式し，例2で繰り上がりのある問題を採り上げる。神津同様，初めは位毎の部分和を書き，次にその総和を求める方法を用い，次に部分和を書かない，通常の方法に進む。中条澄清もこれらの点は共通している。いずれの教科書も，減法においても，繰り下がりのない減法を最初におき，縦書き計算の原理を教えてから繰り下がりのあるものに進み，一般の減法が行えるような構成となっている。

さらに，神津，山田，永峰，中条の教科書に共通する特色は，それらのアルゴリズムを「法則」(神津)「規則」(山田)「加法通則」(永峰)「法第一，法第二…」(中条)などとしてまとめている点にある。近代教科書としての形式は急速に整って行くのである。

④ 代数的性質にかかわって

中条，永峰の教科書において注目したいのは検算に大きな比重をおいていることである。中条は「加算検法」として次の2通りの方法を示している。「各行の頂上より下へ計え得る和と前法によって得る和と密合すれば此の算違差なきを証す」「横線の上に列書したる数を二部或いは数部に分かち此の各部の数を加し得る和を総和する数と先に得たる和と等しければ此の算誤りなかるべし」永峰も同様の加法の「試験法」に触れ，減法では「通理」として「差と減数との和は被減数と同じ」であることに触れながら検算を行っている。

今日の教科書において検算はほとんど取り扱われていない。しかし，検算は計算の誤りを発見する方法であるに止まらず，同時に交換法則，結合法則，さらには逆演算の関係など，重要な代数的性質を駆使して行われるのだから，初等数学のカリキュラムにおいて然るべく重要な位置を与えてもよいと思われる。

(2) 乗法と除法

i）塚本明毅『筆算訓蒙』における乗除算

① 乗法の定義

最初に定義と語句の説明が次のようになされる。「乗は俗に掛け算という。同数の和を求むる法にして，加法に原づきて，其のさらに簡便にして施すべきものをいう。…乗者原数あり，これに某数を掛けて，その原数を実と称し，掛くる数を法という。其の得る所の総数を，得数といい，又積と称す。其の実数は必ず名数にして，法数は姑く（しばらく）これを不名数と見て可なり(其の理は比例式に於いて詳らかにすべし)。その得数は，必ず実数と類を同じくして即ち其の同名数なり。初学の者須からく，左の九九合数表を暗記すべし。」[6] 九九は「一一如一，一二如二」から始まり「九九八十一」で終わる半九九である。「如」は積が一桁の数の時に用いられる文字で「が」と読ませている。

「同数の和を求める法」という定義だけで，どのような場面に乗法が生ずるのかという説明や例題はない。加法の意味はほぼ既知とされていたようだから，加法をもとに定義される乗法も，その意味は明らかだと考えられたのであろう。また，半九九でよいことは交換法則を前提とするが，これも加法に基づく以上は自明と考えられたのだろう。半九九が用いられた根拠の一つは，この時期，除法九九も掛け図などで指導されており，それが大きい数を先に，小さい数を後に発声するもの（例えば「六二三十ノ二」；「20を6で割ると3余り2」の意味）だったから，紛らわしかったのだろう。[7]「法」と「実」はこの時期のどの教科書においても乗除の両方にわたってその概念が説明されている。実が操作を受ける量（または数）であり，法が操作なのだから，この概念は量と数の乗除における関連を明確にする上でも有効性をもっている。これは実が名数で法が無名数，という定義の仕方にも適合している。なお，法数が無名数であることに「しばらく」と付されているのは，巻三の「正比例」の章で，例えば「米三十五石にして，其の価金二百八十両なる時は，米百五十石の価幾何なるや」[8] という問題の解法の中に150×280という，両を表す数と石を表す数の積が使われるからと思われる。

② 乗法計算のアルゴリズム

九九表の次に直ちにアルゴリズムの指導に入る。その順序は3位数×1位数，6位数×1位数，5位数×末位が0の2位数，4位数×2位数，そして法が因数分解できる場合，法の途中の位に0があるもの，さらに法が小数であるものまで進んでいる。この後，九九を12まで拡張してから，かなり複雑な39題の計算練習が課され，「設題」に進む。

