自 然 数 論

山　口　　　格
（室蘭工業大学）

1．は じ め に

自然数については，小学校の算数の時間に習ったままで，組織的，体系的に自然数について学び直す機会は少ない。小学校で教えている自然数についても，教育技術から論議されることは多いが，数学的内容をきちんと整理されて論議することは意外に少ない。そこで本稿では数学教育を行う立場で自然数論を展開してみよう。たとえば大小の順序と算法の関係など論じてみたい。さらに自然数の集合のモデルについても検討してみたい。筆者は1995年に正負の数についての考察を行った。このとき直線上の平行移動（直線上を位置をずらすこと）の全体からなるベクトル空間をモデルとして採用した。この考え方は当然自然数にも適用できるものである。また1987年に数学的帰納法について考察したことがある。数学的帰納法は自然数という概念の重要な内容であるからしばしばその意義を確認することになる。また1991年に除法と整列性について考察した。しかし直線上の移動というモデルについての除法や整列性についての考察は行っていなかった。この点についても論じてみたい。

2．自然数の公理

自然数の性質について議論する際，その出発点として公理を前提としておく。もしそうしなければ議論は循環論法におちいってしまう危険がある。最も基本的なものが，その数学的対象を規定する公理としておかれ，すべてはその公理から厳密に導き出される。自然数の公理としてよく知られているものにペアノの公理がある。イタリアの数学者ペアノ（GIUSEPPE PEANO 1858-1932）が論文「数の概念について」（1891）の中で原始命題として述べたものである。われわれもペアノの公理を出発点として自然数論をはじめよう。

ペアノの公理

Ⅰ．１という対象があり，Nは１を元としてもつ集合である。

Ⅱ．Nからそれ自身への写像 φ：N→Nがある。

Ⅲ．φ は単射である

Ⅳ．$1 \notin \varphi(N)$

Ⅴ．Nの部分集合Aが，次の２つの条件，(a)，(b)を満足すれば，A＝Nとなる。

(a)　$1 \in A$，(b)　$\varphi(A) \subset A$

このペアノの公理をみたす集合Nの元を自然数と定義する。われわれが小学校で初めて数を習っていらい知っている自然数の性質はすべてこの公理から導かれる。例えば「自然数は１からはじまり，１，２，３……と次々に進んで得られる数である。」と知っているがこれをペアノ

の公理から導いてみよう。まずⅠより，1が自然数である。Ⅱより $\varphi(1)$ はNの元であるから自然数であるが，それを2と定義する。$\varphi(1)=2$ である。同様に $\varphi(2)=3$, $\varphi(3)=4$, ……と定義すれば，「1，2，3，4，……は自然数である。」ことになる。そしてこのように1からはじめて，$\varphi(1)$, $\varphi(\varphi(1))$, $\varphi(\varphi(\varphi(1)))$, ……とどこまでも続けてゆけば，自然数の全体が得られることは最後のⅤが示しているのである。今このようにして作った1, $\varphi(1)$, $\varphi(\varphi(1))$, ……の集合をAとする。$A \subset N$ である。そして(a) $1 \in A$ は明らかである。(b) $\varphi(A) \subset A$ もAの作り方から明らかに満たされている。従ってⅤから $A=N$ となるのである。

このように見て来ると公理による自然数の定義はわれわれが習って知っている数とかなり異なっていることがわかる。それはわれわれの習って来たものは，人によって異なるだろうが，どれも自然数のモデルの一つだったと考えられる。モデルと言うのは，公理を満たしている例のことである。日本の数学教育では，歴史的にみて1905年以降いくつかのモデルが用いられた。その代表的なモデルについて次に検討する。

3．自然数のモデル

1905年から1934年まで30年間にわたって使われた国定教科書「尋常小学算術書」では次の様になっている。

「10以下の数　一つ二つと唱ふる数へ方　ヒトツ　フタツ　ミツ　ヨツ　イツツ……」これは数えるという操作によって，1，2，3の導入を行ったものである。この方法は「数え主義」と呼ばれ最近まで日本人は数を数え唱えることから入門していた。

この方法に批判的であった数教協（数学教育協議会）が戦後広めた量をもとにする自然数の導入を検討しよう。数教協のメンバーが編集した「わかるさんすう1」の指導ノートには次の様に述べられている。「数を教えるのに，いきなり〝数えさせる〟ことからはじめる人がいますが，これはまちがいです。それでは，数が〝ものの大きさ〟を表すものだということを理解させることはできません」。数教協の人達はこのように明治以来続けられ来た「数え主義」による数の導入を否定して，ものの大きさを表す量に着目して数の導入を行う方法を考え出した。この方法の概要を要約してみよう。

