中国数学教科書『微積分初歩』の検討

—— 微分と積分の導入及び数値計算を中心に ——

高　橋　哲　男
（北海道大学大学院教育学研究科博士後期課程）

目　次

1 はじめに

本稿では、外国教科書分析の一環として、中国の高級中学（高等学校）用数学教科書『微積分初歩』[1] を検討する。特に、微分と積分の導入及び微分の応用である数値計算に焦点を当てて、日本の教科書との比較を試みる。

わが国における外国教科書の比較研究は多いとは言えず、管見の限りでは教科書研究セン

1）人民教育出版社数学室編『微積分初歩』人民教育出版社、1985 年。

2）教科書研究センター編『教科書からみた教育課程の国際比較』ぎょうせい、1984 年。総論編、国語科編、社会科編、算数・数学科編、理科編、英語科編の 6 巻構成である。

ター編の『教科書からみた教育課程の国際比較』[2] が目立つ程度である。これの算数・数学科編を見ると、そのはしがきには、この研究について、「アメリカ、イギリス、ソ連、西ドイツ、フランスの5か国の初等中等教育諸学校のカリキュラムや教科書その他の関係資料を収集分析し、各国における制度的、社会的諸条件が、その国の教科書の編集方針、記述内容等にどのような影響を及ぼしているかについて比較研究を行ったもの」と書かれている。とりわけ、「第4章　国別にみた調査結果」では、5か国の教科書の、特に図形領域の教育内容に焦点を当てて、特色のある素材とその展開について整理している。

本稿で検討対象とする『微積分初歩』は、日本の教科書よりも論理的構成になっているといえる。例えば、数列の極限については、日本の教科書では、「数列 $\{a_n\}$ において、n が限りなく大きくなるにつれて、a_n が一定の値 α に限りなく近づくとき、数列$\{a_n\}$は α に**収束**するといい、α を数列 $\{a_n\}$ の**極限値**という」[3] のように説明される。「限りなく近づく」という直観に訴える方法を採っているのである。確かに、「限りなく近づく」ということは極限の本質である。しかし、これだけでは、高校生に対する微分・積分指導としては物足りない。その点、『微積分初歩』では、「限りなく近づく」の数学的表現である $\varepsilon - N$ 法を、その言葉こそ示してはいないが、教えているのである。

また、『微積分初歩』には、微分・積分の応用数学としての側面を強調しようという思想が貫かれている。その証拠に、微分・積分が現実のどのような場面で応用され役に立っているかが、折に触れて紹介されている。さらに、練習問題についても、物理や化学など他の学問分野や、現実に発生し得る状況から素材を選んで作成したものがたくさん採用されている。『微積分初歩』がこのように実際問題の解決を重視しているのは、中国の学習指導要領に相当する「教学大綱」の影響と思われる。「教学大綱」には、高等学校数学の教育目的の1つに、「数学の知識を運用して実際問題を分析・解決する能力を形成する」ことが挙げられている。そして、「実際の意義を有するかあるいは学科、生産や日常生活に関係する数学の問題を提出し、分析し、解決することができる」ことが、「実際問題を解決する能力」の1つであるとしている。[4] 生産や日常生活の場で生じる実際問題の解決を重視する、すなわち、数学の応用的側面を強調している点は、「受験のため」ということ以外に「何のために数学を勉強するのか」がわからなくなりつつある現代、見習うべきところであろう。

以上の理由により、『微積分初歩』から学ぶべきことは、決して少なくないと考えている。紙数の関係上、『微積分初歩』のすべてを紹介して日本の教科書と逐一比較を行うことは不可能である。本稿では、微分と積分の導入部分、さらに、微分の応用である数値計算を中心に紹介しながら、日本の教科書との比較・検討をすることにする。比較・検討の対象は、日本の教科書の中で最も論理的に構成されていると筆者が考える、東京書籍の教科書とする。

なお、教科書の引用において強調文字になっている部分は、すべて原文のままである。また、引用中の図や表は、教科書のものを元にしながら、その意図にできる限り忠実に引用者が作成し直したものである。

3) 藤田宏・前原昭二編『数学III』東京書籍、1996年、23頁。
4) 国家教育委員会基礎教育司編『全日制普通高級中学数学教学大綱』人民教育出版社、1996年、1-2頁参照。

2 比　　較

2.1 構　　成

はじめに、『微積分初歩』と日本の教科書の目次を比較してみよう。日本で微分・積分を扱っているのは主に「数学III」である。「数学II」の一部でも扱われてはいるが、「数学II」における微分・積分は、「数学III」の内容の一部を短時間で終えられるようにしたものである。したがって、『微積分初歩』との対応を考えて、東京書籍の教科書『数学III』の目次を見ることにする。

人民教育出版社『微積分初歩』目次

東京書籍『数学III』目次

以上からわかるように、微分と積分では微分が先であり、不定積分と定積分では不定積分が先であるなど、全体の章節構成には大差はない。内容もほぼ同一であるが、『微積分初歩』の方がやや広い内容を盛り込んでいるといえる。例えば、「5.6　回転体の側面積」は、東京書籍の『数学III』にはない内容である。反対に、『数学III』にある、「学習内容を深めるための補助教材」とされている「発展・展望」のような読み物扱いの節は、『微積分初歩』にはない。[5]

なお、『微積分初歩』の目次には、「練習問題」という項目は一切見られないが、もちろん、練習用の問題はいくつも設けられている。1.1, 1.2などの小節毎に「練習」があり、また、ほぼ2つないし3つの小節ごとで区切りのいいところに「練習問題」がある。さらに、各章末には「復習参考問題」が「A組」、「B組」に分けて配置されている。「A組」は「主にその章の知識

5)『数学III』の2章の「発展・展望　導関数と多項式」ではテーラー展開を扱っているが、この内容は、『微積分初歩』にはない。4章の「発展・展望　回転体の体積の計算」の内容は、『微積分初歩』では5.4で扱われている。

を復習するときに使用」するもの、「B 組」は「やや総合性・柔軟性を帯びている」ものとなっている。これらの「練習」や「練習問題」や章末の「復習参考問題」の類は、むろん、『数学III』にも存在しているが、その問題数は比較にならないほど『微積分初歩』の方が多い。『微積分初歩』のまえがきに相当する「説明」には、「本書が準備した練習・練習問題・復習参考問題 A 組の数量はやや多いので、教えるときは実際の状況に即して選んで用いると便利である」と書かれている。また、「練習」の問題は、「主に教室での練習用として」使用し、「練習問題」は「主に教室内外の作業用として」使用するとなっている。練習用の問題の多くは、単純な計算問題で占められている。しかも、複雑に合成を繰り返した関数の微分を求めるなど、単に難しいだけの問題が数多く含まれている。合成関数の微分を計算するアルゴリズムを獲得するだけならば、なにも難しすぎる問題を大量に解かせる必要はないように思われる。ただし、計算問題以外では、現実に発生しそうな状況や、物理学や化学など他の学問分野から素材を選んで問題を作成するなどの工夫も見られる。この点に関しては、「3.4　練習問題の素材と数学教育の目的論」にて検討する。

以上に『微積分初歩』と東京書籍の『数学III』の全体構成について述べてきた。次節では、微分の導入について見てゆく。

2.2　微分の導入

ここでは、(1)微分係数（導数）の導入、(2)微分係数（導数）の意味、(3)微分の導入、の3点に着目しながら、まず、『微積分初歩』を見てゆく。その次に、東京書籍の教科書を見る。ただし、『数学III』の2章1節「1　導関数」を見ると、その冒頭から、

「開区間で定義された関数 $f(x)$ について、極限値

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

が存在するとき、これを $x=a$ における $f(x)$ の**微分係数**といい、$f'(a)$ と表す」(58頁)。

と書かれており、いきなり微分係数の定義から入っていることがわかる。これは、すでに「数学II」の微分・積分分野を学習したことを前提とした記述である。したがって、微分係数を定義するためにどのような概念モデルを用いているかを見るために、東京書籍の教科書『数学II』[6] を参照することにする。

2.2.1　人民教育出版社『微積分初歩』における微分の導入

(1)　**微分係数（導数）の導入**　「2.1　瞬間速度」では、まず、

「物体が等速直線運動をするとき、物体の変位 s と経過した時間 t の比が、物体の運動する速度 v である、すなわち

$$v=\frac{s}{t}$$

であることをわれわれは知っている」(52頁)。

と、等速直線運動に関する知識の確認をしている。次に、不等速直線運動について、

「位置の変化量 Δs と時間の変化量 Δt の比は、この時間内の物体の平均速度 $\bar{v}$、すなわち

6)　藤田宏・前原昭二編『数学II』東京書籍、1996年。

$$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$$

である」(52 頁)。

というように、平均速度の概念を確認している。続いて、自由落下運動を例として、不等速直線運動をする物体のある時刻における「速度」を求める方法を、次のように説明している。

