



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	分数の教育内容・教材構成に関する実験的研究：授業書「新しい数一分数（改訂版）」と実験授業によるその検証
Author(s)	岡野, 勉; 大田, 邦郎; 山川, 健太郎 他
Citation	教授学の探究, 18, 1-70
Issue Date	2001-03-19
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/13622
Type	departmental bulletin paper
File Information	18_p1-70.pdf



分数の教育内容・教材構成に関する実験的研究

——授業書「新しい数一分数（改訂版）」と実験授業によるその検証——

岡野 勉 (新潟大学教育人間科学部)
大田 邦郎 (千葉大学教育学部)
山川健太郎 (新潟大学大学院教育学研究科修士課程)
神戸 康寿 (新潟大学大学院教育学研究科修士課程)

目 次

0. はじめに	1
1. 授業書「新しい数一分数（改訂版）」とその解説	3
(1) 分数カリキュラム編成の歴史	3
(2) 指導過程構成の基本的観点	4
(3) 指導過程の全体構想	6
(4) 各問題等の解説	7
2. 実験授業による、授業書「新しい数一分数（改訂版）」の検証	20
(1) 授業過程の分析・評価	21
(2) 評価テストの分析	52
(3) 感想文の分析	61
3. おわりに	70

0. はじめに

授業書「新しい数一分数」は、1976年、北海道大学教育学部教育方法学研究室数学教育グループにおいて、大田邦郎を中心に作成された授業書である。この授業書の作成にあたり、同グループにおいては次の視点を設定した⁽¹⁾。

- (1) 実在の量的側面から分数を抽象し、少なくとも四則演算までは量分数で一貫する。すなわち、長さの測定において、端下量の処理方法の一つとしての互除操作を媒介とする。また、分数の構造を正確に反映するシェーマとして、「タイル」を採用する。
- (2) 有理数のひとつの表現としての分数に特徴的な性質それ自体を、他の内容から相対的に独自の内容として指導する。すなわち、分数の加減算の前提でもある、分数の変形(仮分数 \leftrightarrow 帯分数、倍分・約分および倍分の延長としての通分)をすべて加減算の前に指導する。加減算は同分母と異分母とで分断することなく、ひとまとまりの計算体系ととらえ、「水道方式」を適用して再構成する⁽²⁾。

以上の視点にもとづき、次の章に従って、授業書を構成した。

(1) 大田邦郎「小学校の分数指導についてのいくつかの問題」、『数学教室』No. 277, 1976年3月, 国土社。大田邦郎「小学校の分数指導における新しい試み」、北海道大学教育学部教育方法学研究室編『教授学研究シリーズ』第3号, 1978年。

- 第1章 新しい数一分数
- 第2章 分数のヘンシン その1 (仮分数 \leftrightarrow 帯分数等の変形)
- 第3章 分数のヘンシン その2 (倍分・約分による変形)
- 第4章 通分
- 第5章 分数のたし算
- 第6章 分数のひき算

以上の視点は、民間の教育研究団体である数学教育協議会による、その時点までの研究成果⁽²⁾に学びつつ、それに対する批判的検討を経て、設定されたものである。

1996年以降、数学教育協議会においては、分数指導に関する議論が活発に行われてきた。それは、量分数と割合分数の区別、分数の導入における互除法の位置付け等、従来の枠組みに対する批判を含んでいる⁽⁴⁾。われわれは、この議論を検討する一方で、授業書の再検討および確定に向けた課題を探るため、一連の実験授業を実施し、その分析・評価を進めてきた。

まず、1997年12月、宮城県・多賀城東小学校3年3組において、同校教諭・佐藤敬行が、第1章の一部について授業を実施した⁽⁵⁾。われわれは、その結果をもとに、第1章について改訂版を作成した。それにより、1998年11月～12月、新潟県内の小学校において、立石由美教諭が4年生を対象に授業を実施した。

本論文においては、戦前から現代に至る分数カリキュラム編成の歴史について概括的に述べた後、授業書「新しい数一分数(改訂版)」の基本的観点、全体構想、個別の問題等に関する解説を行う(第1章)。次に、立石教諭による実験授業の報告およびその結果に関する分析・評価を行う(第2章)⁽⁶⁾。