まずいろいろな物がある中から同じものを集める（集合を作る）ことから始めて，有限集合の認識を作る。次にその有限集合を構成している要素の個数の大小を比較する。このとき同じ個数をもつ集合に共通な名称を与えたものが数詞である。二つの集合の要素の大小を知るには〝数える〟のではなく，1対1対応を行って，あまりがあるかないかで，比較をする。その次にタイルの集合を登場させ物の集合とタイルの集合を対応させる。タイルは数教協の発明とも言うべき〝半具体物〟で，タイルの集合を具体物の集合の大きさの基準にして，そのタイルの集合に名称（数詞）をつければ数が生まれる。次に数を表す文字（数字）を教え，タイルの集合と数詞と数字の三者がしっかりと結びつくような指導をする。

この方法は素朴な集合論の中で自然数を作って行く方法で，教育の現場では大きな成功をおさめて，高く評価されている方法である。一対一対応のつく2つの集合A，Bを，A，Bは対等であると言うことにすれば，Aに対等な集合全体のなす集合 $\tilde{A}$ を考え，$\tilde{A}$ にタイルの集合□□が属しているとき，つまり $\tilde{A}$ の元の集合それぞれと□□が対等であるとき，$\tilde{A}$ は2（に）であると言うのである。このようにして対等な集合全体の集合にタイル（というラベルで）で数詞を与えるのである。（理屈を言えば，□□の属している $\tilde{A}$ が2と呼ばれるのはなぜかという問

題は残る。しかし教育の場では，他の方法と齟齬をきたすことは考えられない。)この方法は集合全体の集合を〝対等〟という関係で割って（類別して）同値類を作ることになる。一つ一つの同値類が自然数なのである。ところが周知のように集合全体の集合という概念は矛盾を内包するのである。[1] この方法を数学的にきちんと記述することは意外にむずかしい。集合論を公理化して，その中で行う方法が，例ば，島内剛一「数学の基礎」の中に述べられている。

4．線　形　移　動

ペアノの公理をみたすモデルを構成することを考えてみよう。直線 l の上に一定の長さを任意に決めて固定する。直線 l の線分に向きを考え，位置を無視して l 上のベクトルを考える。自然数を導入するときは，当面一定の向きのベクトルを考える。1として単位の長さを任意に決めて固定して，その長さをもつベクトルを考える。$\varphi(1)$は1を1回単位の長さだけずらすことにする。その結果が2のベクトルである。φ をこのような l 上のベクトルに対する写像として同様に $\varphi(2)=3$, $\varphi(3)=4$, ……と定義すれば自然数の全体N が得られることは2節に述べた。$\varphi(n)$という変換は n を「次の数」に対応させるものである。これを一般化して一般に

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & \cdots\cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ n & \varphi(n) & \varphi(\varphi(n)) & \cdots\cdots \end{array}$$

というような変換を考える。すなわち $n-1$ だけ「ずらす」変換を考える。この変換を ψ とする。ψ は φ を $n-1$ 回結合したものと考えることができる。更に ψ は次の条件をみたすとする。

1°すべての $n\in$N に対して $\psi(n)$が一意的に定義される。

2°すべての $n\in$N に対して $\psi(\varphi(n))=\varphi(\psi(n))$である。

この変換 ψ を線形移動と言う。線形移動の性質を見よう。[2]

定理1　任意の自然数 n に対して，$\psi(1)=n$ となるような線形移動 ψ が存在する。

証明　$n=1$ に対しては $\psi(x)=x$ という恒等変換を考えればよい。n について ψ が定義できたと仮定するとき，$\psi^*(x)=\varphi(\psi(x))$と定義する。そのとき

$$\psi^*(1)=\varphi(\psi(1))=\varphi(n)$$

m について $\psi^*(m)$が定義されていれば

$$\begin{aligned}\psi^*(\varphi(m))&=\varphi(\psi(\varphi(m)))=\varphi(\varphi(\psi(m)))\\&=\varphi(\psi^*(m))\end{aligned}$$

よって数学的帰納法により，ψ^* はすべての m について定義され，上の性質 2°がみたされていることがわかる。したがって $\varphi(n)$について ψ^* が条件をみたしている。それ故再び数学的帰納法により，すべての n について ψ が定義される。(証明終)[3]

定理2　二つの線形移動 ψ, ψ'について，$\psi(1)=\psi'(1)$ならば，$\psi=\psi'$，すなわちすべての $n\in$N について，$\varphi(n)=\psi'(n)$である。