「われわれは、自由落下運動の方程式が

$$s=s(t)=\frac{1}{2}gt^2$$

であり、このなかの g は重力加速度で、通常 $g=9.8\mathrm{m/s^2}$ をとるということを知っている。いま時刻 $t=3$ 秒のときの落体の「速度」を求めよう。

Δt が非常に小さいとき、3 秒から $3+\Delta t$ 秒までの時間内において、落体運動の速さ遅さの変化もまた大きくはない。これにより、この時間内の平均速度を用いて落体の 3 秒のときの「速度」を近似的に反映することができる。Δt が小さければ小さいほど、この近似はより正確になる。いま t を 3 秒からそれぞれ 3.1 秒・3.01 秒・3.001 秒・3.0001 秒・……までにした、各時間内の平均速度を計算して、得られた数を下のように表にしてみよう。

t(s)	s(m)	Δt(s)	Δs(m)	$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}$(m/s)
3	$4.5g$			
3.1	$4.805g$	0.1	$0.305g$	$3.05g$
3.01	$4.53005g$	0.01	$0.03005g$	$3.005g$
3.001	$4.5030005g$	0.001	$0.0030005g$	$3.0005g$
3.0001	$4.500300005g$	0.0001	$0.000300005g$	$3.00005g$
…	…	…	…	

上の表からわかるとおり、平均速度 $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ は Δt の変化に従って変化し、Δt が小さければ小さいときほど、$\frac{\Delta s}{\Delta t}$ は 1 つの値——$3g$ に近づく。この値はすなわち $\Delta t \to 0$ のときの $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ の極限である。われわれはこの極限を落体の $t=3$ 秒における速度 (**瞬間速度**ともよぶ) と規定し、v で表す」(53-54 頁)。

以上のようにして、瞬間速度を定義している。続いて、これらをふまえて、「2.2 導数」において、平均変化率と、日本でいう「微分係数」に相当する「導数」を以下のように定義している。

「関数 $y=f(x)$ が $x=x_0$ とその付近で定義されているとする。変数 x が x_0 で変化量 Δx (Δx は正でも負でもよい) をとるとき、関数 y の対応する変化量は

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

である。この 2 つの変化量の比

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

を関数 $y=f(x)$ の x_0 から $x_0+\Delta x$ までの間の**平均変化率**という。

$\Delta x \to 0$のとき、$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ が極限をもつならば、関数 $y=f(x)$ は x_0 で可導であるといい、あわせてこの極限を $f(x)$ の x_0 における**導数**とよび、 $f'(x_0)$ あるいは $y'|_{x=x_0}$ と書く。すなわち

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \tag{1}$$

である」(56頁)。

(2) **微分係数(導数)の意味** 「2.3 導数の幾何学的意味 接線方程式と法線方程式」では、図を利用しながら導数の幾何学的意味を次のように説明している。

「図2-1のように、曲線 C は関数 $y=f(x)$ のグラフであるとする。曲線 C 上にある点 $P(x_0, y_0)$ 及び点 P 付近の任意の点 Q $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ をとり、P, Q を通る割線を引く。あわせて $MP \perp Ox$, $NQ \perp Ox$, $PR \perp NQ$ とする。また割線 PQ の傾斜角を β とすると、

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\tan QPR=\tan\beta$$

である。これはすなわち、$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ は割線 PQ の傾斜率であるということである。

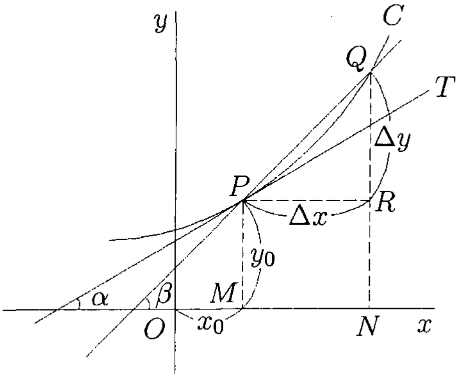


図2-1

点 Q が曲線 C に沿って点 P に無限に近づく、すなわち $\Delta x \to 0$ のとき、割線 PQ は点 P にまとわりつきながら動くが、その極限の位置 PT を曲線 C の点 P における**接線**とよぶ。このときもし関数 $y=f(x)$ が x_0 で可導ならば、$\Delta x \to 0$ のとき、$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \to f'(x_0)$ であ $\tan\beta$ は PT の傾斜率 $\tan\alpha$ (α は PT の傾斜角) を極限とする。したがって

$$f'(x_0)=\tan\alpha$$

である。これにより、**関数 $y=f(x)$ の x_0 における導数 $f'(x_0)$ の幾何学的意味は、曲線 $y=f(x)$ の点 $(x_0, f(x_0))$ における接線の傾斜率である**」(59-60頁)。

導数の幾何学的意味に関する記述はこれだけであるが、さらに、「導数概念をさらによく理解し応用するために」(63頁)、不均等変化の変化率の例として、瞬間仕事率と瞬間電流強度について解説している。例えば、瞬間仕事率については、次のように書かれている。

「仕事率は仕事の効率を表す。物体のある時間内における仕事 ΔW とこの時間 Δt の比 $\dfrac{\Delta W}{\Delta t}$ は、まさにこの時間内の(平均)仕事率である。もし物体のする仕事が時間の増加に従って均等に変化するならば、この比はある定数であり、この定数こそが任意の時刻の仕事率である。しかし、もし物体のする仕事の時間に沿った変化が不均等なものならば、$\dfrac{\Delta W}{\Delta t}$ はただある時間内の平均仕事率を表示しているにすぎない。したがって、任意の時刻 t_0 における仕事率を求めることとは、$[t_0, t_0+\Delta t]$ 内の平均仕事率 $\dfrac{\Delta W}{\Delta t}$ の $\Delta t \to 0$ のときの

極限――瞬間仕事率を求めることなのである」(63頁)。

(3) **微分の導入**　導数の導入までは以上のような流れであるが、微分の概念についてはどうなのであろうか。これについては、「2.15　微分の概念」で扱われている。まず、辺の長さが x の正方形の鉄片を加熱して、加熱後に辺の長さが Δx 増加したときの鉄片の面積の増加量を求める実例を、以下のように分析している。

「加熱前の鉄片の面積は $y=f(x)=x^2$ であり、辺の長さが Δx 増加したとき、鉄片の面積の増加量は関数 $f(x)$ の変化量

$$\begin{aligned}\Delta y&=(x+\Delta x)^2-x^2\\&=x^2+2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2-x^2\\&=2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2\end{aligned}\tag{1}$$

である」(107頁)。

このようにして、結局は、(a) Δy は $2x\Delta x$ と $(\Delta x)^2$ という2つの部分からなっていること、(b) $(\Delta x)^2$ は $2x\Delta x$ と比べて非常に小さい、すなわち、$2x\cdot\Delta x$ が Δy の主要部分であること、したがって、(c) $2x\Delta x$ を $y=x^2$ の変化量 Δy の代替と考えることができ、かつその計算は比較的簡便でありまた一定の精度を有することが、順に述べられている。そして、

「一般に、関数 $y=f(x)$ が x で可導ならば、$y=f(x)$ の x における導数 $f'(x)$ と変数の変化量 Δx の積を関数 $y=f(x)$ の x における変化量 Δx に関する**微分**、簡単には関数 y の微分といい、dy と書く。すなわち

$$\boldsymbol{dy=f'(x)\Delta x}$$

である」(108頁)。

と、微分の定義がなされている。その上で、「このように、比較的複雑な Δy の計算を dy の計算に転化することができる。すなわち導数値 $f'(x)$ を求めてさらに Δx をかけるだけでよい」(108頁)と述べている。また、微分の幾何学的意味についても図を用いて、以下のように説明している。

「関数 $y=f(x)$ が x で可導であるとする。図2-5のように、$y=f(x)$ が表示する曲線上の点 $P(x, y)$ 及びその近くの点 $P'(x+\Delta x, y+\Delta y)$ をとり、点 P 及び P' を通り x 軸に垂直な MP 及び $M'P'$ を引き、それぞれが x 軸と交わる点を M 及び M' とし、点 P を通り x 軸に平行な直線が $M'P'$ に交わる点を N とする。また曲線 $y=f(x)$ の点 P における接線を引き、それが $M'P'$ と交わる点を T とする。すなわち

