中学校数学カリキュラム再構成への試み

―― 入門期の中学校数学を中心に　第1部　理論編 ――

須　田　勝　彦

（北海道大学教育学部）

目　次

は じ め に

今日，解決を迫られる教育問題は山積している。[1] 新学習指導要領をはじめとする多くの改善案が提起されており，論点も多岐にわたっている。しかし，多くの論点が列挙されることはあっても，中心部分は何か，どのような構造をもっているのかは私にとっては全く明らかでない。もちろん，それは誰かが一挙に解明しうるものではなく，教育に係わりを持つすべての人の叡知の結集を待たねばならないのだろうが，各人がそれぞれの領域において考えることも必要だろう。教授学の建設にあたる者にとって，教育実践の質的向上の課題は大きい。子どもたちが学ぶたのしさに日々躍動する姿があってこそ教育の改革はその内実を得るのである。しかし私には最近，特に新学習指導要領をはじめとする多くの改善案には，その実現を目指しているというよりはむしろ，それをすっかり諦めてしまったのではないか，という疑念さえ生じてくるのである。

これまで北大教授学研究室数学教育グループの研究は主として初等数学教育[2] 及び高等学校をフィールドとする中等数学教育[2] の基礎的諸概念に係わる教授プログラムの開発にあたってきた。中学校は受験との関係で実験的試みに挑戦することは困難だったこともあって，ほ

とんどまだ手がつけられていない。[3] しかし，実験的授業の可能性の問題とは別に，ある体系性をもった数学授業への提案を開始することは今日山積する教育の改善の諸課題への私なりの責務とも考え，準備状況ははなはだ不十分ながらそこに手をつけて行きたいと考えた。

幸い，北海道地区数学教育協議会札幌中学校サークルでは「教科書を読む」シリーズが2年にわたって続けられてきた。教科書を生徒の心で，あるいは数学教育の実践者，研究者の心で改めて丁寧に読んでいく試みである。その中で，中学校数学入門期に関する教科書批判のいくつかの論点とともに，対案とでもいうべきアイデアが生まれかけている。以下に記すのは，教科書の検討を通して考えた中学校数学はなぜ成功していないのか，という問題への現在の時点での解答の試みと北大教授学研究室数学教育グループで作成を開始した中学校数学の再構成プランの一部である。ほとんどがまだまったく漠然とした思いつきに過ぎず，理論的な検討もほとんどなされていないし，授業プランの提案にはかなりの距離がある。それでもこの段階で議論を頂き，自分の考えを進めて行く足がかりにしたい。なお，検討している教科書は教育出版『中学数学』(1997) であり，以下の教科書の引用は小学校も含めて同社のものである。

[注]

(1) マスコミをはじめとして，問題が山積していることの指摘は多いが，日本の津々浦々で貴重な教育実践が展開され，新しい世紀を担うにふさわしいたくさんの若者が育っていることの指摘はあまりない。このこと自体もまた山積する問題の一つである。

(2) ここでは，文部省学習指導要領の指定する教科名としては「算数」と呼ばれている数学教育の領域を「初等数学教育」，中学校及び高校では「数学」と呼ばれている領域を「中等数学教育」と呼ぶことにする。国民学校体制のもとで生まれた「算数」ということばは「算術」に比べて初等数学教育の進歩を反映したことばともいえようが，私の構想する初等数学教育も，文部省の云うところの「算数」さえも，「数を算える」ことを目標としているわけではないのである。ただし「算数」はその時々の学習指導要領によってその外延が確定しているが，私の構想する初等数学教育の外延はおそらく永遠に確定することはない。前者は行政によってなんとなく（例えば「ソロバンはどうしよう？」「いれておこうよ」とか「2次方程式はどうしよう？」「うちの家内が要らないと云ったからやめよう」というような調子で）決めるられるものであり，後者は実践的研究によって生産され続け，また破壊され続けて行くものである。

(3) 20年ほど以前，札幌の谷口祥子との共同研究による「2次関数」，同じく白井盛一との共同研究による「相似」，小樽市潮見台中学校との共同研究による「1次関数」などが取り組まれた。これらはその後の私たちのグループによる高等学校や小学校での教授プランづくりの基礎となった。

0　数学カリキュラム全体に内包する問題

0.1　思想または希望の欠如

小学校，中学校そしておそらくは高等学校までを含めて，日本の数学カリキュラムには根本的な欠陥がある(「日本の」という限定は，外国と比較してのことではなく，外国については検討が不十分であるための限定である)。それは全体として，どのような数学を教えたいのか，という理念が存在しないことである。「数学はこんなに楽しく，すばらしいものである」という思想がどこにもない。あるのは教えるべき項目の集合だけだ。

現行学習指導要領以来，「よさ」という奇妙なことばが流行しはじめた。たとえば中学校数学の目標は次の文で示される。「数量，図形などに関する基礎的な概念や原理・法則の理解を深め，

数学的な表現や処理の仕方を習得し，事象を数理的に考察する能力を高めるとともに数学的な見方や考え方のよさを知り，それらを進んで活用する態度を育てる。」およそ「基礎的な概念や原理・法則」であって，「理解を深め」てはみたが少しも「よさ」がわからなかった，などということはあるのか。「理解を深め」ることに並列して「よさを知」ることを目標としておくとき，そこでの「基礎的な概念や原理・法則」の内容は一体何でありうるのか。

たとえば新指導要領で小学校5年生の「台形」の面積の求め方が削除されるという。それが子どもの「負担の軽減」であるという。現行指導要領では，4年生で「面積の概念について理解し，簡単な場合について面積を求めることができるようにする」とある。「簡単な場合」とはなにか。指導要領に書かれているのは正方形と長方形だけである。教科書では「複雑な形の面積の求め方」として，長方形2個に分割可能な形などが扱われる。(教育現場ではこの部分が「問題解決力」とか「自力解決」とか「ねりあげ」とかいったことばをキー・ワードとする研究授業にさかんに取り上げられている。）そして5年生で「三角形，平行四辺形，台形などの面積の求め方」が扱われることとなっている。