証明　$\psi(n)=\psi'(n)$となるような自然数 n の集合を M とする。仮定により $1\in$M。また $n\in$

Mとすると，$\psi(n)=\psi'(n)$だから

$$\psi(\varphi(n))=\varphi(\psi(n))=\varphi(\psi'(n))=\psi'(\varphi(n))$$

ゆえに，$\varphi(n)\in$M。よってM＝N。(証明終)

この2つの定理により，線形移動ψは$\psi(1)=n$を与えれば定められることになる。そこで$\psi(1)=n$となる線形移動をψ_nと表すことにする。$\psi_1(x)=x$，$\psi_2=\varphi$である。線形移動はNからNの中への1対1写像である。

定理3　線形移動ψ_nについて，$\psi_n(x)=\psi_n(y)$ならば$x=y$である。

証明　nについて数学的帰納法を用いる。$n=1$のとき$\psi_1(x)=x$, $\psi_1(y)=y$だから，$\psi_1(x)=\psi_1(y)$ならば$x=y$は明らかである。nのときに成り立つと仮定する。$\varphi(n)$のとき，定理1の証明および定理2から，$\psi_{\varphi(n)}=\varphi\psi_n$であるから，$\psi_{\varphi(n)}(x)=\psi_{\varphi(n)}(y)$ならば，$\varphi(\psi_n(x))=\varphi(\psi_n(y))$，$\varphi$は単射であるから，$\psi_n(x)=\psi_n(y)$，ゆえに帰納法の仮定から，$x=y$，したがって$\varphi(n)$についても命題が成り立つ。すなわちすべての$n$について命題が成り立つ。(証明終)

定理4　二つの線形移動ψ_m，ψ_nについて，ある一つの$p\in$Nに対して$\psi_m(p)=\psi_n(p)$ならば，$\psi_m=\psi_n$である。

証明　pについての数学的帰納法による。$p=1$のとき定理2により成り立つ。次にあるpについて成り立つと仮定する。$\psi_m(\varphi(p))=\psi_n(\varphi(p))$となったとすれば，$\varphi(p)$について$\psi_m(\varphi(p))=\varphi(\psi_m(p))=\varphi(\psi_n(p))=\psi_n(\varphi(p))$より$\psi_m(p)=\psi_n(p)$，したがって帰納法の仮定により$\psi_m=\psi_n$，すなわち$\varphi(p)$についても命題が成り立つ。数学的帰納法により定理が証明された。(証明終)

定理5　$n\neq1$ならば$\psi_n(x)\neq1$である。

証明　すべてのxについて$\psi_n(x)\neq1$となるnの集合をN_0とし，$\mathrm{M}=\{1\}\cup\mathrm{N}_0$とおく。$1\in$M，また$n\in$Mならば$\varphi(n)$について，$\psi_{\varphi(n)}(x)=\varphi(\psi_n(x))\neq1$であるから$\varphi(n)\in$M。ゆえに証明された。(証明終)

定理6　任意のm，nについて$\psi_a(m)=n$となるψ_a，または$\psi_b(n)=m$となるψ_bが存在する。また$m\neq n$ならば，このようなaまたはbの一方のみが存在する。

証明　nに関する数学的帰納法を用いる。命題「すべての$m\neq n$に関して$\psi_a(m)=n$となるaか，$\psi_b(n)=m$となるbかのいずれか一方，また一方のみが存在する」を$A(n)$で表せば，すべてのnについてA(n)が成り立つことを示せばよい。($m=n$ならば$\psi_1(n)=m$となる)。$n=1$のときA(1)が成り立つことは定理1および定理2からわかる。いまnについてA(n)が成立したとしよう。任意のmについてもし$\psi_a(m)=n$，$m\neq n$となるならば$\psi_{\varphi(a)}(m)=\varphi(\psi_a(m))=\varphi(n)$となる。またもし$m=n$ならば$\psi_2(m)=\varphi(n)$である。さらにもし$m\neq\varphi(n)$で，ある$b$について$\psi_b(n)=m$となったとすれば$b\neq1$であるから$\varphi(c)=b$となる$c$が存在す

る。それゆえ $\psi_b(n)=\psi_{\psi_1(c)}(n)=\psi_c(\varphi(n))$。したがって $\varphi(n)$ に関してすべての場合に条件をみたす線形移動が存在することが示される。またもし $m\neq\varphi(n)$ のとき $\psi_a(m)=\varphi(n)$ かつ $\psi_b(\varphi(n))=m$ となったとすれば，$a\neq1$ だから $\varphi(d)=a$ となる d が存在して $\psi_a(m)=\psi_{\psi_1(d)}(m)=\varphi(\psi_d(m))=\varphi(n)$。ゆえに $\psi_d(m)=n$。また $\psi_b(\varphi(n))=\psi_{\psi_1(b)}(n)=m$ となるから A(n) に矛盾する。したがって A$(\varphi(n))$ が成り立つ。ゆえにすべての n について A(n) が成り立つ。(証明終)