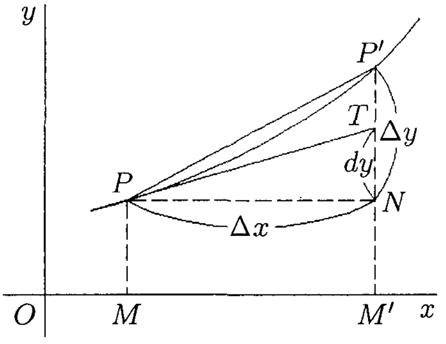


図2-5

$$PN=\Delta x,\qquad NP'=\Delta y,$$
$$NT=f'(x)\Delta x=dy$$

である。したがって、**変数の変化量を Δx とするとき、Δy は曲線の縦座標の変化量であり、Δy は接線の縦座標の変化量である。**これがまさに関数の微分の幾何学的意味である」(110頁)。

そして、「この種のある一定の条件下で直線をもって曲線の替わりとする方法は微分と積分において常用する典型的方法である」(110頁)と述べて、「2.15　微分の概念」を結んでいる。

2.2.2 東京書籍『数学II』における微分の導入

以上で『微積分初歩』における微分の導入までの流れを見てきた。これを、『数学II』の記述と比較してみる。結論を先に言うと、微分係数の導入とその意味の解説までは、『微積分初歩』とほぼ同様の流れが取られている。

(1) 微分係数（導数）の導入　4章1節「微分係数と導関数」の「1　平均変化率」では、初めに、自由落下する物体の速さを求めようとすることから、以下のように平均速度と瞬間速度の概念を確認している。

「物体が自由落下するとき、落ちはじめてから t 秒間に落下する距離を sm とすると、t と s との間にはおよそ

$$s=4.9t^2$$

という関係がある。この関数を $s=f(t)$ とすると、たとえば落下後、2秒から3秒までの物体の“平均速度”は

$$\frac{f(3)-f(2)}{3-2}=\frac{4.9\times(3^2-2^2)}{3-2}=24.5(\mathrm{m}/秒)$$

である。一般に、$t\neq2$として

$$v=\frac{f(t)-f(2)}{t-2}=\frac{4.9(t^2-2^2)}{t-2}$$

$$=4.9(t+2)(\mathrm{m}/秒) \qquad (1)$$

は、落下後2秒から t 秒までの間の平均速度を表している。

この平均速度 v は t の値によって変化するが、経過時間 $t-2$ を0に近づけたときの v の近づく値は、落下する物体の2秒後の“瞬間の速度”を表している。$t-2$ を0に近づけることは、t を2に近づけることであり、そのとき

$$v=4.9(t+2)$$

は、$4.9\times(2+2)=19.6$ に近づく。

t	1.9	1.99	1.999	1.9999	…	2	…	2.0001	2.001	2.01	2.1
v	19.11	19.551	19.5951	19.59951	…	19.6	…	19.60049	19.6049	19.649	20.09

」(120頁)。

上のことをふまえながら、今度は、一般の関数における平均変化率と微分係数を以下のように定義している。まず、平均変化率については、次のように述べている。

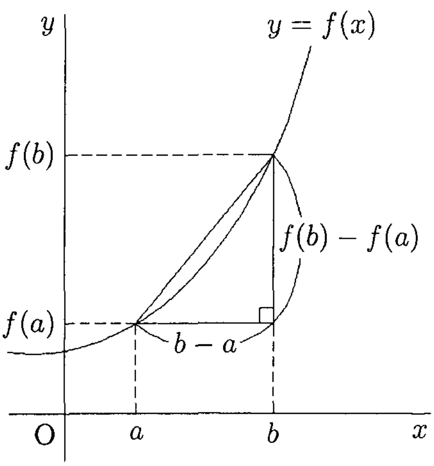
「関数 $y=f(x)$ において、x の値が a から b まで変化すれば y の値は $f(a)$ から $f(b)$ まで変化する。この

y の変化量 $f(b)-f(a)$と

x の変化量 $b-a$

との比

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



を、x が a から b まで変わるときの、または、単に a から b までの、関数 $y=f(x)$ の**平均変化率**という」(121 頁)。

そして、微分係数については、次のように定義している。

「関数 $y=f(x)$ の、a から $a+h$ までの平均変化率

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

において、h を限りなく 0 に近づけたとき、この平均変化率がある値に限りなく近づくならば、その極限値を

関数 $y=f(x)$ の $x=a$ における**微分係数**

といい、$f'(a)$ で表す」(123 頁)。

(2) **微分係数(導数)の意味**　微分係数の幾何学的意味である接線の傾きとの関係については、『微積分初歩』と同様に述べられている。

「グラフ上に、x 座標がそれぞれ a, $a+h$ である点 P, Q をとると

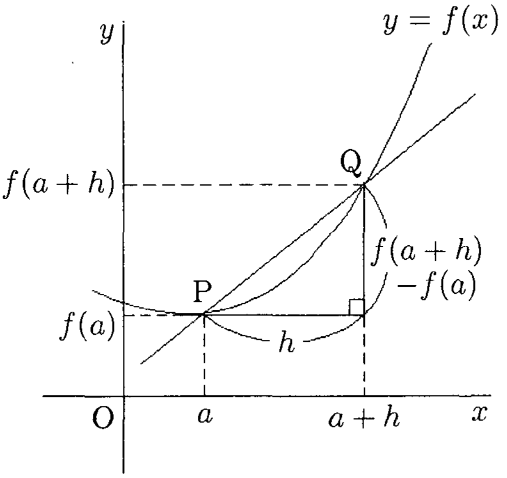
$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

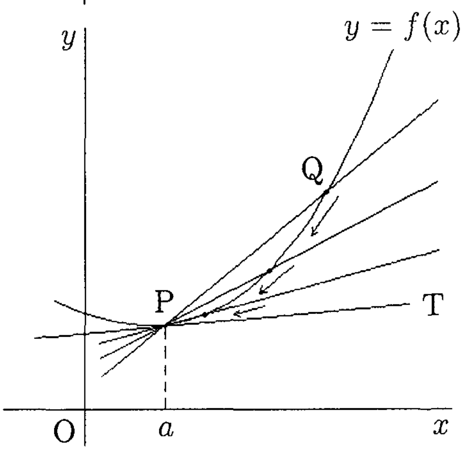
は直線 PQ の傾きを表している。

いま、h を 0 に近づけると、点 Q はグラフ上を動いて限りなく点 P に近づく。このとき、

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$

であるから、直線 PQ は、点 P を通る傾き $f'(a)$ の定直線 PT に限りなく近づく。この定直線 PT を点 P における曲線 $y=f(x)$ の**接線**といい、点 P を**接点**という」(124 頁)。





そして、微分係数と接線の傾きの関係について、「曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における**接線の傾きは微分係数 $f'(a)$ である**」(125 頁)とまとめている。

(3) **微分の導入**　ここでは、微分そのものに関する記述を見るべきところであるが、驚いたことに、『数学II』『数学III』ともに微分の定義はない。「微分係数」や「導関数」、あるいは「微分する」の定義はあるが、微分については書かれていないのである。本稿では、東京書籍の教科書が微分を扱っていないことは大きな問題点であると考え、微分の概念の重要性及びその指導の必要性について、次章の一部で論じる。

2.3 数値計算

本節では、微分の応用である数値計算について見てゆく。

2.3.1 人民教育出版社『微積分初歩』における数値計算

「2.17 近似計算」には、次のように書かれている。

「Δx が非常に小さいとき、微分 dy を用いて関数 $y=f(x)$ の変化量 Δy を近似的に代替することができる。x_0 において、

$$dy=f'(x_0)\Delta x,$$
$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

であり、ここにおいて

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x$$

であり、これを下のように書き改めて、

$$\boldsymbol{f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x} \tag{1}$$

を得る[7]。もし $x_0+\Delta x$ を x と書くとすると、$\Delta x=x-x_0$ であるから、(1)式は

$$\boldsymbol{f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)} \tag{2}$$

と書くこともできる。

関数 $y=f(x)$ のある x における値を知りたいが、しかしこの値を求めるのは容易ではない。ただし x 付近の x_0 において、$f(x_0)$ と $f'(x_0)$ の値はともに容易に求められるとしよう。このとき、(2)式（あるいは(1)式）を利用して $f(x)$ の近似値を求めていこう。注意することはこのなかで $|x-x_0|=|\Delta x|$ が非常に小さい必要があるということであり、$|x-x_0|$ が小さければ小さいほど、近似の程度もよりよいのである」（113頁）。