私たち（北大教授学研究室数学教育グループ）の構想するカリキュラム(1)では，4年生の面積指導の目標は「多角形の面積」を完全に理解することである。そのための指導の骨格を構成するのは(1)二つの多角形の面積が等しいとは，二つの多角形が有限個の互いに合同な図形に分解できること（「たちあわせ」の原理）である，(2)任意の長方形は，任意の長さを一辺とする長方形にたちあわせることができる，(3)三角形は長方形にたちあわせることができる，(4)任意の多角形は三角形に分割可能だから，任意の長さを一辺とする長方形にたちあわせることができる，(5)多角形の面積は，長方形の面積論に帰着される，(6)長方形の面積は複比例構造をもつ，(7)したがって面積の単位は，長さの単位を一辺とする正方形を選ぶことが合理的である，などの「基礎的な概念や原理・法則」である。

このような指導によって面積論の一つの限定された領域，つまり多角形の面積については完全な理解が得られる。そこから，次の曲線に囲まれた図形の面積はどのように求められるのか，多面体の体積は多角形の面積とどのように同じでどのように違うのか，さらには一般に面積や体積とは何なのか，といった高次の課題への飛躍が準備される。

これに比して，学習指導要領，教科書ではこのような「完全な理解」はいつまでも実現されない。4年生では長方形，正方形の面積測度の求め方だけが指導される。なぜ長方形と正方形について考えるのかは示されない。5年生では平行四辺形と三角形だけが「たちあわせ」の対象となり，面積の「公式」が示される。台形は考えない。まして，多角形の面積など考えない。その状態のまま，こんどは円の面積に進む。

このようなカリキュラムの構成原理は面積に関してだけではなく，すべてについて同様である。2年生で乗法が導入される。しかし，乗法とは結局，加法（累加）であり，加法自体は既習である。新しいのはその結果を暗記しなければならない，という苦役だけである。自己に誠実な子どもはこれを拒否し，がまん強い子どもはなんとか暗記する。そしてそれをちょうど忘れるころを見計らって，3年生の乗法指導が始まる。子どもたちに，「君たちの記憶力は貧弱である」ことを教えるための構成のようにさえ見える。乗法九九の存在価値は多位数の乗法がそれをもとにしていることにあるのは誰しも，考えればわかることである。乗法を指導するということは九九（正確には0の段を含む十十）と分配法則によって（非負）整数の乗法はすべて原理的にはできることをまず示すことである。これを教えなければ，無意味なのである。この

過程の中ではじめて九九の暗記がもし必要ならば指導が可能だろう。

「面積とはこんなにおもしろいんだ」「かけざんって本当にすごいんだ」という子どもの認識の世界を空想すらしたことのない人たち，数学への思想も希望も失っている人たちがカリキュラムをつくり，「よさ」を論じているとしか思われないのである。

0.2 「賽の河原の石積み方式」

「基礎的な概念や原理・法則」は基礎的であることによって，おのずから螺旋状にくりかえし，発展する。恣意的にバラバラに分散することはその「よさ」のすべてを破壊する。かつて，1968年のいわゆる「現代化指導要領」批判の中でこの問題が論じられた。銀林浩は次のように68年指導要領を批判する。「第1は素地という考え方。これは現行の方がひどいともいえるのだが，今回でも依然として同じようなものである。素地(readiness)というのは，段階的積み上げ，あるいは螺旋的発達によって子どもの認識が作られていくという考え方である。小学校の多くの教科が，毎年同じような学習の周期的（1年を周期とする）繰り返しの観を呈しているのは実にこのためである。現行学習指導要領の割合は，その悪名高い実例であって，文部省は分数の乗除を割合で意味づけるために，2年から「の2倍」「の三分の一」，3年で「……は……の $\frac{2}{5}$」，5年で比の第1，第2用法，6年で第3用法と実に5つの学年にわたって，割合指導を積み上げたのであった。」「かつての割合の氾濫に匹敵する地位は今度は『関数的見方考え方』が占めることとなった。」「だいたい文部省は毎回の改訂で，何か1つのことにとりつかれ，それを強調するために各学年に分散配置して，少しづつ積み上げるように心を砕くのが常である。ところで，文部省の考え方，いや日本の数学教育界に強いこの伝統的な考え方『子どもの認識が螺旋的積み上げによって発展する』とは，何か科学的根拠でもあるのだろうか。」「大ざっぱにいって，子どもの認識の発展について，A）強化説，B）均衡説，という2つの考え方がある。……指導要領の素地は，もっぱらこの強化説の方にもとずいているといえる。」

以上の銀林の批判は日本の初等数学教育全体を貫く本質的欠陥である概念形成の過程の恣意的分散の問題点をえぐりだしたものと言える(4) さらに氏は，このような欠陥を克服する方途をも次のように提案する。「一般的概念を作るには，ただ経験を積み重ねてもだめであって，実は次のような手続きを踏まなければならない。1）まず，それが理解できる発達段階でなければならない。2）典型的実例を用意する。ここに典型的（typical）とは，一般概念の構造をもっとも忠実に備えていて，しかも余分の夾雑物をなるべくもたないものをいう。3）典型的実例からできるだけ一挙に一般概念に到達する。4）一般概念を有効に適用しうる応用例を適当な数だけ用意する。」「このことは，われわれが水道方式の実践から得た教訓でもあるし，またピアジェの発達心理学に関する成果とも一致する。またさらに，これはブルーナーがまとめたウッズ・ホール会議の成果とも一致するものである。」これらの批判は，数学カリキュラムが「一つのまとまった全体」から構成される「一つのまとまった全体」であるという魅力あふれる主張を内包する。銀林の提案する4つの段階は，知ること，考えることの楽しさを経験する「一つのまとまった全体」の最小単位の構成原理である(5)