5．順　　　序

線形移動を用いて自然数の順序を定義する。与えられた m，n に対して定理6の a または b が一意的に定まる。そこで $\psi_a(m)=n$ なる a が存在するとき $n\geqq m$ と定義する。$n\geqq m$ でかつ $n\neq m$ のとき，$n>m$ と表すことにする。定理6をいいかえると

定理7　任意の自然数 m，n に対して $n>m$，$n=m$，$m>n$ のいずれか一つ，かつ一つのみが成り立つ。

定理8　線形移動の結合変換 $\psi_a\{\psi_b\}$ は線形移動である。

証明　$\psi_a\{\psi_b(\varphi(n))\}=\psi_a\{\varphi\{\psi_b(n)\}\}=\varphi\{\psi_a\{\psi_b(n)\}\}$ (証明終)
今後 $n>m$ を $m<n$ とも表すこともある。定理8を用いて次の定理を得る。

定理9　$n>m$，$m>l$ ならば $n>l$ である。

この定理は順序関係の推移律である。

証明　仮定から $\psi_a(m)=n$ となる a が存在し，同じく仮定から $\psi_b(l)=m$ となる b が存在する。この2つの線形移動の結合変換を ψ_c と表す。$\psi_a\{\psi_b\}=\psi_c$，$\psi_c(l)=n$，よって $l\leqq n$ である。もし $l=n$ とすれば $c=1$ となる。$\psi_a\{\psi_b(1)\}=\psi_c(1)=1$，$\psi_b(1)=q$ とおくと $\psi_a(q)=1$。これは $a=1$ を意味する。このことは $n>m$ という仮定に反する。ゆえに $l\neq m$ である。(証明終)

定理10　任意の自然数 n に対して $n\geqq1$ である。

証明　定理1より明らか。(証明終)

定理11　$m<n \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(m)<\psi(n)$

証明　$m<n$ ならば $\psi_a(m)=n$ となる $a(\neq1)$ が存在する。$\varphi(n)=\varphi(\psi_a(m))=\psi_a(\varphi(m))$ よって $\varphi(m)<\varphi(n)$。逆に $\varphi(m)<\varphi(n)$ のとき $m=n$ または $m>n$ とすれば $\varphi(m)\geqq\varphi(n)$ となって矛盾する。(証明終)

定理 12　$m<n$ ならば $\varphi(m)=n$ または $\varphi(m)<n$

証明　$m<n$ ならば $\psi_a(m)=n$ となる $a\neq 1$ がある。$\varphi(b)=a$ とすれば

$\psi_a(m)=\psi_{\varphi(b)}(m)=\psi_b(\varphi(m))=n$

従って $\varphi(m)\leqq n$ (証明終)

定理 13　N の空集合でない任意の部分集合は必ず最小元をもつ。ここに N の部分集合 M において $m_0\in M$ で，かつすべての $m\in$ M に対して $m_0\leqq m$ となるような m_0 を M の最小元という。

証明　N$\supset$M なる M$(\neq\phi)$ を任意にとる。$1\in$M ならば，1 は明らかに最小元である。いま $1\notin$M とし，かつ M に最小元が存在しないと仮定する。そのとき L をすべての $m\in$M に対して $n<m$ となるような n の集合とする。$1\in$L よって L$\neq\phi$　L$\cap$M$=\phi$ も明らか。いま $n\in$L とする。$\forall m\in$M に対して $n<m$ だから，$\varphi(n)\leqq m$ (定理 12)，もしある m_0 に対して $\varphi(n)=m_0\in$M ならば，m_0 は M の最小元になる。よって M に最小元が存在しないとすればすべての $m\in$M に対して $\varphi(n)<m$ となる。したがって $\varphi(n)\in$L, 数学的帰納法により L$=$N　このとき M$=\phi$ となる。これは矛盾である。よって M は最小元をもつ。(証明終)

6. 0 と 加 法

今まで述べて来た自然数全体の集合 N には 0 は含まれていなかったが，ここで 0 を導入する。[4] $\varphi(0)=1$ なる元を考え 0 とする。N に 0 を合わせた集合 N$\cup\{0\}$を $\bar{\mathrm{N}}$ と表す。$a\in$N のとき $b=\varphi^{-1}(a)\in\bar{\mathrm{N}}$ で $\varphi(b)=a$ となる元を表す。＋の記号を次の様に定義する。