この後、sin46° の近似値を求める例を説明し、さらに、上の近似式(2)の幾何学的意味を次のように述べている。

「(2)式のなかの x を変数とみなせば、(2)式の右辺は x の一次関数である。さらにいえば、$|x-x_0|$ が非常に小さいとき、一次関数 $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ を用いて関数 $y=f(x)$ を近似的に表示することができるのである。幾何学的に見ると、点 (x_0, y_0) 付近では、曲線 $y=f(x)$ 上の点 (x_0, y_0) における接線 $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$ を用いて曲線 $y=f(x)$ を近似的に表示することになるのである」（114頁）。

そして、近似式(2)に $x_0=0$ を代入して得られる

$$f(x)\approx f(0)+f'(0)x$$

を利用して、$|x|$ が十分に小さいときに有効な以下の4つの近似公式

$$\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{x}{2},\qquad \ln(1+x)\approx x,\qquad e^x\approx 1+x,\qquad \tan x\approx x$$

を証明している。この後、上の近似公式を用いて解く例題と練習問題を与えている。

2.3.2 東京書籍『数学III』における数値計算

前節「微分の導入」のところでは、東京書籍の教科書は『数学II』を見てきたが、『数学II』では数値計算は扱われていない。したがって、ここでは、『数学III』の教科書を見ることにする。

---

7) 〔引用者註〕『微積分初歩』のなかには、記号≈の定義は書かれていない。

数値計算は、「３章　微分の応用」の「２節　いろいろな応用」の「４　近似式」で扱われており、次のように書かれている。

「関数 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数は

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

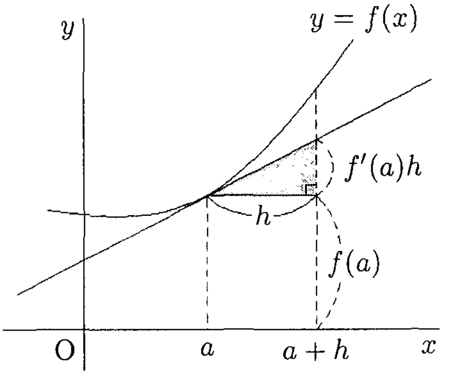
であるから、h が十分 0 に近いときは

$$f'(a)\fallingdotseq\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

すなわち

$$f(a+h)\fallingdotseq f(a)+f'(a)h$$

と考えられる。この式で、とくに $a=0, h=x$ とすれば、x が 0 に近いとき次の近似式が得られる。



$$f(x)\fallingdotseq f(0)+f'(0)x$$ 」(111 頁)。

この後、１つの例題といくつかの問いを設けて、近似値計算の練習をさせている。

2.4　積分の導入

すでに目次の紹介のところで述べたとおり、『微積分初歩』も日本の教科書も、不定積分先習である。本節では、(1)原始関数と不定積分の導入、(2)定積分の導入、(3)不定積分と定積分の関係、の 3 点に関する記述に着目しながら見てゆく。

2.4.1　人民教育出版社『微積分初歩』における積分の導入

(1)　**原始関数と不定積分の導入**　「第 4 章　不定積分」の「4.1　原始関数」の書き出しは次のようになっている。

「物体運動の位置関数が

$$s=s(t)$$

であるとする。位置関数の時間に対する導数[8]を求めると、速度関数 $v(t)$ が得られる。すなわち

$$s'(t)=v(t)$$

である。

実践において、反対の問題の解決が求められることがある。物体運動の速度関数を $v(t)$ とするとき、位置関数 $s(t)$ をいかに求めるかということである。一般にいうと、ある関数の導数を知っているときに、この関数をいかに求めるかということである。下にこの類の問題を研究していこう。

$f(x)$ を区間 I 上で定義された 1 つの関数であるとするとき、関数 $F(x)$ が存在して、区

8)〔引用者註〕ここでいう導数とは、導関数の意味である。というのは、すでに本稿 2.2.1(1)で紹介したように、『微積分初歩』では、日本でいう微分係数のことを導数とよんでいる。しかし、『微積分初歩』では、同時に、導関数のことを導数とよぶこともあり、次のような注意がなされている。「導関数を簡単に導数ということもある。今後、ある点における導数を求めよと特別に指示をしていないならば、導数を求めるとは導関数を求めることを指すものとする」(58 頁)。

間 I 上の任意の x に対してすべて

$$F'(x)=f(x)$$

となるならば、$F(x)$ を関数 $f(x)$ の区間 I 上の1つの**原始関数**とよぶ」(181頁)。

この後、原始関数に関する重要な性質である次の定理を証明している。

「定理　$F(x)$ を関数 $f(x)$ の区間 I 上の1つの原始関数であるとするとき、任意の定数 C に対して、

(1)　$F(x)+C$ も $f(x)$ の原始関数である。

(2)　$f(x)$ の区間 I 上の任意の原始関数はすべて $F(x)+C$ の形式で表示することができる」(182頁)。

この定理の意味は、「$F(x)$ が関数 $f(x)$ の1つの原始関数であるならば、$F(x)+C$ もまた関数 $f(x)$ の原始関数であり、かつあらゆる原始関数はみな C を任意の定数とする $F(x)+C$ の形式で表示することができる」(183頁) ということである。

そして、「4.2　不定積分」において、不定積分を次のように定義している。

「$F(x)$ を関数 $f(x)$ の1つの原始関数とするとき、関数 $f(x)$ のあらゆる原始関数 $F(x)+C$ (C は任意の定数) を関数 $f(x)$ の**不定積分**とよび、$\int f(x)dx$ と書く。すなわち

$$\int f(x)dx=F(x)+C$$

であり、その中の $\int$ を**積分記号**、$f(x)$ を**被積分関数**、x を**積分変数**、$f(x)dx$ を**被積分式**、C を**積分定数**とよぶ。既知の関数の不定積分を求める過程のことをこの関数を**積分する**とよぶ」(183頁)。

(2)　**定積分の導入**　続いて、「5章　定積分及びその応用」における定積分の導入部分を見てみよう。「5.1　定積分の概念」では、定積分の導入として、曲辺台形[9]の面積と変速直線運動の移動距離を求める事例を解説している。さらに、「[これらの事例の——引用者] 実際の意味は同じではないにも拘わらず、問題を解決する方法と計算のステップは完全に同じものである」(219頁) と述べている。その上で、以下のように定積分を定義している。

「この類の問題を解決する一般思想を抽象すると、定積分の概念が導かれる。関数 $f(x)$ が区間 $[a, b]$ 上で連続ならば、分点

$$a=x_0<x_1<\cdots x_{i-1}<x_i<\cdots<x_n=b$$

を用いて区間 $[a, b]$ を n 個の小区間に等分する。それぞれの小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ 上に任意の点 $\xi_i(i=1, 2, \cdots, n)$ をとり、和の式

$$I_n=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x \qquad \text{(その中の } \Delta x \text{ は小区間の長さ)}$$

を作る。$n\to\infty$ すなわち $\Delta x\to 0$ のとき、和の式 I_n の極限を関数 $f(x)$ の区間 $[a, b]$ 上の**定積分**とよび、

$$\int_a^b f(x)dx$$

と書く。すなわち

9) 『微積分初歩』では、「曲辺台形とは3つの直線 $x=a$, $x=b$, $y=0$ と1つの曲線 $y=f(x)$ が囲んでできる図形を指す」(213頁) と説明されている。ただし、この用語が中国の数学教育において常用されているのかどうかについてはわからない。

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x$$

である。この中の、a と b をそれぞれ**積分下限**と**積分上限**とよび、区間 $[a,b]$ を**積分区間**、関数 $f(x)$ を**被積分関数**、x を**積分変数**、$f(x)dx$ を**被積分式**とよぶ」(219-220 頁)。

(3) **不定積分と定積分の関係** 不定積分と定積分の関係については、「5.2 微積分の基本公式」で扱っている。変速直線運動の移動距離を求めることを例にしながら、不定積分と定積分の関係を表現する、以下のニュートン―ライプニッツの公式を証明している。

「定理 $f(x)$ が区間 $[a,b]$ における連続関数であり、$F(x)$ が関数 $f(x)$ の区間 $[a,b]$ における任意の原始関数である、すなわち $F'(x)=f(x)$ ならば、