本論文においては、改訂前の授業書および分数カリキュラム編成の歴史については大田が、授業書の改訂については岡野が、実験授業の分析・評価については岡野、山川、神戸が、それぞれ主として担当した。全体のとりまとめについては岡野が責任を持っている。

(2) このような視点の歴史的源流は明治19、20年頃の算術教科書に見られる。岡野勉「明治検定期算術教科書における分数の教育内容構成—第1期・前期における定義から加法・減法までを対象として」、日本カリキュラム学会紀要『カリキュラム研究』第10号、2001年、参照。

(3) ①遠山啓『教師のための数学入門 数量編』, 国土社, 1960年。②遠山啓・長妻克巨著『量の理論』, 明治図書, 1962年。③授業研究「分数の導入」『数学教室』No. 176, 1968年6月, 国土社。④遠山啓・銀林浩編『わかるさんすうの教え方4』むぎ書房, 1983年, など。

(4) ①松下佳代・松井幹夫・小島順・上垣渉『分数指導の新しい方向をもとめて』数教協ゼミナール48, 数学教育協議会研究局発行, 1997年8月。②銀林浩・鈴木一巳『量分数理論の再構築』数教協ゼミナール49, 数学教育協議会研究局発行, 1998年8月。③松井幹夫「パンを使う『2枚÷3=?』の授業を17回やって挿んだこと」, ④松下佳代「17回の『パンの授業』から見えてきたこと」(③④とも、『数学教室』No. 586, 2000年9月, 所収)などを参照。

(5) この授業については、次に分析、報告した。岡野勉・大田邦郎「量の測定にもとづく分数の導入」, 日本教育方法学会紀要『教育方法学研究』第24巻, 1998年。

(6) この授業については、次の①において部分的に報告した。また、この授業づくりと連動して実施されたゼミナールの報告書として、②を編集した。本論文においては扱わないが、②には、授業者の詳しい感想、授業づくりに参加した学生の感想、授業者を交えた座談会の記録などを収録した。①岡野勉「小学生と『分数とは何か?』を考える授業」, にいがた県民教育研究所編『にいがたの教育情報』第59号, 1999年。②新潟大学教育人間科学部教育実践研究室編『授業書「新しい数一分数」(一部改訂版)による分数の授業づくり—1998年度第II期「教育実践研究演習」報告書』, 1999年, 未公開。

1. 授業書「新しい数一分数（改訂版）」とその解説

(1) 分数カリキュラム編成の歴史

第1～3期国定教科書（黒表紙）では、分数は「意義」から乗除算までひとつの学年でまとめて扱われていた。それが、第4期国定教科書（緑表紙）では第3学年から第5学年までの3つの学年にまたがって、また、第5期国定教科書（水色表紙）では、第3学年から第6学年までの4つの学年にまたがって扱われることになった。

緑表紙教科書の場合、第3学年では分数の「意味」だけが扱われ、第4学年では同分母分数の加減算と、分数×整数および分数÷整数、第5学年で異分母分数の加減算と分数どうしの乗除算といった具合である。

それでは、なぜ緑表紙教科書は分数の指導体系をこのように複数の学年に分けたのだろうか。緑表紙の教師用書（第3学年）には、つぎのように書かれている。

「分数の計算及びその活用を、この學年程度の児童に指導することは無理であるが、分数の基礎概念を与へることは、決して困難でない。又実際の事物の量を分数を用ひて表すのが便利であるやうな場合が、児童生活にも起り勝である」⁽⁷⁾。

すなわち、教えることが困難ではないということと、生活上便利であるということが、カリキュラム編成のひとつの基準とされたのである。

文部省図書監修官として緑表紙教科書の編纂にあたった塩野直道は、この教科書についてつぎのように述べている。

「論理系統に生活系統を加味し、併せて心理発展の段階に合致させる。この系統は教育体系ともいふべきものである」⁽⁸⁾。

こうして、「生活」と「心理」を「論理」に優先させるカリキュラムが成立し、戦後の学習指導要領・教科書に継承されたのであった。

1968年のいわゆる「現代化学習指導要領」の時期には、「スパイラル方式」の名のもとに第2学年から6学年までの5つの学年にまたがって分数が扱われた。しかし、第2学年の分数は「割合」で意味付けられ、そのことが第3学年以降の分数学習に役立つどころか、むしろ弊害が多いとの批判も出て、1977年学習指導要領では、分数の扱いは第3学年からとなった。