$\psi_n(m)=m+\varphi^{-1}(n)$

＋は移動で定義される。あるいは

$\psi_{\varphi(n)}(m)=m+n$：$m\in$N，n$\in\bar{\mathrm{N}}$

としてもよい。$\psi_n(0)=\varphi^{-1}(n)$ と定義すれば，任意の n，$m\in\bar{\mathrm{N}}$ について和

$m+n$

を定義することができる。

線形移動の定義の際 0 を導入していなかったので，和の定義の時 $m+n=\psi_{\varphi(n)}(m)$ としたが，$\psi_n(m)$ が $m+n$ となる方が簡便である。そこで改めて今後は ψ_n を $\psi^*_{\varphi^{-1}(n)}$ と表すことにする。そうすると今までの ψ_1 は ψ^*_0 に，ψ_2 は ψ^*_1 に変わる。そうすれば加法の定義は

$\psi^*_n(m)=m+n$

となる。また $\varphi(n)=\psi^*_1(n)=n+1$ となる。

定理 14　$\varphi(m+n)=m+\varphi(n)$

証明　$\varphi(m+n)=\varphi(\psi^*_n(m))=\psi^*_{\varphi(n)}(m)=m+\varphi(n)$

定理 15　線形移動の結合については，m，$n\in$N に対して，$\psi^*_n(\psi^*_m(x))=\psi^*_{m+n}(x)$ となる。

証明　n に関する数学的帰納法を用いる。$n=1$ のとき，$\varphi^*_1=\varphi$ だから

$$\psi^*_1(\psi^*_m(x))=\varphi(\psi^*_m(x))=\psi^*_{\varphi(m)}(x)=\psi^*_{m+1}(x)$$

いま n のとき $\psi^*_n(\psi^*{}_m(x))=\psi^*_{m+n}(x)$ がすべての m について成り立つと仮定する。そのとき

$$\psi^*_{\varphi(n)}\{\psi^*_m(x)\}=\varphi\{\psi^*_n\{\psi^*_m(x)\}\}$$
$$=\varphi\{\psi^*_{m+n}(x)\}=\psi^*_{\varphi(m+n)}(x)=\psi^*_{m+\varphi(n)}(x)$$

となって，$\varphi(n)$ についても命題は成り立つ。(証明終)

定理 16　$\psi^*_n\{\psi^*_m(x)\}=\psi^*_m\{\psi^*_n(x)\}$

ただし，m，$n\in\mathrm{N}$

証明　n に関する帰納法を用いる。$n=1$ のときは，$\psi^*_1\{\psi^*_m(x)\}=\varphi\{\psi^*_m(x)\}=\psi^*_m(\varphi(x))$

$$=\psi^*_m\{\psi^*_1(x)\}$$

となって成り立つ。n について成り立つと仮定すると　$\psi^*_{\varphi(n)}\{\psi^*_m(x)\}=\varphi\{\psi^*_n\{\psi^*_m(x)\}\}$

$$=\varphi\{\psi^*_m\{\psi^*_n(x)\}\}=\psi^*_m\{\varphi\{\psi^*_n(x)\}\}$$
$$=\psi^*_m\{\psi^*_{\varphi(n)}(x)\}$$

となって $\varphi(n)$ についても成り立つ。(証明終)

定理 16 について，m，n の一方を 0 としても成り立つ。

定理 17　加法に関して次の関係が成り立つ。

1) $m+n=n+m$

2) $(l+m)+n=l+(m+n)$

証明　1) $m+n=\psi^*_{m+n}(0)=\psi^*_n\{\psi^*_m(0)\}$

$$=\psi^*_m\{\psi^*_n\{0\}\}=\psi^*_{n+m}(0)=n+m$$

2) $(l+m)+n=\psi^*_n\{\psi^*_{l+m}(0)\}=\psi^*_n\{\psi^*_m\{\psi^*_l(0)\}$

$$=\psi^*_{m+n}\{\psi^*_l(0)\}=\psi^*_{l+(m+n)}(0)=l+(m+n)$$

(証明終)

定理 18　加法について次のことが成り立つ。

1) $n+0=0+n=n$

2) $l+n=m+n$ ならば $l=m$

証明　1) は定理 16 において m，n の一方を 0 にしても良いことから，

2) は $\psi^*_n(l)=\psi^*_n(m)$ を意味するから定理 7 からわかる。(証明終)