③ 除法の定義

まず，定義と用語が次のように説明される。「除法は，俗に割り算という。小数を以て多数を割り，其の平均の数を求むる所にして即ち乗法の還原なり。…其の割るべき多数を原数と称し，これを割る所の小数を除数と称し，其の得る所の数を商と称す。除法の標識は，：又÷を用ゆ。即ち甲：乙又甲／乙（分数の形－須田）は，乙にて甲を割るなり」[9]

この定義はそれ自体では理解困難である。「平均」ということばと「還原」ということばが直ちには結びつかないからである。しかし，この点は次のように説明されている。「凡そ除法は，元減法より起こる所にして，少数を以て多数を分かつに，其の多数は，少数の幾倍なる事を按し，即除数を幾倍数となして，原数より減し去りて，残数なき時は，除数へ乗ずる所の数，是則ち平均分かち得る所の数にて，則ち商なり。もし残数ある時は，是除数にて分かつべきものなれども，既に除数よりも小なるに因って割りがたし。故に商尾に某分の某と記し置いて，其必ず除すべきものなるを示す。」[9]

同数累加としての乗法と，それの逆操作としての累減，倍と等分（平均）の関係が簡潔明瞭

に明らかにされているといえる。このように除法を定義したとき，一般には割り切れないのだから，具体的な計算に入る前に「剰余」について説明をしておくというのも，きわめて自然である。そのさい，整数論的な処理（実＝法×商＋剰余）ではなく，分数を用いていることも注目に価しよう。最初の除法の指導はこの2つの立場の選択から自由ではありえない。塚本の教科書を始め，この時期の教科書は除法の指導において分数を導入しているが，整数論的世界の構築よりも，有理数の四則計算の完成までの最短距離を選んだためであろう。

除法の量的意味に関しては，計算方法の説明が終わり，練習問題に入る直前に次のような重要な記述がある。「凡そ除法において，実数法数ともに同名数なる時は，其の商必ず実と異名数なり，実法互いに異名数なる時は，其の商必ず実と同名数なり。」[10] 乗法の時の実が名数で法が無名数という説明に比べて，条件が柔らかくなっているのは興味深い。後の比例論では，同種の量の比，異種の量の比を共に考え，比例式の性質を多様に用いながらその2つを使いこなしていることを考えれば，このような拡張は自然に理解できる。

なお，除法の記号として：，÷，／（分数表記）の3種が用いられていることはそれ自体興味深いことである。この3つの記号は現行の教科書においていずれも用いられているのだが，÷と／については分数が商を表すものであることの指導以前は，異なるものとして扱われている。さらにこれらと：との関係は「比」と「比の価」として区別される。区別よりも，同一性を見ることの方が重要ではなかろうか。

④　除法のアルゴリズム

まず，15÷5の問題で縦書き計算の書き方が示される。次に18÷5の問題で商を分数の形で表して（計算の過程の書き方は現行のものと同じ）準備が終わる。アルゴリズムの形成は次のような順序でなされている。56.9784÷2で「立てる，掛ける，引く，下ろす」の繰り返しの過程が示される。→13.8528÷9で，最初の商が立たない時の処理が示される。→4.3248÷8で，商の途中に0が生ずる場合の処理が示される。→1.6700÷5で実の末位に0がある場合，9.7834÷600で法の末位に0がある場合，がそれぞれ示される。→法が2位数以上の場合も同様に実行できることが示される。このように，実によく工夫された，最短の筋道でアルゴリズムの形成が図られていることには驚きを禁じ得ない。この後，検算の方法が簡単に説明された後，除法の計算練習と「設題」に続く。

ii）乗除算指導に関する中条，永峰の教科書との比較

①　乗法の事実問題と定義

加減算と同様，「学制」以後の教科書はいずれも平易な事実問題を示しながら新しい演算の生ずる場面を示し，定義に進んでいる。まず，中条澄清の教科書を見る。最初は「毎斤六銭の菓子九斤の価は幾銭なるや」という問題で，つぎのような解説を付している。「此の菓子一斤の価六銭なるゆえ二斤価は六銭と六銭の和十二銭なり。又三斤の価は六銭を三回集むる者十八銭なり。故に三斤の価は毎斤の価六銭の三倍十八銭なり。」この種の事実問題（いずれも1当たり×倍の型の問題）6題のあとに，「四個を九倍すれば幾個なりや」「八個を五倍，七倍，九倍すれば幾個なりや」という数×倍の型の問題が5題出されている。これらの比較的平易な問題を通して累加と倍の同等性が説明されている。「二を三回集むれば六個となり，又二を三倍すれば六個なるゆえ数を倍するは集むことの簡法なる理を解説し多くの題をだし心算せしむ。」このような準備を経て乗法が次のように定義される。「乗算は他数を照らし題したる数の若干倍数を求むる法なり」