それでは，このような単位が構成する全体の構造はどのような姿をしているのか。これは今後の多くの研究を待たねばならないが，先に述べたように「基礎的な概念や原理・法則」は基礎的であることによって，おのずから螺旋状にくりかえし，発展するのであるから，銀林の，素地指導の考え＝「螺旋的発達」＝「強化説」に基づくカリキュラム構成，という主張には賛成し

かねる。「ウッズ・ホール会議の成果」と一致するのであればなおのこと，スパイラル・カリキュラムは分散主義への批判として対置されるべきものだろう。私は，かつてこのようなカリキュラム構成法を「こまぎれ分散主義」(6) と呼んだ。しかし，意味のない苦役がくりかえし強制され，いつまでくりかえしても何の展望も見えてこないという意味で，より正確には，「賽の河原の石積み」方式というべきだった。

0.3 「単元」概念の空疎化

「賽の河原の石積み」は終わりがない点にだけ苦しみがあるのではなく，そのすべての過程がたんなる苦役から構成されていることにある。だからこのカリキュラムの欠陥は全体構造の欠陥とともに，個々のテーマに関する指導過程の構成法にも直接関連している。これは上の面積や乗法の例からも明らかである。それを教育学の概念と対応させるとすれば，「単元」概念の空疎化という表現が適当だろう。今日の学校教育で「単元」ということばは教えるべき項目のたんなる集合であり，教科書の「章」の区切りであり，また場合によっては定期試験の試験範囲を示すことばでしかない。

「Einheit」「unity」の概念は本来，カリキュラムがたんに教えるべき項目の羅列となっていることへの批判・克服の思想から生まれたものである。ヘルバルト派の「methodische Einheit」は認識過程を分析・総合の累層的な発展としてとらえた上で，その最小の単位としてのまとまりを，教材の導入，展開，比較，概括，応用などの教師と子どもの活動に即して組織しようとしたものである。これは先に見た銀林による一般化の形成段階の思想と本質的同一性をもつものといえよう。

アメリカで発展を見た経験単元，作業単元の概念は認識活動の源泉としての子どもの活動や生活経験に焦点をあてながら，「子ども」と「学問」とをいかに一体のものとして組織しうるかということを課題として産みだされた(7) 特にデューイの次のことばはその端的な表現である。「我々は，子どもとカリキュラムが，同一の過程を規定する二つの極にすぎないことを認識するだろう。ちょうど，二つの点が一本の直線を規定するように，子どもの現在の立脚点と学問研究の事実と真理とが授業を規定する。授業は，子どもの現在の経験から出発し，我々が学問研究と呼んでいる真理の組織的な体系によって提示された経験へといたる，持続的な再構成である。」(8)

日本でも戦後新教育の展開過程はもちろん，戦前に於いても及川平治(明石女子師範付属小)などによって単元の思想（及川においては「題材」の単位）は豊富な発展を見ていることを忘れてはならない。単元はその構成の内部に，子どもの能動的，主体的活動，分析・総合の思考活動，体系化と応用への発展などの契機を含んでいるはずのものなのである。「単元」概念がこのような生命を失ったときに，教育についてなにひとつわかっていない人に生ずるのが「学校では知識ばかりではなく，総合的な学習も必要ではないのか」という発想であろう。(もちろん私は今後各学校段階で展開されるであろう「総合的な学習」の豊かな可能性について否定する者ではなく，反対に多くの期待を寄せる者の一人である。)

中学校数学においても，そのカリキュラムを構成する作業は，項目をバラバラに分解して，あれも必要だとか，これは要らないのではないか，などという何の根拠もない思索によってではなく，本来の意味で単元をいかに構成できるか，またその単元の全体がいかなる希望を語ることができるかという地道な問題の検討に拠らねばならない。

[注]

(1) 氏家英夫「比較と測度の構成による面積概念の指導過程」(北海道大学大学院教育学研究科1980年度修士論文)

(2) 須田勝彦，氏家英夫「分配法則を軸とした乗法指導の試み」(北海道大学教育学部教育方法学研究室編『教授学の探究』No. 3，1984年)

(3) 銀林浩「指導要領の思想」(『数学教室』No. 180，1968.9)

(4) 初期国定教科書の頃の教育実践家である廣田虎之助が「四則併進主義」を，四則の内的関連を覆い隠すものであること，思考の自然な発展(子どもがある数範囲の計算を理解したら，直ちにそれをより広い数範囲に拡張したくなること)を阻害すること，同一の計算術を確実に理解する暇がないこと，原理，法則の理解が得られないことなどの諸点を挙げて批判した。そして「環状的直進主義」を実践的に提唱した。これは数学カリキュラムにおける分散主義批判の優れた遺産と云うことができる。廣田虎之助『聚楽式算術教授法』上巻(1908年，寶文館)参照。

(5) 北大教授学グループにおける一般化の過程への提言は例えば高村泰雄・丸山博『環境科学教授法の研究』で展開されている。

(6) 例えば須田勝彦「明日はどうなる小学算数」(数学教育協議会1998年全国大会発表，青森県三沢市)で述べた。関連部分を引用しておく。

「(教科書の構成で――引用者)何より問題なのは，学習指導要領の責任ですが，「こまぎれ分散主義」を原理としていることです。「こまぎれ分散主義」とは，概念形成の単位としてまとまっているはずのもの……を分解してしまい，概念形成の連続性を破壊するようなカリキュラムの構成原理のことです。外延量の指導で，1年で比較，2年で単位と分けているのはその典型例です。比較から単位へという思考の連続的発展が分断されています。「素地指導」と呼ばれるものもすべてこの原理の産物です。このような学習指導要領の構成法を「スパイラル方式」と呼ぶ人もいますが私は不適切だと思います。人間の認識の発展はスパイラルです。「長さ」などの量を例にしても，いくつかの理解の仕方のレベルがあります。具体物から長さという量を抽象し，自然数で表す段階，長さを表すには自然数だけでは不十分なことを知る段階，長さという量の全体が半直線と同型なことに気がつく段階，2点間の距離を2点を結ぶ線分の長さと考え，三平方の定理などで長さを求める段階，曲線の長さを考える段階，など，前の段階を前提としながら，長さについての異なった理解の仕方に次々と進んで行きます。それらはすべて「実数」や「連続性」などの概念が形成される長い筋道の節目を構成しています。こまぎれ分散主義はこれとは違って，同じレベルの認識形成の課題が，何の理由もなく分断されているに過ぎません。