次に大小関係と加法との関係を調べる。

定理 19　すべての $n\in\mathrm{N}$ に対して

$$0<n$$
である。

証明　$\psi^*_n(0)=n$ より

定理 20　$n<m$ となるための必要十分条件は，$n+l=m$ となる $l\in\mathrm{N}$ が存在することである。

証明　$n<m$ ならば $\psi^*_a(n)=m$ となる a が存在する。加法の定義により

$$\psi^*_a(n)=n+a$$

従って a を l と考えれば $n+l=m$ になる。

逆に　$n+l=m$ となる l が存在すれば

$$\psi^*_l(n)=m$$

よって $n<m$ である。(証明終)

定理 21　$n>m$ ならば，すべての $p\in\bar{\mathrm{N}}$ に対して，$p+n>p+m$ である。

証明　$n>m$ だから $n=m+l$ となる $l\in\mathrm{N}$ が存在する。そうすると

$$p+n=p+(m+l)=(p+m)+l$$

従って，$p+n>p+m$ となる。(証明終)

減法，ここで $n\geqq m$ のとき $n+l=m$ となる l を $l=n-m$ と表す。このような l が一意的に定まることは定理 6 により保障される。また $0=n-n$ である。

7．乗　　　法

$n\in\bar{\mathrm{N}}$ に対して定義されたもう一つの変換を考える。変換 χ が，すべての n，$m\in\bar{\mathrm{N}}$ に対して

$$\chi(n+m)=\chi(n)+\chi(m)$$

という条件をみたすとき，χ を線形変換という。

$$\chi(n)=\chi(n+0)=\chi(n)+\chi(0)$$

これより，線形変換に関しては $\chi(0)=0$

定理 22　任意の $n\in\bar{\mathrm{N}}$ に対して $\chi(1)=n$ となるような線形変換 χ が存在する。

証明　N に対する数学的帰納法の原理を $\bar{\mathrm{N}}$ に対して書き換えると次の様になる。

「$\mathrm{M}\subset\bar{\mathrm{N}}$ とするとき，もし $0\in\mathrm{M}$，かつ $n\in\mathrm{M}$ ならば $\varphi(n)=n+1\in\mathrm{M}$ が成り立つならば，$\mathrm{M}=\bar{\mathrm{N}}$」この拡大された数学的帰納法を用いる。$n=0$ ならば $\chi(x)\equiv 0$ とすればよい。いま線形変換 χ_n が存在したとする。$\chi_n(1)=n$ である。そのとき $\chi_{n+1}(x)=\chi_n(x)+x$ とする。そうすれば，

$$\chi_{n+1}(1)=\chi_n(1)+1=n+1$$

χ_{n+1} の線形性は

$$\chi_{n+1}(x+y)=\chi_n(x+y)+(x+y)=(\chi_n(x)+\chi_n(y))+(x+y)$$
$$=(\chi_n(x)+x)+(\chi_n(y)+y)=\chi_{n+1}(x)+\chi_{n+1}(y)$$

である。(証明終)

定理 23　二つの線形変換 χ，χ^* について，$\chi(1)=\chi^*(1)$ ならば $\chi\equiv\chi^*$

証明　$\chi(n)=\chi^*(n)$ となる n の集合を M とする。$1\in$M，$\chi(n)=\chi^*(n)$ ならば $\chi(n+1)=\chi(n)+\chi(1)=\chi^*(n)+\chi^*(1)=\chi^*(n+1)$ だから $n+1\in$M　したがって M$=$**N**　またつねに $\chi(0)=\chi^*(0)=0$。(証明終)

定理 23 より線形変換は 1 に対する値によって決定されることがわかる。そこで $\chi(1)=n$ となる線形変換 χ を χ_n と表すことにする。乗法の定義は次のようにする。

$$\chi_n(m)=m\cdot n$$

と表す。[5]

定理 24　$\chi_1(n)=n\cdot 1=n$

定理 25　結合変換 $\chi_n\{\chi_m(x)\}=\chi_{mn}(x)$

証明　結合変換 $\chi_n\{\chi_m(x)\}$が線形変換であることは $\chi_n\{\chi_m(x+y)\}=\chi_n\{\chi_m(x)+\chi_m(y)\}=\chi_n\{\chi_m(x)\}+\chi_n\{\chi_m(y)\}$ よりわかる。したがって $\chi_n\{\chi_m(1)\}=l$ とおけば $\chi_n\{\chi_m(x)\}=\chi_l(x)$ となる。一方 $\chi_n\{\chi_m(1)\}=\chi_n(m)=mn$ だから $l=mn$ (証明終)