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)}$$

である」(223 頁)。

以上が、『微積分初歩』における不定積分と定積分、及びそれらの関係を扱った部分である。

2.4.2 東京書籍『数学II』における積分の導入

続いて、東京書籍の教科書の対応部分を見てゆく。微分の場合と同様の理由により、ここでも『数学II』の教科書を参照する。

(1) **原始関数と不定積分の導入** 原始関数と不定積分を説明する部分の冒頭は、次のようになっている。

「関数 $f(x)$ が与えられたとき、微分して $f(x)$ になる関数、つまり

$$F'(x)=f(x)$$

を満たす関数 $F(x)$ を、関数 $f(x)$ の**原始関数**という」(144 頁)。

そして、原始関数と不定積分の関係については、「$f(x)$ の原始関数を**不定積分**ともいう」(144 頁) とだけ述べられている。

(2) **定積分の導入** 次に、定積分についてであるが、「曲辺台形」の面積を求める例を概念モデルとしているという点では『微積分初歩』と同じであるものの、その説明の仕方は大きく異なっている。したがって、この部分は次章の考察においても重要であるため、かなり長い範囲ではあるが、全文引用しておく。

「いま、区間 $a\leq x\leq b$ において

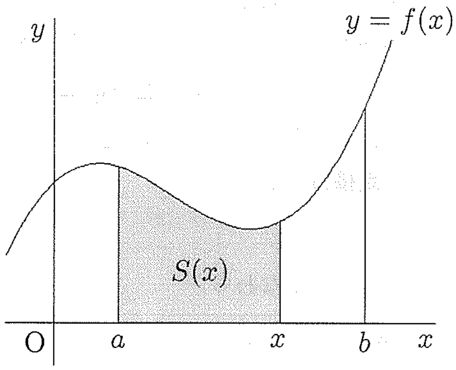
$$f(x)\geq 0$$

とし、曲線 $y=f(x)$ と x 軸の間にある図形の、x 座標が a から x までの部分の面積を $S(x)$ とする。

x の増分 Δx に対する $S(x)$ の増分を ΔS とすると

$$\Delta S=S(x+\Delta x)-S(x)$$

であり、$\Delta x>0$ のとき、ΔS は x から $x+\Delta x$ の区間において、曲線 $y=f(x)$ と x 軸との間にある図形の面積である。図か



らもわかるように

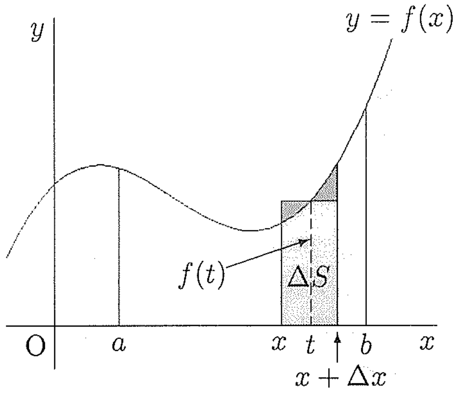
$$x \leqq t \leqq x+\Delta x$$

である t を適当にとると

$$\Delta S = f(t)\Delta x \quad すなわち、\frac{\Delta S}{\Delta x} = f(t)$$

と表される。ここで、Δx を限りなく 0 に近づけると、t は x に限りなく近づくから、$f(t)$ は $f(x)$ に限りなく近づく。よって

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = f(x) \qquad (1)$$



$\Delta x < 0$ のときにも、同様にして(1)が成り立つことがわかる。ゆえに、

$$\frac{dS}{dx} = S'(x) = f(x)$$

すなわち、$S(x)$ は $f(x)$ の原始関数になっている。

いま、$f(x)$ の原始関数 $F(x)$ があらかじめわかっているとすると、ある定数 C を用いて

$$S(x) = F(x) + C \qquad (2)$$

となる。(2)で $x=a$ とおくと、$S(x)$ の意味により $S(a)=0$ であるから

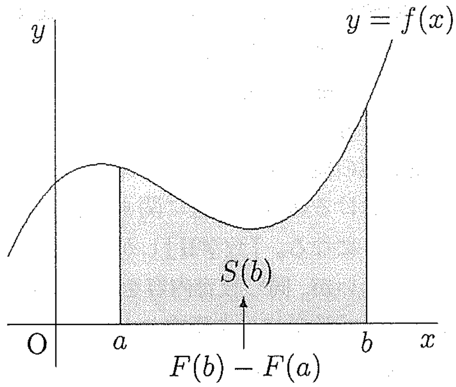
$$F(a) + C = 0$$

よって、

$$C = -F(a)$$

これを(2)に代入すると

$$S(x) = F(x) - F(a)$$



この式で $x=b$ とおくと、$S(b)=F(b)-F(a)$ が得られる。

$S(b)$ は上の図の斜線部分［陰影部分――引用者］の面積であり、この面積が

$$F(b) - F(a)$$

で求められたことになる」(148-149 頁)。

そして、定積分を以下のように定義している。

「関数 $f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)$ とするとき $\boldsymbol{F(b)-F(a)}$を、$f(x)$ の a から b までの**定積分**といい

$$\int_a^b f(x)dx$$

で表す。a をこの定積分の**下端**、b を**上端**とよぶ。また、この定積分を求めることを、$f(x)$ を $\boldsymbol{a}$ **から** $\boldsymbol{b}$ **まで積分する**という」(150 頁)。

(3)　**不定積分と定積分の関係**　不定積分と定積分の関係については、上の定積分の定義以外には特に目立った記述はない。

3 考　　察

3.1 微分の導入について

『微積分初歩』における微分係数（導数）の導入とその意味に関する記述を整理してみると、次のようになる。すなわち、導数の導入においては、物体の運動という物理現象を概念モデルにしていることがわかる。さらに言えば、等速直線運動から始めて、不等速運動における平均速度、不等速運動における瞬間速度へという順をたどっている。既知のものから未知のものへと、１段階ずつステップを踏んでいるといえる。そして、これらの物理現象を一旦離れて関数の導数を定義した後に、その幾何学的意味である接線の傾きとの関係を示している。さらに、もう一度瞬間仕事率や瞬間電流強度という実際の問題に立ち返っているのである。

一方、『数学II』では、『微積分初歩』とほぼ同様の流れをとっていたものの、微分係数や導関数の数学的定義の後に再び運動以外の物理現象に触れるようなことはなかった。導関数が定義されて、それに関する性質が述べられているだけである。ただし、『数学III』では、微分係数や導関数を教えたあとの「微分の応用」の章に、「速度・加速度」という節を設けている。ここでは、直線上の点の運動を例として、時刻 t から $t+\Delta t$ までの「平均速度の $\Delta t \to 0$ のときの極限値を、時刻 t における点Ｐの**速度**という」(112頁)と、速度の定義がなされている。[10]すでに学んだ微分係数の概念を用いて、速度を定義しているのである。

しかし、翻って考えてみれば、『数学II』においては、速度の概念を頼りにしながら微分係数の概念を導いていた(本稿 2.2.2(1)参照)。すなわち、速度という言葉を無定義に使用し、それと極限値の概念を用いて微分係数を定義したのである。したがって、『数学III』の「速度・加速度」における速度の定義に関する記述内容は、その論理構成が『数学II』のそれと一致していないことになる。『数学II』しか学ばない文系の学生にとってはそれほど大きな問題ではないかもしれないが、同じ教育内容をもつ２つの教科書の論理構成が一致していないことにより、『数学II』と『数学III』を両方とも学ぶであろう理系の学生は混乱するかもしれない。しかし、論理構成の不一致の問題は、一方の記述を他方に合わせれば済むような簡単な問題ではない。『数学II』のように具体的事実を頼りにして数学的概念を導くか、『数学III』のように数学的概念を用いて具体的事実を説明するかということ自体が、数学教育上の大きな課題なのである。通常は、具体的事実から数学的概念を導く『数学II』の方法が良いとされるかもしれない。実際の指導場面でも、そちらの流れの方が多く見られるだろう。しかしながら、『数学III』のような流れはまったく必要ではない、ということにもならないと考えられる。例えば、大学生がペアノの公理系を学び、「これまで知っていた自然数とは、実はこういうものだったのか」と再認識することにも、十分に意義があるといえよう。結局のところ、『数学II』の流れと『数学III』の流れのうちどちらが良いかは、決して二者択一の問題ではない。玉虫色の答になるが、どちらも重要であるとしかいえないのである。したがって、論理構成の不一致から学ぶべきことは、それを一致させる必要があるということではなく、そもそも、微分・積分の内容を「数学II」と「数学III」に分割する必要などはないということであろう。事実、「数学II」にはなく「数学III」だけに含まれている教育内容のなかに、文系学生にも必要なものも含まれていると考えられる。

---

10) 他にも、「速度 v の時刻 t における変化率を**加速度**という」(112頁)とある。しかし、すでに微分係数や導関数が定義されているのであるから、「変化率」という言葉を使う必要はないだろう。