教課審答申ではいくぶんかの改善も期待できますが，授業時間数をとにかく削減しようという動機だけが先行して原理の誤りを認めていないとすれば，単にレベルが低くなってしかも分かりにくくなるだけ，というおそれも十分にあります。」

(7) 詳しくは佐藤学『米国カリキュラム改造史研究』(1990年，東京大学出版会)参照。

(8) J. Dewey『The Child and the Curriculum, The School and Society』(PHOENIX BOOK, Chicago)，訳は佐藤学，前掲書(7)による。

1 入門期における教科書の問題点

中学校数学の入門期における不成功は次の5点が相互に関連しあって生じていると思われる。

1．正負の数から入ること

2．計算のやり方，答えの出し方を指導の目標にしていること

3．代数の導入方法が混乱していること

4．重要な数学的事実を「小学校での既習事項」で済ませていること
5．「証明」が不当に先に延ばされていること

1.1 正負の数から入ること

中学校数学を正負の数からスタートさせることはありうることだろう。ただし，それが可能となるためには次の条件が満たされていることが望まれる。(1)数に関する量的な意味づけ，幾何学的なイメージ，及び演算の意味の拡張等に関する十分な指導がなされていること。(2)代数的抽象能力が既にある程度形成されていること。(3)仮にそれらが不十分なときにはそれを補うだけのていねいな説明が準備されること。

現在の中学校入学者の多くについて，(1)，(2)の条件は満たされているだろうか。(1)数及びその計算を量的な意味づけあるいは幾何学的なイメージにおいてとらえる指導はなんらかの形で小学校でもなされてきただろう。それがなければおよそ「わかっている」という心の状態は起こりえないからである。しかし，小学校数学もまた，そのような指導のもとに数とその計算の基礎的原理を理解することよりも，計算を速く，誤りなく行うことの方がはるかに重視されていて，計算の原理を説明できる子どもの存在はほとんど期待できない。(2)代数的抽象能力は小学校ではほとんど指導されていないと見てよい。乗法や加法の交換法則，結合法則，分配法則がバラバラに，しかもあまり「よさ」がわからない形でふれられているにすぎない（1.4　参照）からである。(3)正負の数の量的理解のためにはこれまでの量概念を拡張して対称量が必要となる。しかし，教科書ではどのようなイメージを対称量として考えるかが明確でない。導入は温度計に示された温度であるがこれが対称量といえるかどうかは疑わしいし，温度は差の相等が認めにくい量であることも明らかである。幾何学的イメージとの対応は数直線を考えることだが，これも「既知」事項では済まされない重要性を持っているだろう。また，代数的側面として，非負有理数の範囲では減法が自由にできないことが問題となるが，これについては正の有理数の範囲で除法が自由にできることとの対比で考えることが有効だろう。教科書にはこれらの配慮は皆無といってよい。

1.2 計算のやり方，答えの出し方を指導の目標にしていること

教科書には，正負の数及びその計算について，主に数直線上の移動（加減），負の速さや負の時間（乗法）など，それなりの説明の工夫が見られる。しかし，そのような説明を一通り終えた所で行き着くのが次のような「まとめ」である。「数の大小(1)正の数は 0 より大きく，負の数は 0 より小さい。正の数は負の数より大きい。(2)正の数では，その絶対値が大きいものほど大きい。……以下略」「正の数，負の数の加法(1)同符号の 2 数の和は，2 数の絶対値の和に共通の符号をつける。……以下略」

そこまでの説明はそれとして説得力がなかったわけではない。この「まとめ」はたしかに説明したことの結果ではある。しかし，ここに「説明はこの『まとめ』を導くためのものであった」とか，「説明よりもその結果が大切である」という思想が潜んでいないだろうか。もちろんそれは教科書の罪ではなく，教師の用い方に問題があるといえばそれまでである。しかしそこに，せっかくの数直線等のイメージを忘れ，「重要事項」にマーク・ペンなどで印をつけながらそれを記憶し，計算問題を解くに際しては「これはえーと，異符号の和だから，絶対値を比べて……」と考え込む中学生の姿が思い浮かばないだろうか。最悪の解法に子どもを追い込むし

かけとして「まとめ」が機能していないのだろうか。私にはこれが杞憂とは思われないのである。中学生を無意味の世界に迷い込ませないためには，このような「まとめ」など書くべきではない。

1.3 代数の導入方法が混乱していること

正負の数の導入は代数指導体系の一環をなすものである。しかし，教科書においてはこの意識がどれほどあるのか疑わしい。中等数学教育においてこの代数指導体系の全体がどのような構成になるかは現在のところ不明であるが，正負の数の導入を容易にするためにも，その前に一定の代数的抽象の能力を形成することの有効性は予想できることである。たとえばかつての数学教育改良運動を代表する教科書の一つであるE. Borel『代数学』(原著1903年，石井省吾訳1926年，山海堂)では第1章が文字の使い方，代数公式にあてられた後，第2章で正負の数が導入されているし，同時期アメリカの教育心理学者H. Ruggが数学者J. Clarkとの数年にわたる共同研究を経て作成した『初等数学の基礎』(原著1918年，新宮恒次郎訳1926年，山海堂)は，文字の使用，公式の利用，方程式，代数式(代入，指数)，縮図，相似三角形，三角比，統計表及びグラフ，関数の入門などを経てようやく第9章で負の数の導入が図られている。負の数なしで方程式を指導することなど，賛成しかねる所も多いが，負の数の導入は慎重に代数的思考を形成してからという点は参考になろう。