定理 26　$\chi_n\{\chi_m(x)\}=\chi_m\{\chi_n(x)\}$

証明　n に関する帰納法による。$n=0$ のときは明らか，$n=1$ のときは，$\chi_1\{\chi_m(x)\}=\chi_m(x)=\chi_m\{\chi_1(x)\}$，$n$ に関して命題が成り立ったとする。定理 22 の証明中にあるように，$\chi_{n+1}(x)=\chi_n(x)+x$ だから $\chi_{n+1}\{\chi_m(x)\}=\chi_n\{\chi_m(x)\}+\chi_m(x)=\chi_m\{\chi_n(x)\}+\chi_m(x)=\chi_m\{\chi_n(x)+x\}=\chi_m\{\chi_{n+1}(x)\}$で $n+1$ に関しても成り立つ。(証明終)

定理 27　$\chi_n\{\chi_{lm}(x)\}=\chi_n\{\chi_m\{\chi_l(x)\}\}=\chi_{nm}\{\chi_l(x)\}$

上の二つの定理より，次のことがいえる。

定理 28　すべての l，m，$n\in\tilde{\mathrm{N}}$ について

1）　$mn=nm$

2）　$(lm)n=l(mn)$

証明　1）$mn=\chi_{mn}(1)=\chi_n\{\chi_m(1)\}=\chi_m\{\chi_n(1)\}=nm$。2）も同様に定理 27 より。(証明

終）

定理 29　すべての l，m，$n \in \mathsf{N}$ について

$$(l+m)n = ln + mn, \quad n(l+m) = nl + nm$$

証明　前半は線形変換の定義から，後半は $n(l+m)=(l+m)n=ln+mn=nl+nm$。（証明終）

定理 30　$m \neq 0$，$n \neq 0$ ならば $mn \neq 0$。

証明　$mn = \chi_n(n)$ で $n \neq 0$ ならば $\chi_n(1) = n \neq 0$。$\chi_n(m+1) = \chi_n(m) + n$ で $\chi_n(m) \neq 0$，$n \neq 0$ ならば $\chi_n(m+1) \neq 0$ で m に関する帰納法により証明された。（証明終）

定理 31　$nn \neq 0$ のとき $ln = mn$ ならば $l = m$

証明　$l \geqq m$，$l \leqq m$ の少なくとも一方が成り立つから，いま $l \geqq m$ とすれば，$mn + (l-m)n = ln$ だから $(l-m)n = 0$，$n \neq 0$ だから $l-m=0$，$l=m$。（証明終）

定理 32　$n \neq 0$ のとき $l > m$ ならば $ln > mn$。逆も成り立つ。

証明　$l > m$ ならば $l-m \neq 0$ である。したがって $ln = mn + (l-m)n$ となり，$(l-m)n \neq 0$ だから $ln > mn$。逆に $ln > mn$ のとき，もし $l \leqq m$ とすると $ln \leqq mn$ となるから矛盾する。（証明終）

8．モ　デ　ル　論

以上 4 ～ 7 節において，ペアノの公理に対する一つのモデルを検討した。公理的に展開される現代の数学にあってはモデルは，その公理系という形式的体系に対する意味論的完全性の要請となる。形式的体系が少なくとも一つの解釈，すなわちモデルをもつときこの体系は意味論的に無矛盾であるという。

モデルによる無矛盾性の証明が相対的性格のものであることは周知である。この方法によれば，一つの公理系たとえばユークリッド幾何の公理系の無矛盾性は，他の公理系たとえば算術の公理系の無矛盾性に帰着させることができる。それには幾何の基本的諸概念を算術の言葉で定義し，これによって幾何の公理が算術の公理からの論理的結論となるようにするのである。こうすれば，幾何の中の矛盾の存在は，算術の中の矛盾に帰着するはずである。この際，実際には証明し得ていないけれども，算術の無矛盾性は，初めから確立しているものと考える。このようにして，実数の算術の中に矛盾が存在しないならば，ユークリッド幾何にも非ユークリッド幾何にも論理的矛盾は存在し得ないことを示すことができる。

実数は，自然数の算術を基礎として構成しうるから，上に述べたことは，非ユークリッド幾何の確実性は，通常の算術の結果の確実性と同等であるということになる。算術の無矛盾性を他の理論，特に集合論によって証明することは見込みがない。それは集合論には矛盾が内在し

ているからである。それだから Hilbert は直接的証明方法，すなわち採用した公理系から二つの相互に矛盾する命題に到達することは決してないことを証明する方法を考えようとしたのであった。しかし形式的に数学の無矛盾性を証明しようとした Hilbert の試みは失敗した。1931年に Gödel は形式的算術体系の無矛盾性はこの体系の内で構成可能な手段によっては証明され得ないことを発見した。そこで数学の公理系の無矛盾性を証明するには，その段階のどこかで内容的な思考が必要であるという結論に達する。実数および自然的の概念の正当性は経験および実践的な適用性の中に見るのが正しい観点であろう。