例えば、三角関数や指数関数・対数関数の微分や積分である。「数学II」で実際に微分・積分される関数は、べき関数とその整数倍、及びそれらの和に限られている。すなわち、大多数の文系学生は、同じ「数学II」で三角関数や指数関数・対数関数を学んでいるにも拘らず、微分や積分することができるのは x^n 型の関数しかないと考えてしまう危険性がある。三角関数や指数関数・対数関数は物理現象や自然現象の場に多く現れるため、これらの微分や積分は、理系の学生に限らず文系の学生にとっても重要な教育内容である。以上のことから、とりあえずは、「文系向け」「理系向け」といった形容詞のつかないような微分・積分指導を目指すべきであろう。文系学生にとって授業時間数の制約があるならば、理系学生と同じ内容のうちの一部だけを学べばよい。

また、東京書籍の教科書で微分が扱われていない[11]ことについてであるが、微分を扱っていないことがなぜ問題かということの理由は、「微分」と名のつく章で「微分」を教えていないからだという単純な話ではない。その理由は、微分係数をなぜ「微分係数」とよぶかを考えてみればヒントが得られる。微分係数と微分の定義からわかるように、$x=x_0$ における「微分係数」$f'(x_0)$ は、確かに、「微分」$f'(x_0)\Delta x$ の Δx に対する「係数」になっている。「微分係数」という名称は、ここからきていると考えられる[12]。すなわち、微分は、微分係数に x の微少な変化量である Δx をかけたものである。このように単純な形式で書かれる微分の概念が用いられるのは、それが、x の微少な変化量に対応する y の微少な変化量 Δy の近似値となるからである。例えば、『微積分初歩』で取り上げられた鉄片の加熱の例（本稿2.2.1(3)参照）でいえば、鉄片の面積の増加量を正確に求めようとすれば、$\Delta y=2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2$ を計算しなければならない。ところが、Δx が非常に小さいとき、$(\Delta x)^2$ は Δx に比べてさらに小さいためこれを無視することができる。このようにして、微分 $dy=2x\cdot\Delta x$ の概念が得られ、微分 dy は実際の変化量 Δy の近似値となることがわかる。東京書籍の教科書には、以上のようなことの記述が決定的に欠けている。微分は、関数の変化量の近似値という量としての側面をもっているのである。この点を強調すれば、教科書において少なくとも以下の2点が改善されると考えられる。第1に、合成関数の微分法の理解がたやすくなるということであり、第2に、現行の「数学C」で扱われている「数値計算」を微分・積分とのつながりから学習することが可能になるということである。このうち、数値計算については次節で触れる。以下では、合成関数の微分法について論じていこう。

「微分は関数の変化量の近似値を表現したものである」という点を重要視しないことは、Δy と dy の違いを重要視しないことである。実は、これと同様に、『数学II』では、Δx と dx の違いについてもまったく配慮されていない。『数学II』で dx が最初に出てくるのは「関数 $y=f(x)$ の導関数を表すには、$f'(x)$ のほかに $y', \dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d}{dx}f(x)$ などの記号も用いられる」(127頁)という場面である。このように、dx はどの変数で微分したかを示すだけの記号として導入されており、量に基づいた意味については触れられていない。この点に関する不十分さは『微積分

11) 高等学校の教科書には微分の説明がないが、大学生向けのテキストでは微分を扱っているものもある。例えば、有馬哲・浅枝陽『演習詳解微積分I』東京図書、1981年、45頁では、図を添えて微分を説明している。

12) 「微分」(それは扱われていなかったのであるが) の前に「微分係数」という名称が出てくるのは順序として不自然である。『微積分初歩』にある「導数」の名称の方が、導関数との関係を考えてもふさわしいと思われる。

初歩』にも見られ、「通常、変数の変化量 Δx を dx、すなわち $dx=\Delta x$ と書き、変数の微分という」(109頁) と記述されている。確かに、$dx=\Delta x$ は常に成立するためやっかいではあるが、両者の関係は「Δx を dx と書く」という性質のものではない。dx は微分の定義に基づいて定められるものであり、関数 $y=x$ の x に関する微分である。これらの事実は、明確に記述されなければならない。そして、どの変数で微分したのかを示す単なる記号として dx や dy を導入するのではなく、その量的意味を明らかにすることは、合成関数の微分法のところでも一定の役割を担うはずである。というのは、いくつかの条件下で合成関数の導関数を求める公式として、$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$ がある。この公式は、分数の性質から一見明らかなように見える。しかし、すでに述べたように、教科書の記述によれば、dy や dx、du は「どの変数について導関数を求めたのか」を表現する記号としてしか認識されにくい。そのため、公式は、記号を記号で割ったり、あるいは、記号に記号をかけたような不可能なものになってしまう。結果として、合成関数の導関数を求める公式は暗記の対象物となってしまい、「計算はできるが、何をしているかわからない」といった学習者を生み出している。「関数 y に対して x に関する導関数を求める」という操作を施して得られた新しい概念につける記号は、x と y さえ出てくれば他のどのような形式でも良かったはずである。それにも拘らず、$\frac{dy}{dx}$ を用いるのは、導関数 $\frac{dy}{dx}$ がまさに、関数の微分 dy を変数の微分 dx で割った商だからである。導関数を微分商ともよぶゆえんである。こうした導関数の商としての意味に触れることは、合成関数の導関数の公式に具体的意味を与え、合成関数の微分法の理解を助けることになる。したがって、どの変数で微分したのかを表現するだけの記号として dx や dy を導入するのではなく、その量的意味を明確にするべきである。

3.2 数値計算について

微分の応用である近似計算の頁では、『微積分初歩』、『数学III』とも、「h が 0 に近いとき、$f(a+h)\fallingdotseq f(a)+f'(a)h$」を用いた近似値計算の方法を教えていた。ただし、『微積分初歩』が約5頁を割いているのに対して、『数学III』はわずか1頁であった。具体的記述を詳しく見ても、『微積分初歩』の方が丁寧に書かれており、質・量ともに上回っているといえる。例えば、『微積分初歩』には、「関数 $y=f(x)$ のある x における値を知りたいが、しかしこの値を求めるのは容易ではない。ただし x 付近の x_0 において、$f(x_0)$ と $f'(x_0)$ の値はともに容易に求められるとしよう」と書かれており、近似値計算を行う状況と条件を示している。また、「注意することはこのなかで $|x-x_0|=|\Delta x|$ が非常に小さい必要があるということであり、$|x-x_0|$ が小さければ小さいほど、近似の程度もよりよいのである」と、近似の精度に関する記述がある。これらは、『数学III』には見られないものである。そして、最も優れているのは、近似式の幾何学的意味についての次の記述である。「$|x-x_0|$ が非常に小さいとき、一次関数 $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ を用いて関数 $y=f(x)$ を近似的に表示することができるのである。幾何学的に見ると、点 (x_0, y_0) 付近では、曲線 $y=f(x)$ 上の点 (x_0, y_0) における接線 $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$ を用いて曲線 $y=f(x)$ を近似的に表示することになるのである」。この記述がなぜ優れているかといえば、近似値をもって実際の値の代替とするという近似の思想が、微分の幾何学的意味とともに表現されているからである。上の近似式を導く基礎となっている微分は、Δx の一次関数で表

現されるという特徴をもっている。関数の変化の様子を一次関数の概念を通して探るという意味が、微分にはあるのである。既知の概念を用いて真実の量に迫ろうとする近似の思想と方法の指導は、数学教育の課題の１つであろう。近似値計算は、それに最も適した教材であり、『微積分初歩』にあるような丁寧な展開が必要である。

もっとも、現行の「数学Ｃ」における「数値計算」でも近似値計算が教えられている。これを含めれば、近似値計算の面では、日本の教科書の方が『微積分初歩』より充実しているともいえる。東京書籍の教科書『数学Ｃ』[13]の「数値計算」では、ニュートン法や、面積を求めるための区分求積法が教えられている。このうち、ニュートン法は、微分係数を用いて方程式の解を近似的に求めてゆく方法であり、微分の応用として教える意義は十分にあるが、『微積分初歩』では扱われていない内容である。『数学Ｃ』では、まず、ニュートン法の導入として、$\sqrt{3}$ の近似値を知るために、方程式 $x^2-3=0$ の解を求める例を具体的に説明している。その次に、もっと一般的な方程式の近似解の求め方を解説し、「方程式 $f(x)=0$ において、適当な初期値 x_1 から始めて $\boldsymbol{x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$ によって次々に解の近似値を得ることができる」（98頁）と結論している。その上で、次の小節「ニュートン法の利用」において、BASIC 言語を用いてコンピュータ・プログラムを作成し、いくつかの方程式の解を近似的に求める練習をしている。このように、最初に具体例を示し、次に一般的な数学的概念の定義を行い、最後に再び具体的・実践的な課題に戻るという流れは、『微積分初歩』に見られたものと同じであり、評価できるものといえる。特に、『微積分初歩』にはコンピュータを活用する場面はなかったのであるが、日本では現在、学校にもコンピュータ環境が整えられつつあるため、今後さらにその活用が進められるべきである。ただし、ニュートン法による数値計算は、微分の応用の１つであるため、やはり微分そのものの指導と切り離すべきではないだろう。ニュートン法は、「数学III」のなかで一緒に教えられる方がよい。