乗法を加法に基づきながら，加法の概念には属さない倍の概念との同等性を説明し，倍の概念を用いて乗法を定義する中条澄清の方法は，この時期の教科書の多くが乗法を単に累加として説明するに止まっていたことに比して，極めて高い水準にあるといえる。

永峰の教科書の定義は累加そのものであるが，導入の過程には工夫がある。「一個につき二銭ずつの梨四個を買うには幾銭を要するや」という問題に対し次のような解説を加える。「一個＝二銭，二個＝二＋二＝四銭，…四個＝二＋二＋二＋二＝八銭，故に乗表を暗記して一個の価にその物の数を乗すれば直ちにその価を得るなり」

これは明らかに，等号（永峰は「イコール」と読ませる）の意味を逸脱している。しかし，乗法は比例する２量の対応という側面もあるのであり，等号の意味の「拡張」の意義は十分に評価し得るところであろう。永峰も加法による説明は最初だけに止めて，倍（量×倍）の概念に移行する。「乗積は必ず乗実と同種類ならざることを得ず。故に乗実虚数なるは其の積もまた虚数なり。乗数は唯乗実を幾倍すべきやを示す者なり。故に必ず虚数なり。」この点について，さらにていねいに例を挙げて説明がなされる。「今一尺二銭の綿布三尺にては其の価如何と問わんに其の答えは六銭なり。此の答えを得るに，二と三とを乗ずるは，二銭と３尺とを乗じたる者ならず。…三尺は一尺の三倍なるをもって一尺の価二銭を三倍して六銭を得るなり。今若し二銭と三尺とを乗して答えを得ると云わば猶三疋の馬と二個の桃とを乗ずるというが如し。甚だ理に背ける者となす」

中条，永峰ともに，乗法の生ずる場面，量的背景については細心の注意を払っていたことがわかる。

② 乗法計算のアルゴリズム

中条の教科書は乗法の定義の後，０から９までの半九九の表を掲げ，これを「暗記せしめ熟するの後」計算に進むこと，とされている。計算は×１位数（第一格）と×多位数（第二格）の２段階に分けられている。第一格はさらに，実数の各位に０を含まないものと含むものに分け，５位数×１位数の縦書き計算が例として示される。最初は部分積ごとに段をずらして別々に書き，分配法則の使用が見えやすくなっている。第２格は 8972×32 を例１として縦書き計算を示し，部分積の１段目に「イ」２段目に「ロ」３段目に「ハ」と記号をつけ，イが実数の２倍，ロが実数の 30 倍，ハが実数の 32 倍である，と説明を加えている。例２が法の一部の位が０であるものについて，まず，０との乗法を実行し，部分積として明記した記法を示してから，それを省略した記法に進む。さらに法の末位に複数の０がある場合にもまず，０との乗法を実行した部分積を書く記法を示し，省略法へ進む。最後に実，法ともに末位に複数個の０を含む場合について，その法則を一般化してアルゴリズムの指導を完成させている。型分けは実に整然としており，完成度が高いものといえる。

永峰の教科書は乗法九九で 12×12 までを暗記させ，型分けも法が 12 までの型と 12 を越える型にわけるという方法をとっており，平易な説明にはなっていない。

③ 乗法の代数的性質と検算

上述のように，中条澄清による乗法計算の指導において，分配法則が明瞭に意識され，その適用によってアルゴリズムが完成されていることは注目に価する。さらに，この教科書は交換法則についても行き届いた指導過程が組まれていることにも注目したい。まず，導入部分の累加と倍の関係の説明に続いて「二を三倍するも三を二倍するも得数等しき理を解明すべし」と述べられている。さらに法が多位数の指導のあと，検算に入るまえ，再び交換法則に言及する。