1989年学習指導要領においては、緑表紙教科書以来半世紀にわたって2つの学年に分断されて来た分数乗除が、第6学年でまとめて扱われることになり、1998年学習指導要領では、分数の扱いは第4学年から第6学年までの3つの学年となる。これらの措置は「精選」「ゆとり」といった文脈で説明されているが、事実上は内容不明な「生活」と「心理」を援用しての、「スパイラル」の名を借りた「細切れ小出しカリキュラム」の失敗を認めたものといえよう。

先に述べたように、われわれは1970年代から、小学校における分数指導を「導入から異分母加減まで」と「乗除算」⁽⁹⁾の2つの授業プランに具体化して提案してきた。学習指導要領はその

(7) 『尋常小学算術 第3学年 教師用 上巻』、文部省、1937年、3ページ。

(8) 塩野直道『数学教育論』、1947年、河出書房、47ページ。

(9) 大田邦郎・佐藤洋子「授業のプログラミングに関する実証的研究—分数除法の指導を素材として」、『千葉大学教育工学研究』第9号、1988年3月。大田邦郎「遅さ」で学ぶ分数のわり算』、『授業づくりネットワーク』第2号、1988年6月、学事出版。

後追いをしてきたともいえるが、まだまだ不十分である。

(2) 指導過程構成の基本的観点

われわれは、分数を導入する際に、《連続量の測定》を基本的観点として設定し、指導過程を構想している。それは、具体的には次の3点にまとめられる。

- (1) 連続量を測定する際に生じる端下量(単位量に満たない量)の表現として分数を導入する。
- (2) 基本的には、互除法の発想を活用し、端下量によって単位量を測定する方法(互除操作)を採用する。
- (3) それによって導かれる《商分数の論理》を指導過程に明確に位置付け、《分割分数の論理》と統一する。

分数の定義について、さしあたり、《分割分数の論理》と《商分数の論理》を区別する。《分割分数の論理》とは、単位分数の自然数倍($\frac{b}{a} \Leftrightarrow \frac{1}{a} \times b$)として、《商分数の論理》とは、わり算 $b \div a$ の商($\frac{b}{a} \Leftrightarrow b \div a$)として、分数を定義する方法である。例えば、 $\frac{2}{3}$ は、《分割分数の論理》によれば、 $\frac{1}{3} \times 2$ 、《商分数の論理》によれば、 $2 \div 3$ と定義される。

量の測定を通して分数を導くとき、端下量の処理については、試行錯誤的に単位量を等分割するのでない限り、互除法の発想を活用し、端下量によって単位量を測定する方法を採用することが必然的である。

例えば、図1においては、端下量によって単位量である1mを測定し、端下量3つ分でちょうど1mになる。1回の測定によって端下量を数値化できることから、このような場合を、ここでは「測定1段階」と呼ぶことにしよう⁽¹⁰⁾。このように、端下量n個で1mになるとき、そ

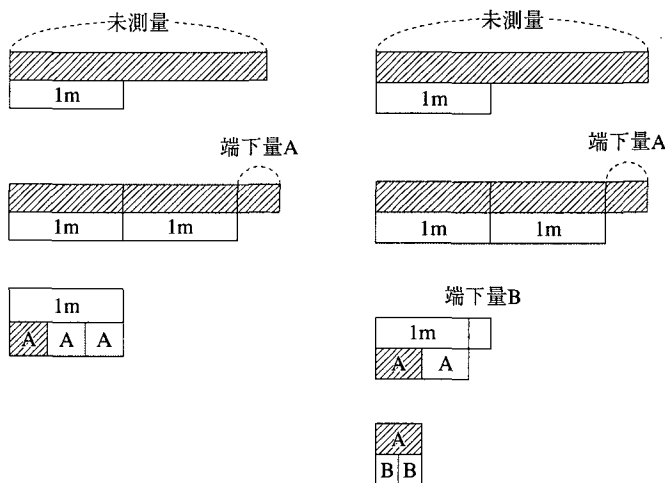


図1 測定1段階

図2 測定2段階

(10) これについて、大田(1978)、大田(1976)においては、「互除法1段階」と呼んでいた。しかしながら、《連続量の測定》という基本的観点からは、端下量で単位量を測定する互除操作を唯一の方法とするのは適切ではない。これは、従来の「互除法2段階」において特にあてはまる。このような理由により、ここでは、「測定1段階」、「測定2段階」としている。