3.3　積分の導入について

東京書籍の『数学II』を見ると、『微積分初歩』にあったような、微分の逆演算を必要とする状況設定（速度関数 $v(t)$ を知っているときに位置関数 $s(t)$ をいかに求めるか）は存在していない。また、原始関数と不定積分との関係については、原始関数の表記に関する定理（本稿 2.4.1(1)参照）を証明することなしに、「$f(x)$ の原始関数を**不定積分**ともいう」と述べられている。しかし、このような説明では、同一の概念に対してなぜ違う名称が使われるのかがはっきりしない。そもそも、原始関数と不定積分が同じものであるという点も、議論の分かれるところである。『新数学事典』によれば、「$f(x)$ に対して、その原始関数のすべての集まりを $f(x)$ の**不定積分**という」とある。さらに、不定積分とは、「積分定数のついた関数の集まりを表す言葉であるが、特にその１つを代表としてとって、それを $f(x)$ の不定積分というのが普通である。この意味では、不定積分は原始関数と全く同義語になる」と書かれている。[14]すなわち、不定積分とは、１つの原始関数との差が定数項のみになる関数を集めた同値類に対する名称であるともいえ、特に狭義の解釈の場合に限り、原始関数と不定積分は一致することになる。したがって、『数学II』の説明は、一概に誤りとはいえないものの、丁寧さを欠いたものとなっているといえ

13）藤田宏・前原昭二編『数学Ｃ』東京書籍、1996年。
14）一松信ほか『新数学事典』大阪書籍、1979年、486頁。

る。

実は、この点は、積分の定義に関わる重大な問題を含んでいる。すでに見てきたように、定積分の定義に関する記述は、『微積分初歩』と東京書籍の教科書では大きく異なっている。『微積分初歩』では、原始関数と不定積分を先に説明してはいるものの、定積分の定義においてはそれらの概念は必要とされていなかった（本稿 2.4.1(2)参照)。一方、『数学II』では、原始関数の存在を前提として定積分を定義していた(本稿 2.4.2(2)参照)。両者の相違は、積分論の発展の歴史と関わりをもっているのである。『数学II』が定積分の項で説明したのは、ニュートン―ライプニッツの公式ともよばれる微分積分学の基本定理「連続関数 $f(x)$ の原始関数の1つを $F(x)$ とするとき、$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$」である。これは、微分と積分、不定積分と定積分の関係を明確にした非常に偉大な定理である。この基本定理によって、「17 世紀まで多くの学者が速度、接線、面積などの見かけ上まったく異なるものとして取り扱ってきたたくさんの問題が、すべて微分とその逆演算としての積分を考えることにより、統一的に考察できるようになった」[15] と言われている。定理の条件からわかるように、この定理では、関数 $f(x)$ の原始関数 $F(x)$ の存在が前提とされている。ところが、時代を下って原始関数が知られた形では表現できないような関数もあることが知られ、また、18 世紀後半には、それまでの「解析的な表示をもつ関数」を超えて「任意の関数」という考えが人々の意識にのぼるようになった[16]。そして、19 世紀に入り、コーシーが、面積として直観的にとらえるのではなく、きちんと定義され、その存在を証明されたものとして積分を把握しようとした。さらに、この考えを進めて、積分の明確な定義を与えたのはリーマンである。リーマンは、今日よく知られたリーマン積分の定義を与えた。リーマン積分は、積分区間があらかじめ定められているため、あえて言う必要があるとすれば定積分にあたる。そして、『微積分初歩』が「5.1　定積分の概念」で説明したのはこのリーマン積分なのであるといって、ほぼ間違いない。なぜなら、積分区間を等分に分割しなければならないように書いている点だけしか違わないからである。

以上のことから、微分積分学の基本定理に基づいて定積分を説明している『数学II』に比して、『微積分初歩』は、積分論の発展の歴史に裏付けられたより高度な数学的内容をもつリーマン積分を教えていることがわかる。リーマン積分は、今日単に積分といえばそれを指すのが普通であるほど重要な概念であるのだが、決して高校生に理解不可能な複雑な内容というわけではない。リーマン積分の概念モデルはやはり面積であり、リーマン積分することは、領域を縦線で細分して個々の面積の総和を近似値として求め、その近似の精度を上げるために極限をとるという操作のイメージがある。実際、『微積分初歩』では、曲辺台形の面積を求める事例を、積分の定義の前に紹介していた。一方、『数学II』の定積分の説明では、確かに、面積を求める場面が導入になっているのであるが、そこには、「細かく分けて足し合わせる」という面積を求めるための最も基本的な操作が含まれてはいない。前節「数値計算について」でも触れたが、『数学C』の「数値計算」では区分求積法を扱っている。また、『数学III』にも、「定積分と区分求積法」の小節がある。ここでは、関数 $y=x^2$ のグラフと x 軸及び直線 $x=1$ で囲まれた図形の面積 S を区分求積法で求めて、その値が定積分を用いて求めた $S=\int_0^1 x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}$ と一

15) 垣田高夫ほか『現代応用数学の基礎　微分積分』日本評論社、1993 年、75 頁。
16) 竹之内脩『ルベーグ積分』培風館、1980 年、3 頁を参照。

致することを確認している。このような確認は、決して無意味とはいえない。しかしながら、リーマン積分の定義を思い出せば、定積分は初めから区分求積法による面積の値と一致するように定められたものである。一致の事実をあとから確認するのではなく、積分の定義の場面でこそ、区分求積法を頼りにしてリーマン積分を教えるべきであろう。結局のところ、『数学II』では、原始関数の存在を前提とした、より古い時代の積分の概念を教えたにすぎない。しかも、その教え方は、存在することが確定してはいない原始関数の概念を利用しており、区分求積法を用いていない分、リーマン積分を教えるよりも難しいものになってしまっている。確かに、『数学II』が定積分を説明する際に拠り所としたニュートン―ライプニッツの公式も、不定積分と定積分を結びつけるものとして大切な教育内容の1つであるといえる。しかし、この公式の偉大なところは、別々に定義された両者の間に等号が成立するという点である。『数学II』のように、初めから不定積分（原始関数）に基づいて定積分を定義したのでは、そのような関係が成立するのは当然である。したがって、リーマン積分を定義した後に不定積分と定積分の関係を導いている『微積分初歩』の方が優れていることは、一目瞭然である。

3.4 練習問題の素材と数学教育の目的論

すでに「3.1 微分の導入について」でも触れたことであるが、概念モデルの豊富さは、『微積分初歩』の大きな特長である。このことは、練習問題の素材の豊富さにもつながっている。一方、東京書籍の『数学III』には、章末の練習問題に限定すれば、物理学や化学などの他の学問分野や自然現象から見つけだしたような問題は1つもない。運動をイメージできる練習問題は数例あったものの、それらは平面上を点が動くという貧弱なものに限られていた。現実の運動や変化の解析は微分・積分の主要な目的であるのだから、もっと多様な練習問題が選ばれて然るべきである。『微積分初歩』の章末問題である「復習参考問題」の中から、そのような問題をいくつか紹介する。

「1 kg の鉄を 0 ℃から t℃($0 \leq t \leq 200$) まで加熱するとき、吸収する熱量 Q（キロカロリー）は公式 $Q(t)=0.1053t+0.000071t^2$ により確定する。$t=50$ のときの鉄の比熱 C を求めよ。

（ヒント：比熱 $C=Q'(t)$ キロカロリー/kg・度)」(122 頁)。

「ある金属円盤が熱膨張を受けて、その半径が 0.01 mm/s の速度で均等に増大した。その半径がちょうど 2 mm 伸びたときの、その面積の増大速度はどのくらいか。

（ヒント：円の面積は $S=\pi r^2$ であり、S と r はともに t の関数と見なせる)」(123 頁)。

「振り子の周期 T(s) と振り子の長さ l(mm) のあいだに、$T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{980}}$ という関係がある。長さが 20 mm の振り子の長さを 1 mm 伸ばすと、周期はどのくらい増加するか」(125 頁)。