「二数の相乗は何数を法或いは実と為すも同じ積を得るべし。上の図解を以て解説し，尚大数を実，小数を法とすれば運算に最便なる理を解くべし」図解とは，１という数字が横に７個，縦に４段書かれていて，実７×法４＝積28，と実４×法７＝積28の２つの式が併記されているものである。永峰も交換法則を説明している。実，法を説明したすぐ後に「注意」として「実数と乗数とは其の位置を相換ふるも其の積は異ならず」と説明した上で，「二数の内大なる方を乗実とし，小なる方を乗数とするを便とす」としている。そして「その理は左の如し」と述べ，碁石が横に４個，縦に５列並んだ図を示し，各列５個４列と見ても，各列４個５列とみても同じことが説明されている。

乗法の交換法則の必要は，縦書き計算における書きやすさの問題，さらに九九が半九九であることなどの事情から明らかである。しかし，あえて法則を明示的に指導することが絶対に必要だとはいえない。事実，多くの教科書は交換法則を使用はするがそれを明示しているわけではないのである。それだけにこの２つの教科書としての，「法則」あるいは「理」を明示的に理解させることへの努力は，この時期の教科書の到達の高さを示すものといえよう。

検算については中条は「第１格」で「法数より一個を減じたる者を実数に乗じ得る積と実数との和と先に得る積と等しければ其の算誤りなきを証す」という方法，第２格ではこの方法とともに，法と実を入れ替える方法を示している。前者はペアノの公理系における乗法の定義の一部(11) であることからも知れるように，乗法の代数的性質の中でも基本事項に属しよう。永峰も検算の一つにこの方法を用いている。永峰の示すもう一つの方法は，実と法を９で除した余りの積と，積を９で除した余りの一致，というものである。正解であることの必要条件にすぎないが，理論的にはおもしろく，またそれなりの実用性もある方法であろう。

④　除法の定義

中条の教科書は乗法と同じく「心算」で平易な，除法の生ずる場面の問題から導入している。「金十六円を以て一冊四円の書籍を幾冊買い得るや」その説明は次の通りである。「金四円を以て書籍一冊を買うときは十六円は四冊（ママ）の四倍なるゆえ四冊を買い得べし」同様の事実問題５問，「九個の中に三個は幾何ありや」の型の単位のない数の問題８問，「八十一個を九等分すれば幾何ありや」の型の問題３問を掲げている。興味深いのは，単に問題を解かせる事が目的ではなく，除法の定義に相当するものを自然に生徒から導き出すことが目的とされていることである。「生徒答えるとき，何故その答数をえるやと再問し，除算の一数の中に他数幾許あるやを見いだし，大数を若干等分すると云う理を了解せしむべし」明治初期の「開発主義」による「問答」が，問答のための問答に終始し，その効果が疑わしかったことはしばしば指摘される。しかしこの例のように，平易な問題を解かせ，その解答の根拠を意識させることによって新しい概念の定義に相当する内容を引き出す，という授業方法が考案されていたことは驚異に値しよう。「定義」は簡明である。「除算は一数他数の幾倍なるを求め即ち数を若干等部に分かち其の一部を求むる法なり」

⑤　除法の代数的性質

中条の教科書における除法の検算について，加減，及び乗法でふれたようにやはり除法の代数的性質を確認・定着させる重要な意義をもっているが，ここではその内容は繰り返さない。ただし，除法検算の最後（巻之一の最後）に，除法の代数的性質が次のように要約されていることは特記されてよいと思われる。「右の六件の理（検算の方法に関するまとめ－須田）は次の通理三件より生ず。[第一理] 実数に乗ずれば商に乗じまた実数に除すれば商を除すべし。[第二

理］法数に乗ずれば商を除き又法数を除けば商に乗ずべし［第三理］同数にて法実を乗或は除すれば商変わること無し。」さらに，この三件は次のより一般的な「公法」に帰す，とまとめられている。「実数ヲ変スレバ同ジク商ヲ変ス。尚ホ法数ヲ変スレバ相返シテ商ヲ変スベシ。」