の端下量は単位分数 $\frac{1}{n}$ m によって表現される。

分子が1でない分数、例えば $\frac{2}{5}$ は、図2のように、端下量Aによって1mを測定したときに、さらに端下量Bが生じるという場面から導かれる。

この場合は、まず、端下量Bによって端下量Aを測定し、次に、その結果を用いて1mを測定する(「測定2段階」)。その結果、端下量Bについては、5つ分で1mになるから、 $\frac{1}{5}$ m であること、求める端下量Aは“ $\frac{1}{5}$ m が2つ分の長さ”であることが導かれる。

このようにして、求める端下量が最大公約量(この場合は端下量B)のいくつ分かを導いたとき、その端下量を表現するためには、新たな論理が必要になる。

図2の場合、最大公約量にあたる端下量Bは、定義により、 $\frac{1}{5}$ m であるが、“ $\frac{1}{5}$ m が2つ分の長さ”はどのように表現されるのか。“5つ分で1mになる長さのことを $\frac{1}{5}$ m といいます”という定義によれば、 $\frac{2}{5}$ m については、“5つ分で2mになる長さ”とするのが最も自然である⁽¹¹⁾。これは《商分数の論理》に他ならない。これに対して、ここでは、“ $\frac{1}{5}$ m が2つ分の長さは $\frac{2}{5}$ m ”という、《分割分数の論理》が新たに必要になるのである⁽¹²⁾。従って、指導過程においては、「測定2段階」による、分子が1でない分数の導入の前に、その前提として、《分割分数の論理》を導入し、それを《商分数の論理》と統一することが必要となる。

このように、分数の導入過程においては、《商分数の論理》と《分割分数の論理》という2つの論理の区別と統一という点が重要な観点となる。われわれのプランは、この観点を、その重要性にふさわしく、位置付けようとするものである。

この観点は、単位分数から一般の真分数への数範囲の拡張の際にも重要になる。算数教科書においては、単位分数については、《商分数の論理》にもとづき、「3こ分で1mになる長さ」($\frac{1}{3}$ m)、「1mを4こに等しく分けた1こ分の長さ」($\frac{1}{4}$ m)という定義を行っているものがある。しかしながら、一般の真分数については、「 $\frac{1}{4}$ dl の3こ分のかさ」($\frac{3}{4}$ dl)という、《分割分数の論理》による定義だけが行われている。仮分数においても、「 $\frac{1}{3}$ l の4こ分」($\frac{4}{3}$ l)という定義に見られるように、《分割分数の論理》にもとづく定義のみが行われている⁽¹³⁾。しかしながら、後に述べるように、単位分数から真分数への拡張の方法は決して一意的ではなく、多様な方法が考えられる。この点もまた、先の観点の必要性和重要性を裏付けている。

《商分数の論理》を指導過程に位置付けることによって、「不定」と「不能」についても説明の可能性が拓かれる。すべての大きさは0個分で0であるから、 $\frac{0}{0}$ は「不定」、いかなる大きさも0個分でaにはならないから、 $\frac{a}{0}$ は「不能」なのである。有理数概念の形成にとってこの問題を避けて通ることはできない⁽¹⁴⁾。

(11) 大田(1976)においては、この点について、「『5つ分で2mの長さが $\frac{2}{5}$ m』との解釈しかできない」(96ページ)としていた。この点については後述する。

(12) この点については、野沢茂が次のように指摘している。「子どもの中に、互除法2段階の時 $2\frac{2}{5}$ m といったら、納得しない子がいた」。「単位分数、互除法1段階がすんだ所で、 $\frac{1}{3}$ が2つで $\frac{2}{3}$ というのを指導した方がよい」。授業研究「分数の導入」『数学教室』No. 176, 1968年6月, 国土社。

(13) 『小学校算数』学校図書, 1991年文部省検定済, 1992年度用。その他の算数教科書および『わかるさんすう』をはじめとする数学教育協議会による分数導入プランについては次を参照。岡野勉・大橋直子「算数教科書における分数の導入過程」『新潟大学教育学部附属教育実践研究指導センター研究紀要』第13号, 1994年。

(14) 有理整数環Zから有理数体Qを構成する際には、 $Z \times Z^* = \{(a, b) \mid a \in Z, b \in Z^*\}$ ($Z^* = Z - \{0\}$) の元に対して同値関係 \sim が定義される。岸本量夫『数の体系と代数系』, 宝文館, 1973年, 参照。