戦前の数学教育から学ぶことができるのは，正負の数がこのように慎重に導入されることと並んで，6年間の算術教育を終えた生徒に対し，代数から始めるのではなく，なお算術から始めていることである。高い立場から数とその演算について整理しながら完全は理解をはかることを目的とした戦前中等教育数学としての算術の経験は，その復原をめざす必要はないにしても，その教育内容構成・教材構成に多くの貴重な遺産を内包しているのである。

正負の数を第1章に，文字式使用を第2章に，という構成は代数的抽象能力の点からだけではなく正負の数の指導内容の構成の面からいっても疑問である。正負の数を導入する前に簡単な素材を用いて代数入門を構成すれば，代数的な標記を駆使することによって得られる容易さと，理解の水準の高さ（計算の仕方ではなく，法則の理解を介した計算の遂行）が十分に期待されるだろう。

また，代数入門にあたって出現する多くの約束ごと（乗法記号の省略，数と文字の順序，べきの記法とその先行原則，など)に混在する代入原理や代数法則，公式の利用，方程式など，教育内容の混乱，混雑を抜本的に整理するためにも，簡単な代数入門を先行させることの有効性は十分に予測できる。

今日，多くの中学校の教員から「生徒は文字アレルギーだ」「文字がでてきたとたんに思考が停止する」といった声が聞かれる。私にはこの原因が，(1)正負の数を指導し，あまりよく理解されていない上に，(2)よくわかっていない正負の数の範囲で，文字式の使用と代数入門がかなり混乱した方法で指導される，という構成法に起因するように思われてならない。そして，代数入門の混乱の原因は，教育内容上の目的がはっきりしないことにあるのではないか。また，「文字の使用」は，ある数学概念を教育内容としてもつ時に必要なのであって，自己目的的にあるわけではない。最初の文字の導入の目的を明確に「数の代数的性質の表現」と限定することがこれらの問題すべての解決策ではなかろうか。代数学に特定しない文字使用の一般的規則はこの中で扱えばよいのである。

1.4　重要な数学的概念を「小学校での既習事項」で済ませていること

これについては多言を要しない。先に述べたように，代数的抽象能力は小学校ではほとんど指導されていないと見てよい。小学校教科書では乗法や加法の交換法則，結合法則，分配法則がバラバラに，しかもあまり「よさ」がわからない形でふれられているにすぎないのである。やや詳しく見てみよう。

教科書では，「正の数負の数」が中学校の最初の単元となっている。そこでは新しい数としての負の数が導入されると共に，加法，減法，乗法，除法などのことば，さらに交換法則，結合法則，分配法則などの代数的法則が指導されることになっている。これは私から見たら明らかに「二兎を追うもの……」である。しかも，交換法則，結合法則の扱いは「小学校で学んだ加法と同じように，正の数，負の数の加法でも次の計算法則が成り立つ」というだけの「説明」である。これはもちろん説明であろうはずがなく，ただの断言である。拡張された数の範囲でなぜ成り立つのかが示されねばならない。また，「小学校で学んだ」ことについて，中学校数学は当然理解しているべきこととして指導するのは重大な間違いであろう。小学校で十分には理解できなかった子どもが少なくないだろうし，また十分理解できるようには教わっていないはずである。

たとえば分配法則は，乗法と加法の本質的関連を示す重要な法則であるが，それにふさわしい扱いは行われていない。この法則が指導されるのは4年（上）「式と計算」の単元であるが，そこでは「かっこ」の使い方，乗除先行原則，分配法則，逆算という，それぞれ異なる4つの代数的事項が並列されていて，「法則の理解」としてではなく「計算のしかた」としてのみ統合できるような取り扱いとなっている。そして，交換，結合，分配，そして0や1に関する法則はそれぞれ別なところで指導されており，法則としての理解や法則相互の関連の理解は不可能である。しかも，法則が指導されるのは法則を指導しているところだけであって，5年生や6年生では乗法の実行のさいの分配法則の無自覚な適用を除いてほとんど用いられることはない。使われることのない「法則」が理解されるだろうか。その場だけでは理解されたとしても，「記憶」されるだろうか。このようなことを「既習」として扱うことは明らかに無謀であろう。

他のあらゆる重要概念についてもおそらくは同様で，小学校で何を習ってこようと，そのすべてが子どもたちの血や肉となり，日々働いているわけでは決してないのである。反対に，早い子どもで小学校低学年（特に乗法がそのはじまりであることが多い）から，多くの子どもは中学年（「賽の河原の石積み」の「効果」が発揮してくる）から，算数が嫌いになったり分からなくなったりしている。そのようなあてにならない既習事項に「依拠」し，しかもそのことによって中学校で新たな説明を要することさえ「省略」するのは中等数学教育の構成上致命的ともいえる欠陥であろう。

また，中学校教師はほとんどすべて，経験的に「既習事項」が少しも既習にはなっていないことを知っているはずなのだが，なぜか授業では知らないふりをする。「これは小学校で習ったはずだ」「4年の教科書にあったはずだぞ」くらいならまだよいのだが「小学校で何をやってきたんだ」という教師さえいると聞く。こんなことを言われて，子どもが発奮し，ゼロからの出発に自ら取り組むはずがない。子どもに「やっぱり俺はだめなんだ」と悟らせているだけである。

教科書ばかりではなく，教師もこのような思想で中学校数学の授業が行なっていることに戦慄をおぼえるのは私だけだろうか。

1.5 「証明」が不当に先に延ばされていること

中学校数学で教師も生徒も，大変な苦労を経験するのが「定理と証明」である。「定理と証明」さえなければ，という声が，教師からも，生徒からもしばしば聞かれる。この原因と解決策はかなり以前から指摘されているが，中学校数学としてはほとんど改善されていない。原因と解決策に関するかつての遠山啓による次の提言(1)は今日なお十分な検討の価値を有すると思われる。