自然数に関する算術の教育内容が，分数論や比例論，さらには代数学へ連続していることを明示する内容といえよう。

まとめにかえて

塚本明毅を中心に，明治初期算術教科書の到達点を見てきた。特に今日の数学教育研究の課題と関連が深いと思われる点に関して，簡単にそれを要約しよう。検討したすべての教科書に共通する特徴について考えることはせず，検討した教科書から今日に活かしうると思われる諸点を，教科書を特定せずに列挙してみる。

① 算術教育が「諸学」との関連で構想され，諸学や現実の中から興味深い問題が選び出されている。

② 数とは何かという，数学としては当時まだ十分な解答が得られていなかった問題に対しても積極的にその解答を見いだそうとしている。

③ 数を小出しにするのではなく，できるだけ広く数を拡張し，しかる後に演算の導入をはかっている。特に 10 進位取り記数法の意義，日本式記数法との異同が十分に意識されている。

④ 演算指導の構成において量と数の関係は，この時期に考え得るぎりぎりの所まで考えられ，区別（「実数」と「虚数」など）と関連（名数×無名数＝名数，など）が演算の定義等に有機的に働いている。

⑤ 検算が重視され，それを通して演算の代数的性質が意識的に適用されている。

⑥ 代数法則が，代数指導に先立って，算術の中で取り上げられている。

⑦ 4 則計算のアルゴリズムを最短の道筋で完成させることが目指されている。

⑧ 教育内容の中心ともいえる「定義」の実質的内容を，授業において生徒に発見させる試みも存在していたことも教科書に示されている。

この時期，最も普及したと思われ，またペスタロッチ主義に基づく教科書として高い評価を受けている(12)師範学校編纂，文部省発行教科書『小学算術書』（1873 年，明治 6 年，『日本教科書大系』第 10 巻所収）について，これまで本研究では全くふれなかった。この教科書と，これまで検討した明治初期算術教科書の到達点とを比較するならば，塚本明毅，中条澄清，永峰秀樹らの教科書の持つ歴史的意義は，あえて検討を要しないほどに明らかである。『小学算術書』は，数学論を欠いた教育方法のひとり歩きの，数学教育への無力さを示す古典的な事例を提供したものといえる。

注

(1) 塚本明毅，前掲書，117 ページ

(2) 同上，121 ページ

(3) 同上，113 ページ

(4) 小倉金之助，前掲書（1 章(3)），223 ページ　その特色を小倉は次のようにまとめている。「われわれは本書に至って，一題目ごとに，次のような順序に循環する排列法に接するのである。①，題目の一般的説述②，例

題によっての方法の詳説③，計算上の練習問題④，文章で述べられた応用問題　実に現代にありては余りに普通なる此の排列法も，日本においてはこの書をもって嚆矢とするかとも思われる。」

(5) M. クライン著，柴田録治訳『数学教育現代化の失敗』，1946年黎明書房，136ページ

(6) 塚本明毅，前掲書，123～124ページ

(7) 東京師範学校による除法九九表（掛け図，1875年，明治8年）が，日本科学史学会編『日本科学技術史大系』8（教育1）1964年，第一法規出版，318ページに掲載されている。なお中条澄清の1888年（明治21年）の著作『小学尋常科筆算書付録　教授要旨』（東書文庫図書室所蔵）に，乗法九九と除法九九の「錯雑」を避けることの必要が説かれている。

(8) 塚本明毅，前掲書，185～186ページ

(9) 同上，129ページ

(10) 同上，132ページ

(11) たとえば岸本量夫『数の体系と代数系』1973年，宝文館出版参照

(12) 『日本教科書大系』近代編第10巻，1962年，講談社，所収教科書解題659～661ページ参照

謝　辞

本稿の作成にあたり，岡野　勉さん（新潟大学教育学部），大田邦郎さん（千葉大学教育学部），佐藤英二さん（日本学術振興会特別研究員，東京大学大学院）の各氏から貴重な助言をいただいた。また亀廼井宏幸さん，堀岡　武さんをはじめとする北大算数教育ゼミナールに属する先生方には，まとまりきらない中間報告を何度もしんぼう強く聞いていただいた上で，多くの助言とはげましをいただいた。ここに謝意を表したい。

本研究は平成8～9年度文部省科学研究費―基盤研究（C）(2)「教科書における科学教材の研究―日本の公教育成立・形成期に限定して―」（研究代表者：須田勝彦）の研究成果の一部である。