(3) 指導過程の全体構想

以上の考察にもとづく指導過程の全体構想を次に示す。全体は、主として長さの測定を通して分数を導入・定義する前半部分(①～⑥)および主としてタイルを用いて定義の定着を図る後半部分(⑦～⑩)とに分かれる。なお、④、⑥は、今回の改訂にあたって新しく追加した内容である。

- ① まず、連続量(長さ)の測定の際に、単位量では測り切れない端下量が生じる場面を設定する。そのような場合における測定方法として、互除法の発想を活用し、端下量で単位量を測定する方法を導く。ここでは測定が1回で終わるように教材を構成しておく(「測定1段階」)。それにより、単位分数に関して、《商分数の論理》による定義を行い(問題1)、その定着を図る(練習1)。
- ② 分数の歴史、小数との違いに関する読み物を与え、教育内容体系における分数の位置付けを行う(お話 分数と小数)。
- ③ ①において、単位分数について行った定義を一般の真分数に拡張する。ここにおいて、《商分数の論理》と《分割分数の論理》の両者を区別した上で統一する。また、これにより、⑤の前提を形成する(問題2)。
- ④ ③において、一般の真分数について行った定義を、帯分数・仮分数に拡張する。帯分数・仮分数について、《商分数の論理》と《分割分数の論理》の区別と統一を行う(問題3)。
- ⑤ 端下量で単位量を測定する方法を1回適用しても端下量が生じる場面を設定し、そのような場合について、もとの長さを数値化する方法について考える。新しい端下量で最初の端下量を測定する、新しい端下量で最初の単位量(1m)を測定する、などが考えられる(「測定2段階」)。数値化の際には、《商分数の論理》、《分割分数の論理》がともに用いられる(問題4)。
- ⑥ 量の測定の際に、新しい端下量で最初の端下量を測定する方法(互除操作)の繰り返しが有限回で終わるか、無限に続くかを問う。両者がともに考えられること、前者の場合、その量は分数(一般には有理数)によって表現できるが、後者の場合には新しい数(無理数)が必要になることを話す(研究問題)。
- ⑦ 分数をタイルによって表現する。タイルは加減算などで威力を発揮する。数は単位量に対する比であるから、ここでは、単位量の大きさがひと目で分かるようにしておく(練習2)。
- ⑧ 加法の素過程としての同分母・真分数の加法(くりあがりなし、約分なし)のタイル算を行う。《分割分数の論理》により、「分数のたし算は、分母をそのままにして分子だけたす」という計算規則を導く(問題5)。
- ⑨ ⑦とは逆に、タイルを分数によって表現する(練習3)。
- ⑩ 分子が0の真分数の大きさは0であること、また、帯分数の記法の意味(整数部分と真分数部分との和の形になっていること)を確認する(問題6)。
- ⑪ 「不定」と「不能」に関わる問題を扱う。《商分数の論理》により、分母が0の分数はいかなる大きさをも表現しないこと(「不能」)、分母・分子ともに0の分数は確定した大きさを表現しないこと(「不定」)を導く(問題7)。

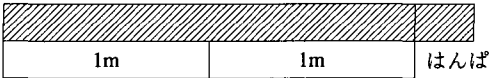
(4) 各問題等の解説

① 測定1段階にもとづく単位分数の導入

問題1は、測定1段階による単位分数の導入問題である。授業書1ページには問題1のまとめが書かれている。これはまとめの際に配付される。

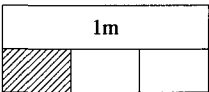
第1章 新しい数 — 分数

問題1
テープの長さは何メートルあるでしょうか。



はんぱ

1m



はんぱはんぱはんぱ

- ・3つ分で1mになる長さを、3分の1mといい、 $\frac{1}{3}$ mと書きます。
- ・2mと $\frac{1}{3}$ mのことを、2と3分の1mといい、 $2\frac{1}{3}$ mと書きます。
- ・このような数を分数といいます。

1

授業では、まず、端下量が生じない場合の例として、3mのテープを黒板に貼り、1mのテープで測定する。それにより、“1mが3つ分で3m”であることを確認した上で、問題のテープの測定に進む。測定の結果、“1mが2つ分”すなわち2mと、1mに満たない長さになる。このような長さのことを「はんぱ」と言うことを確認し、この「はんぱ」を何mと表現したらよいか？を問う。