「幾何教育の改良をさまたげた大きな障害の一つとなったのは，形式論理の練習を幾何学のなかでやらせようという思考習慣が根強く残っているからである。形式論理の練習を数学教育が受持つとしても，それを幾何学のなかでやらねばならない，という理由は何もない。」「ユークリッド幾何の論証が形式論理の唯一の練習場であるという謬見はかなり多数の数学者をも捕らえているらしい。しかし事実はその逆である。」その理由として挙げられるのは次の 2 点である。「幾何は肉眼で見えるだけに証明しようとする命題が前もって直観的に明らかとなってしまう。だから生徒たちは，わかり切ったことをなぜもったいぶって証明したりするのか，という疑問を抱く」「描かれた図形を眺めながら証明を考えていくことには代数学にはない困難が伴う。たとえば代数では一般的な数は a，b，c ……等の文字で表すことができるから……恒等式の証明は，その一般性を少しも失うことなしに完遂することができる。ところが図形ではそれができない。紙の上にかいた三角形はもはや特殊な三角形であって，一般的な三角形は決してかくことができない。」その解決策としてつぎの 3 点が提案される。「論理そのものを学ぶには，それを記号化した記号論理学を直接学ぶのがいちばんよい。」「そして論理の練習場としてもっとも適しているのは恐らく整数論であろう。」「今後は幾何教育は論理的思考の修練という不似合いな任務を他に肩代わりして，生々した直観力を養うという本来の任務に専心するようにすべきである。」

多くの中学生が証明を嫌い，そのゆえに幾何を嫌い，そのゆえに数学を嫌いになる理由に的を得た説明がなされていると思われる。ただし遠山の理論展開を構成する論理，論証，形式論理，記号論理，そして直観といったキー・ワードについては，さらに緻密な検討を要するであろう。例えば，幾何教育の任務が「生々した直観力を養う」ことであるとして，そこに論理は介在しないのだろうか。何かあたりまえのようなことを無系統にならべてあって，何の学習かさっぱり理解されなかったかつての「直観幾何」の失敗はどこにあったのだろうか。論理性，論理的思考とは，形式論理や記号論理学の諸法則に従うことなのだろうか。また幾何学であつかう諸定理ははたして「肉眼で見えるだけに証明しようとする命題が前もって直観的に明らかとなってしまう」ことばかりだろうか。等々，数学教育学の建設にあたって解明を求められる多くの基本的問題がここに潜んでいるのでである。

ここで簡単に私の仮説的な見解を述べておこう。記号論理学は数学における論理性の一面にすぎない。数学の論理性は，その学問の内部における本質的連関を解明する過程そのものにあって，その点で他の諸科学，諸学問それぞれに内在する論理性と並列的な関係を構成するものである。並列的ではあっても相互に関連しあっており，その全体が人間の「論理性」を構成するのであるが，全体構造はまだわかっていない。数学の論理性は，その学問の内部における本質的連関を解明する過程そのものなのだから，これは特定の時期，たとえば中学 2 年の幾何にはじめて現れるべきものではなく，初等数学教育のはじめから論理的であることが求められるのである。さらに初等数学教育のずっと以前，たとえば子どもが「どうして？」という問を発す

ると同時に，既に論理的思考の発達の道程を歩みはじめていると見るべきであろう。中学校数学の不成功の原因は幾何において証明を含むことではなく，そこに至るまで証明という一つの論理的形式を与えられてこなかった点にある。より明確で，より平易な対象を考えながら論証の形式を身につけるべきである。たとえば「整数論」はその最もふさわしい対象の一つであろう。一般に代数の領域は最初に証明の形式を学ぶのに適している。

幾何教育においても，その論理性の指導は2つの側面から考えられよう。一つは，幾何学的諸概念，あるいは幾何学的諸事実の内的連関，本質的連関を明らかにする課題であり，それは数学教育の研究者,実践者が常にその解明を求め続けるであろう教育内容の構造の問題である。これは中等数学教育にふさわしい新しい公理系の設定とそれに基づく新しい教材の構成をゴールに持つ課題である。いま一つは，代数等の指導を通して獲得した証明という形式で，そのような教育内容，教材を生徒が自らのものとする課題であり，そこでは生々した直観力が論理を支え，また論理が生々した直観力を養うこととなろう。

［注］

(1) 遠山啓「幾何教育について」(『数学教室』No. 195，1969年，国土社)

(2) 数学教育において論理と直観は対立的または相補的に捉えられることが多い。数学者や科学者が自らの認識過程を反省的に捉えて，その相互関係を論ずるさいのことば（例えばポアンカレのように）としては傾聴に値するが，数学教育学の建設という立場からは有効性を持つ概念とは思われない。論理なき直観と直観なき論理の存在が前提としてあり，その上でその双方の必要性が論じられる，またはその折衷の必要が論じられるにすぎないからである。数学教育のいかなる局面においても，論理なき直観も直観なき論理も存在しないとすれば，それぞれの概念の，それぞれのカリキュラム上の位置に即してその具体的展開のあり方が論じられるべきであり，それを数学教育学における「論理」の内実と考えるのが生産的だろう。須田「解析学の入門コースを構成する諸要素」(合同教研実行委員会編『北海道の教育』1987年版）参照。

2　中学校数学入門課程再構成の目標

以上の検討から，新しい中学校数学入門課程の目標として次の4点が導かれよう。

1．手足のように，便利な道具として文字を使うこと
2．負の数の導入以前に，非負の数の代数的性質を示すこと
3．非負の数と半直線に対応，数の幾何的イメージを形成すること
4．正負の有理数の量的，代数的，幾何的性質を知ること