「ある化学反応の過程中、反応物の時刻 t における濃度は $x=x_0e^{-kt}$ であり、その中の、x_0, k はともに正の数である。濃度は減少するかあるいは増加するか」(179 頁)。

以上のように、現実の運動や変化をもとにして問題を作成すると、問題中に現れる数が、具体物に基づく量を反映したものとなる。そして、微分・積分が、決して計算練習のための学問などではなく、現実に発生する具体的問題の解決に役立っていることを知ることができる。したがって、特に物理学や化学で教えられている内容を取り入れ、より総合的な指導ができるよ

うにするべきであろう。もっとも、このことは、物理学や化学の教育の課題でもある。微分・積分や三角関数などを数学で学ぶ前に理科教育の場でそれらの数学的概念が必要とされることが、理科教師の頭を悩ませているという事情もある。逆に、物理や化学を学ばない学習者に微分・積分を教えることは、物理や化学の既習者に教えることよりも難しいかもしれない。理科、とりわけ物理学と、数学のカリキュラムは、特に高等学校段階ではもっと相互に融合させる必要があると思われるが、本稿ではこれ以上論究できない。本稿で主張できることは、数学教育研究の立場から、物理や化学の内容を数学教育の場に取り入れるべきであるということである。確かに、そのようにしたところで数学教育の何が改善されるのかについては、答えなければならないだろう。例えば、前頁に紹介した練習問題の最初にある鉄の比熱 C を求める問題などは、ヒントがついているせいで、結局 $Q'(50)$ を求めるだけになってしまっている、という批判があるかもしれない。しかし、Q と t はそれぞれ熱量・温度という物理量になっており、また、$Q(t)$ における t の係数は「きれいな」数ではなく、小数点以下まで細かく測定して求めた数という感じを与える。「$f(x)=0.1053x+0.000071x^2$ のとき、$f'(50)$ を求めよ」という問題と比べてみれば、どちらが生き生きとした問題かは歴然としている。

以上のように多様な現象が練習問題に反映されている様子を見ると、数学教育の目的について改めて考えさせられる。米国ベル研究所の数学者ロナルド・グラハムは、「何で数学を？」と問われると、「それはワクワクするほど面白いものだからだよ」と答えるという。[17] 教師をはじめとする教授プログラムを開発する側にとって、このような回答は理想的である。「何で数学を学ぶのか」という数学教育の目的を問われた場合に自信をもってそう答えられるような、「ワクワクするほど面白い」教授プログラムを用意することができれば、それが一番良いに違いない。しかしながら、そのことがどれほど困難であるかということも、教授プログラムの開発に携わる人ならば誰でも実感をもって理解できることであろう。「何で数学を学ぶのか」を問うことを忘れてしまうほどの面白い授業は、そう簡単にできるものではない。そうなると、「ワクワクするほど面白いものだから」ということ以外の、数学を学ぶ理由を用意しなければならない。

その理由として、「数学が社会の様々な分野で応用され、役に立っているから」ということがあげられるかもしれない。こういった数学教育の目的を立てることは、ともすれば、「数学は役に立つ」という理解を学習者に強要するものとして退ける向きもあろう。しかし、『微積分初歩』で扱われている多様な概念モデルや練習問題の素材を見ると、数学の抽象性とそれに伴う応用性を積極的に紹介することは、非常に意義のあることであるといえる。『微積分初歩』には、概念モデルや練習問題以外にも、そのことを直接的に訴えている件が散見される。

> 「自然科学や工事技術において、常に不均等変化の問題、例えば化学反応速度・物体温度の変化速度・放射性物質の崩壊・電流の強度などに出会う。このことから、具体的な実際の意味を捨て去り、一般に数量関係から関数の変化率を研究することが、大変多くの実際的な問題の解決にとって普遍的な意味を有するのである」(導数を導入する場面。55-56頁)。
>
> 「実際の問題のなかで、変数が比較的小さく変化するとき、関数がどれくらい変化するかを考えなければならないこともある。もし関数が非常に複雑ならば、関数の変化量を計算するのもまた非常に複雑であろう。簡単にかつ比較的高精度で関数の変化量を計算する近

17) 秋山仁「数学の才能とは」(『UP』第297号、東京大学出版会、1997年) 10-11頁を参照。

似的方法を得ることはできないだろうか」(微分を導入する場面。107頁)。

「生産において、一定の条件下で『強度最大』、『使用材料最小』、『効率最大』にすることを要求するような種類の問題にいつも遭遇する。数学上では、この種類の問題は往々にして関数の最大値あるいは最小値を求めることに帰結する」(関数の最大値・最小値を導入する場面。143頁)。

「生産や科学技術において、例えば面積・距離・体積などを求める多くの実際問題は、最後にはみな一種の和の極限を求めることに帰結する」(定積分を導入する場面。213頁)。

自然科学や生産、科学技術の場面で遭遇する問題に対して、数学がどのように関わっているかについて、『微積分初歩』では上のような例を挙げて説明している。微分・積分の指導において、学習動機を喚起する意味でも、こういった数学の応用的側面を紹介することは有効ではないだろうか。その根拠は、微分・積分が現実にそのような側面をもっているからということにとどまらない。微分・積分の学習者である高等学校の2、3年生が、現在の学習内容と社会との関わりを知ることは、プラスに働くであろう。その意味で、「数学が社会の様々な分野で応用され、役に立っているから」という数学教育の目的の設定は、微分・積分の指導では一定の有効性をもつのではないだろうか。

もっとも、数学の応用的側面を紹介するには、数学そのものを指導することが前提となる。遠山啓は、「数学教育は数学を教える教科である」と述べて、教科としての数学と科学としての数学を切り離すことを否定した。[18] 筆者もこの立場に同意している。数学自体がなければその応用的側面などあり得ないように、科学としての数学を教えなければ、その応用的側面は教えられないのである。

4 おわりに

本稿では、外国教科書分析の一環として、中国の高等学校用数学教科書『微積分初歩』と東京書籍の教科書『数学II』『数学III』を比較・検討してきた。微分と積分の導入及び微分の応用である数値計算の部分を中心に検討してきたのであるが、その範囲内に限定しても、『微積分初歩』の良い点が浮き彫りにされた。その結果、日本における微分・積分指導を見直すためのいくつかの視点を得ることができた。『微積分初歩』の特徴点の1つである、微分や積分を必要とする状況をあらかじめ設定して、その上で新しい概念を導入・定義し、再び現実の問題との関わりを解説するといった一連の流れは、日本の教科書と比べて極めて丁寧であるといえる。また、『微積分初歩』は、東京書籍の教科書にはない微分そのものやリーマン積分の概念を教えていた。このうち、微分については、dy を単なる記号としてではなく、実際の変化量 Δy の近似値を表現する量として扱う必要があることを述べてきた。そうする方が、合成関数の導関数を求める公式の理解をスムーズにでき、また、数値計算とのつながりの面からも適切であることを主張した。一方、リーマン積分については、今日の積分の代名詞となっている重要な概念であり、これを教えなければ積分の指導とはいえない。リーマン積分は、領域を細かく分けた後に足し合わせて面積を求める区分求積法を、極限の概念を用いて数学的に厳密に定式化したものであって、面積を中心とした既知の幾何学的概念を頼りにして視覚的に指導できるため、学習者にとっても決して理解しにくい概念ではない。さらに、『微積分初歩』の特長として、現実

18) 遠山啓「数学教育の基礎」(『岩波講座　現代教育学』第9巻、岩波書店、1960年) 7-8頁を参照。

の問題との関わりを重視する姿勢があげられる。実際、物理学や化学を中心に、他の学問分野から練習問題の素材を豊富に選び出していることや、折に触れて数学の目的を紹介する件が存在することにその姿勢が現れていた。「何のために数学を学ぶのか」がわかりにくくなっている現代にあって、物理現象や自然現象と密接に関わって数学を教えようとすることは、大変意義のあることといえる。現実的な問題を取り上げることは、社会における数学の応用的側面を示すことにもなり、高校生である学習者の学習動機を喚起する効果があると考えられる。

今後は、『微積分初歩』から学んだことを教授プログラムの開発に反映させることもさることながら、対象領域や対象国を拡大した外国教科書の分析も課題となる。これについては、研究対象が膨大となり得るため、共同研究者を得て共に進めてゆきたい。

なお、『微積分初歩』の訳出に当たり、北海道大学大学院教育学研究科博士後期課程の姚鵬鵬さんより助言をいただきました。また同博士後期課程の楊志剛さんからは、『全日制普通高級中学数学教学大綱』を提供していただきました。記して感謝致します。