ペアノの公理系は1，数，後者という三種の無定義概念が用いられる。すなわち「1は数である」「任意の数の後者は数である」「如何なる2数も同一の後者をもたない」等々である。ペアノの公理系を満たすものは通常の自然数に限らない。例えば1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$，……なる無限数列を考えれば5つの公理を満たしている。

数学教育を論ずる時に重要なことは，どのモデルがわかりやすく鮮明な印象を子どもに与えるかということである。またちがったモデルを比較検討することによって数の本質が理解されるのである。

9．移動モデルの検討

上述の4節から7節に述べたモデルを「移動モデル」と名づけよう。ここでは移動モデルの特徴等について論ずる。先ず端初的概念はある長さを決められた線分(有向線分)を1とし，それを直線上を一定の向きに移動させることを φ とした。φ を複合したものを ψ として順序の定義に入った。これらは直線上で線分を右に移動するのであるからイメージは容易であろう。

順序は線形移動を用いて定義し，自然数の整列性（定理13）を証明した。もっとも整列性は数学的帰納法の原理と同値であるから，この方法以外の順序の定義でも成り立つのである。整列性については以前に考察したことがある[6]。

加法は線形移動を用いて定義した。ここでの加法は2項演算$(m,\ n) \to m+n$ではない。2項演算の場合は m，n について対称的であるが，この加法は m に $\psi_{\varphi(n)}$ を加えた添加で，m，n について非対称である。「加えるもの」と「加えられるもの」とは通常は非対称に扱われることが多く，量の世界では不自然ではない。コンピューターにせよソロバンにせよそうである。教科書でも添加で和を導入している例も多いが，これに対して反対する意見もある[7]。加法の導入は合併からと言う人も多い。1998年の北海道の合同教育研究集会で菊地三郎が発表した「続入門期のたし算，ひき算」というレポートでは合併で和を導入している。その後「3＋2の問題文作り」を子ども達にさせたところ次のような文が出て来た。

〈①りんごが3こありました。2こかってきました。あわせてなんこでしょう。

②ツバメが3わわたってきました。つぎの日2わわたってきました。あわせてなんわでしょう。

③ちゅうしゃじょうにくるまが3だいとまっていました。2だいきました。ぜんぶでなんだい。

④ひだりのさらにりんごが3こありました。みぎのさらに2こありました。あわせてなんこ。〉

子どもにとっては添加のほうが合併より考えやすいようである。合併を表す④の場合，（3，2）のペアが演算の前に意識される。これは直積の概念である。これがむずかしいようだ。菊地の指導では左の皿，右の皿といういれもの（容器）をもちいている。

添加についてのもう一つの論点が $a+b$ が $0+a+b$ になるのでないかという批判である。このことは定理17の証明にも表れている。この点については直線上の自由ベクトルの連続操作で加法を定義するとよい。

乗法は線形変換で定義した。以前に積をスカラー倍とする方法を述べたことがある。スカラー倍を作用と考えるのである。作用は変換を引きおこすのである[8]。

除法と割り算定理についても前に述べた。整列性が余りのある割り算に効き目を発揮するのである。 (1998.11.24)

注

(1) 集合論の矛盾，Russellの逆理など。

(2) 以下の定理は直線上のベクトルの移動による1，2，3，……の定義に対して述べたが，ペアノの公理のみを用いて構成出来る。それは竹内啓「数の構造」（教育出版）に述べられている。定理の記述はこの本の一部の要約的記述である。

(3) 数学的帰納法が用いられるのは，モデルの構成にあたっても数学的帰納法なしには行えないからである。

(4) もちろん自然数の中にはじめから0を入れて定義してもよい。その場合ペアノの公理の記述も修正することが必要となる。ここでは N に0をあわせて $\bar{N}\{0\}$ を考えるのである。

(5) 乗法は写像で定義したが，その際必要なことは，その写像の線形性（加法性）と1に対する値 $\chi(1)$ である。遠山啓はかけ算を（1あたり）×（いくつ分）で導入しているが，これとの類似がある。すなわち $\chi(1)$ は1あたり量である。

(6) 山口格「自然数の除法と整列性について」北大教育学部「教授学の探究」No. 9（1991年）

(7) 教育出版の教科書（平成9年版）p. 26

(8) 山口格「数学教育における正負の数の指導について」室蘭工業大学研究報告（理工編）第45号（1995年）