入門課程は全体として初等数学学習の内容を高い立場から整理しながら自然に中等数学の内容・方法を導入することによって初等教育での数学の理解が不十分な所を補いながら，高次の抽象的思考に誘うことを目標とする。そのため，文字を早期から使用する。「文字は難しい」という「常識」の誤りを正すことは数学教育全般の大きな課題である。今後の実験に待たねばならない問題も多いが，小学校の低学年から文字の使用は可能であろう[1]。中学校までにほとんど文字を使用しなかった，または理解しなかった生徒に，数の代数的法則性の明示を主な目的として早期から文字を導入したい。「代数学の目的の一つであり，とりもなおさず初等代数学の主なる目的とする所は，一般の推理を容易く実行し得て，而かも，一般の規則を簡単に述べ得る様な簡潔な言葉を与えるにある。」(E. ボレル，前掲書)

そのため，まず自然数の範囲で成立する演算と順序の諸法則を定式化することを中心に代数の基礎的理解を計る。演算は小学校では4則とされてきたが，中等数学教育では基本的には2則であり，加法と乗法を中心とする。次に連続量の表現として非負自然数，有理数（分数，小数）の概念が必要であること，[2] またそれらの加法，乗法に関する代数的性質，及び大小関係についての性質を整理する。さらに自然数，有理数と半直線の対応を知り，数と幾何学的イメージとの相補的関係を利用できるようにする。

負の数の導入にあたっては量的方法（対称量，[3] 有向量）と代数的方法（加法半群から加法群への拡張），及び幾何学的イメージ（直線との対応，または1次元の幾何）[4] などの各側面から取り扱い，総合的な認識形成をめざす。

上の方針に従ってまず中学校数学入門の課程（「中学数学へ，ようこそ」シリーズ）を，次のような構成からなる短い単元別教科書（UNI-TEXT）にまとめたい。

単元Ⅰ　自然数と2つの演算
単元Ⅱ　数・量・半直線
単元Ⅲ　正の数，負の数

「中学数学へ，ようこそ」シリーズはこれで終わる予定で，それに続く「定理と証明：数学の言語で整数の性質を研究する」「代数計算のすべて」「変化と運動の数学」「方程式のすべて」「幾何学の基礎」「合同と対称」「相似変換」などのいくつかのシリーズで中学校数学の根幹部分の指導体系を作成し，提案して行きたい。なお時間数はたとえば単元Ⅰ～単元Ⅲは教科書の第1～第2単元のほぼすべてをカバーするが，教科書の標準時数よりもかなり少ない時間で可能であろう。

次章では単元Ⅰ，単元Ⅱの教育内容の基本部分を示し，第2部で授業プログラム案を紹介する。授業プログラム案は数学教育グループ（大学院博士後期課程：高橋哲男，石川高行，学部学生：西崎結，平賀沙織，理学研究科：村守隆男，及び須田）の共同研究の成果であり，単元Ⅰは須田が，単元Ⅱは西崎が中心となって取りまとめた。

[注]

(1) ソビエトのダヴィドフは小学校1年生を対象とした代数指導のプログラムを作った（ダヴィドフ，土井捷三訳『教科構成の原理』，1975年，明治図書参照）。彼の構想する数学カリキュラムの体系は連続と離散の弁証法を欠いている点（連続量一元論）に於いて賛成しないが，文字の使用が初等数学教育においても十分に可能であるとする見解には賛成し得る。

(2) 分数については田村二郎『量と数の理論』（1978年，日本評論社）の，数を量の倍変換とする考え方で一貫する考え方を教育内容の中心とした。小数についてはルヴェーク，柴垣和三雄訳『量の測度』（1976年，みすず書房）の「長さの測定によって整数から最も一般的な数に移行する」という考え方を教育内容の中心とした。

(3) 田村二郎（注(2)）は，負の数も量を対称量に拡張し，対称量の線形変換として説明する。この方針の高等学校の数学授業での具体化の試みとして，氏家英夫「高校生のための量と数の理論」（帯広白樺学園高等学校『研究紀要』平成4年度）がある。

(4) この立場からの負の数の導入は古くからさまざまに試みられている。例えばブーレー，小倉金之助・武邊松衛共訳『初等代数学』1919年，山海堂）は「一つの軸上に在る線分に関する理論は，一には代数学を幾何学に応用するに際して極めて重要な任務を有し，又一にはこの理論の初歩の知識は負数の原則の説明をして著しく簡易ならしむるの便あり。この二つの理由により先ず一つの軸上に在る線分の初等的理論より始めん。」

とし，線分の接続のなす代数的性質を示すことによって負の数導入の準備としている。

3　単元Ⅰ，単元Ⅱの教育内容構成の概要

3.1　自然数と実数

「数とは何か」という問いは数学教育全般に係わる基本問題である。小学校で最初に数を学習することから始まって，有理数，実数の構成，自然数自身の公理的考察に至るまで，数学教育のすべての段階で様々な角度から研究し続けられる。数学カリキュラムの螺旋構造の中心部分といっても過言ではないだろう。

しかし，小学校では自然数を取り扱っているにもかかわらず，学習指導要領，教科書には自然数という数のまとまりも，自然数ということばも存在していない。学習している対象のトータルな把握は全てにわたって欠如しているのだが，数については特に際立っている。教科書ではわずかに3年の「分数」の単元で「$\frac{1}{3}$や$\frac{2}{5}$のような数を分数といいます。」，「小数」の単元で，「0.1，0.6，2.7のような数を小数といいます。」「0，1，2，3のような数を整数といいます。」という記述があるだけである。一般に例示は，その概念の内包を理解するのに有益だが，ここには概念の内包がない。しかも，「整数」，「分数」，「小数」がそれぞれあたかも排反するものであるかのような誤解さえ生ずる。

中学校教科書では正の数，0，負の数，正の整数，負の整数，自然数，数などいくつかの数の集合の演算に関する性質と，ベン図によるその関係が示されるが，生徒に理解できるようにはなっていないと考えられる。なぜ「自然数」という数のまとまりが必要なのか（教科書では「正の整数」ということばがあれば十分である），ベン図が初めて扱われるが何の説明もない，「分数や小数を含んだ数」が除法に関して閉じていることはこの段階ではわかっていないはずである，等多くの問題を含むのである。より根本的な問題として，ここでは有理数＝数として扱い，3年で2次無理数がでてきた時に，有理数でない数が存在すること，それを無理数ということ，有理数と無理数を併せて実数ということ，などの指導がなされることである。無理数は$\sqrt{2}$のような，何か特別に例外的は数で，有理数の集合の外壁に点在するカビのような存在ではないか，という誤ったイメージに生徒を誘い込む。