この過程において、子どもによる測定作業を、どこに、どのように位置付けるかは一つのポイントになる。①問題のテープ($2\frac{1}{3}$ m)と1mのテープを渡し、上記の過程すべてを作業を通して確認させ、はんぱと1mの関係を考えさせる、②「はんぱ」のテープと1mのテープだけを渡し、両者の関係を考えさせる、などが考えられる。あるいは、③作業はまったく行わず、黒板にテープを貼り、教師と子どもがそれを見て問答しながら考えるのもよい。いずれの方法を採用するかについては、授業を積み重ねる中で明らかになるだろう。現時点においては、子どもの状況などをもとに、授業者が個別に判断すればよい。

先の問いに対する反応として、まず、考えられるのは、①定規で測定して、「約33.3cm」だ

というものである。これも一つの対応であることは認めなければならない。mで測りきれないならばcmで、というのは、すでに長さの単位系を学んでいる子どもにとっては正当な反応である。ただし、ここでの問題は、「何mあるでしょうか？」なのである。1mとの関係で「はんぱ」を表現しなければならないのである。そこで、次に考えられるのは、②1mをいくつかに分けて「はんぱ」を測定する方法である。この場合、何等分すればよいか？が問題になる。この場合、2等分を繰り返しても「はんぱ」を測ることはできない。そこであきらめる場合もあるが、③2と4の間をとって3等分すればよいことに気付くかも知れない。

このように、試行錯誤的に単位量を等分割する方法に対して、発想を転換して、④「はんぱ」で1mを測定する方法が考えられる。これによれば、「はんぱ」の長さは、「3つ分で1mになる長さ」と表現される。そして、この方法によれば、③の結果についてもスマートに説明することができるのである⁽¹⁵⁾。

授業では、できるだけいろいろな方法を子どもに考え、試みさせ、それらの検討を通して、④「はんぱ」で1mを測定する方法に導くようにしたい。

授業書のまとめにあるように、「はんぱ」は「3つ分で1mになる長さ」であることから、「3つ分で1mになる長さ」として、3分の1mを定義する。テープの長さは、2mと3分の1mである。これを“2と3分の1メートル”と言い、 $2\frac{1}{3}$ mと書く、というところまで説明しておく。

ただし、この「はんぱ」については、③により、「1mを3等分した長さ」と表現することも可能である⁽¹⁶⁾。どちらの表現も可能なのであるが、定義（ことばの約束）としては、「3つ分で1mになる長さ」を採用し、「1mを3等分した長さ」については、別な表現方法として位置付けておくのが適当だろう。これについては、次のように書いて黒板に貼っておき、授業中、子どもがいつでもそれを見て考えることができるようにしておけばよい。

$\frac{1}{3}$ m：3つ分で1mになる長さ
別な表し方：1mを3等分した長さ

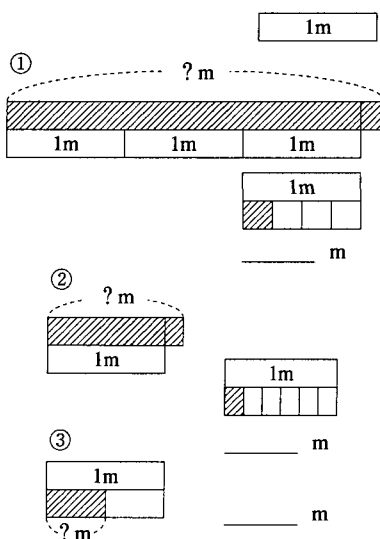
問題1においては、個別・具体的な数値を用いて定義を行ったが、これは、“n個分で1mになる長さを $\frac{1}{n}$ mという”という単位分数の定義にほかならない。練習1においては、3つの具体例について考えることを通して、このことを明確にすると同時に、定義の定着を図る。

授業においては、①については、教師が問題の意味を説明しながら、子どもと一緒に解答を導き、②③については各自で考えさせる。③については、 $\frac{1}{2}$ mに加えて、 $1\frac{1}{2}$ m、 $0\frac{1}{2}$ mなどの反応が予想される。なぜそのように表現したかを発表させた後、討論を通して、それらを比較検討すればおもしろい。