自然数と実数という2つの概念が基本であり，それ以外は派生的である。自然数，実数がそれぞれいかにして発生するのかについて，正しいイメージを形成することは中等数学教育の重要な課題である。単元Ⅰでは自然数を有限集合の大きさを表す数，単元Ⅱで実数を数直線上の点を表す数と定義することが本プランの特色の一つである。

数学カリキュラムの様々な不合理の中でも頑固なのは自然数に0を含まないことである。教科書では自然数を「ものの個数や順番を表す数，1，2，3，4，5，……を自然数という。自然数は正の整数と同じである。」という定義となっている。イスラム経由の数学が伝わるまでの長い間0を知らなかったヨーロッパ数学の歴史に現在もなお制約されることの愚かさに加えて，数学カリキュラムの構成上も多くの不自然さを生ずることは明白である。たとえば既にある概念（正の整数）をこと改めて別なことばで「定義」することは意味のないことであるが，より大きな問題は「ものの個数」に0が含まれないことである。空集合の存在を認めないのは極端に云えば数学の否定でさえある。また，何進法であろうと，0がなくてはどうにもならないのだから現在のカリキュラムでは自然数の範囲では自然数を表す記数法さえ得られないことに

なる。なお，順序を表す数は言語習慣としては0から始めるよりは1から始めることが多いが，あくまでも習慣であって本質的なことではない。要は順序が分かればよいのである。

従って，自然数の定義に0を含める。分離量の表現としての自然数，拡張された分離量の表現としての整数，そして連続量の表現としての実数，という数の発生的本質に従ったカリキュラムが望まれるのである。

3.2 十進法

かつての初等数学教育に「四則併進主義」という，なんとも「かったるい」方法が存在しえたのは，どのような言語による命数法でも，演算の導入以前に十進構造による自然数の全体構造を説明することが不可能だからだろう。昔の算術啓蒙書が，最初に「数の名のこと」という章を設け，大きな数から小さな数に至るまで一挙に導入しえたのは，学ぶ者がソロバンなどである程度十進構造を理解していることが前提されたと想像される。数の導入から「任意の自然数を表現する」「任意の実数を小数で近似する」という認識に至るまで，明らかに大きな距離が存在するのである。しかし，小学校算数のカリキュラムのような「賽の河原の石積み方式」が唯一の解決法ではないこともまた明らかである。小学校においても「任意の自然数を表現する」「任意の実数を小数で近似する」という認識は十分に可能なはずである。

これが満たされていない現在，実数の十進記数法による表現についての認識の形成は中学校数学のほどよい出発点となるだろう。また，この教育内容構成においてかつての中等数学教育における算術科の構成に向けられた多くの先達の工夫から学びとるべきことは多い。小論ではその課題はほとんど全て残されたままである。

3.3 演算の定義

小学校では，四則演算の意味と計算方法を学習したことになっている。しかし，自然数の加減計算の実行までは多くの子どもがクリヤーしていることは確かだろうが，それ以上になると確かなことはほとんど期待できないのが現状であろう。特に乗法及び除法の意味についての認識は大学生さえ怪しげなものであることは以前から知られていることである。「復習」という範疇ではなく，すべては定義され，定義に基づいてその性質が導かれるべきものである，という数学の精神，とりわけ中等数学教育がはじめて意識的にその形成をねらう数学の精神に基づいて演算の意味が改めて指導されねばならない。もちろん，この段階で公理的方法がふさわしくないことは明白である。豊かな直観に裏づけられた論理的思考の形成の指導はすべての中学生に対して新鮮な学習を提供するだろう。

(1) 有限集合の合併に基づいて加法を定義する。このことさえ，合併よりも増加を基本とする小学校教科書の体系においては「既習事項」ではないのである。0の性質，交換，結合法則を理解する。これらもまた，自然数を有限集合の大きさ，加法を合併で定義することによってはじめて明らかになる。

(2) 乗法を定義する。小学校2年生での乗法指導で，一応は「1当たり量×いくつ分」で乗法の生ずる場面が指導され，倍や累加の考え方も用いられている。しかしそれらはすべて九九の暗記という「大目標」に至る手段にすぎなかったのであり，九九の暗記とともにおそらくは忘れ去られていることだろう。乗法の生ずる場面の典型としての「1当たり量×いくつ分」，その結果を得る手段としての「倍」，それを幾何的イメージとして定着させるタイル図，また

は面積図，などの多角的な視点から乗法の意味及び乗法の交換，結合法則などを理解する。それらを文字を用いて表現しながら，さらに分配法則，乗除先行の原則，１，０の乗法的性質などに進み，それらの適用としての乗法計算のしくみを理解する。

(3) 累加と累乗を対応させながら理解する。これまでの累乗の指導は累加と切り離され，というより累加の概念が存在せず，そのことによって $2^3=6$ のような誤りがなぜ誤りなのかを理解させることができなかった。加法，乗法の性質はそれぞれが単独で認識されるのではなく，両者の対比及び関連で理解されるのである。

(4) 自然数について，十進法がない場合について(1)，n 進法の考えが欠如していたらひどく繁雑になること，(2)，２進法は合理的な方法であること，の２点から理解する。

(5) 分数，小数の演算がどのように自然数の演算に還元されるかを示し，自然数の演算に還元されることによって自然数の代数的諸性質を保存することを明らかにする。

(6) 実数について，数直線上の任意の点を表す数として定義され，その表現が一般には十進無限小数であることを示す。そのことによって，無理数が何か特別に例外的な数で，有理数の集合の外壁に点在するカビのような存在であるかのような，事実とは大きく異なった誤解に陥ることを防ぐ。