(15) 「はんぱ」で1mを測定した結果、3つ分とれることが分かったから、1mを3等分すれば「はんぱ」と同じ長さになる。

(16) 両者が同じ長さを表現していることについても、確認しておく。

練習1 テープの長さは何メートルありますか。



2

② 教育内容体系における分数の位置付け

次に、「お話 分数と小数」に進む。自然数は分離量を「数える」ことによって、分数・小数は連続量を「測る」ことによって得られること、分数と小数は、連続量の測定の際に生じた端下量に対する2通りの処理方法から生まれたと考えられることなどを説明し、教育内容体系における分数の位置付けを行う。なお、最後の段落は、今回の改訂にあたって付け加えたものである。

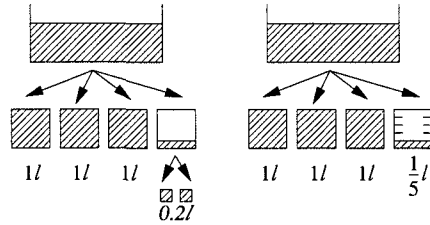
お話 分数と小数

「はこの中に、みかんがいくつありますか?」ときかれた時は、「1, 2, 3, …」と数えていけば、答が出ます。

しかし、「このバケツの中には、水がいくら入っていますか?」と聞かれても、「1, 2, 3, …」と数えることはできません。このような場合には、もとなる大きさ、つまり単位を決めて、それがいくつ分あるかを調べます。これを「測る」といいます。

ところが、測ったとき、はんばが出ることがあります。このはんばを測るのに、2つの方法があります。

第1の方法は、単位の1 lを10等分して0.1 l, 0.1 lを10等分して0.01 lというように、もとの単位を次々に10等分して小さい単位を作り、はんばがどれだけあるかを測る方法です。例えば、1 lが3つ分と0.1 lが2つ分とれた場合、水の量は3.2 lとなります。このようにして、小数が生まれたのです。



第2の方法は、反対に、出てきたはんばで単位を測る方法です。例えば、バケツの中の水が、1/1 3つ分とれて、はんばが出た場合、そのはんばが5つ分で1/1になれば、はんばの部分は $\frac{1}{5}$ ですから、水の量は、あわせて、 $3\frac{1}{5}$ ということになります。つまり、分数が生まれてきます。

このような方法のもとになる考え方は、ユークリッドの『原論』に見られます。これは、今から約2,400年前の紀元前4世紀に書かれた書物です。

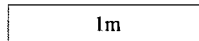
3

③ 《商分数の論理》と《分割分数の論理》の区別と統一 (1)

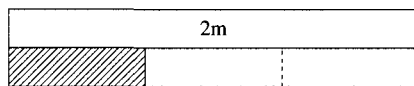
問題1においては、単位分数について分数の定義を行ったわけであるが、問題2においては、

問題2

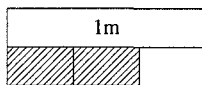
3つ分で1 m になる長さを $\frac{1}{3}$ m というのでした。
 それでは、 $\frac{2}{3}$ m はどのような長さだと思いますか。



㉞ 3つ分で2 m になる長さ



㉟ $\frac{1}{3}$ m が2つ分の長さ



- ・ 3つ分で2 m になる長さは、 $\frac{1}{3}$ m が2つ分の長さと同じです。
- ・ $\frac{2}{3}$ m の3のことを分母、2のことを分子といいます。

4

これを一般の真分数に拡張する。この局面において、《商分数の論理》と《分割分数の論理》という、分数の説明に関する2通りの立場が現れる。前者が授業書の選択肢⑦、後者が④にそれぞれ対応する。ここでは、まず、これらを明確に区別する。その上で、両者が同じ長さを表現していることを示すことを通して、両者を統一するのである⁽¹⁷⁾。

授業では、最初から選択肢を与えてもよいが、子どもに予想させた方が、多様な考えが出されて、おもしろいだろう。授業書から、選択肢とまとめにあたる記述をカットしたものを配って予想させればよい。それを通して、先に問題1において行った単位分数の定義を子どもがどのように理解しているかが明確になる⁽¹⁸⁾。

まず、考えられるのは、①「3つ分で2mになる長さ」というものである。これは、先の定義「3つ分で1mになる長さ」を拡張した（「1m」の「1」を「2」にした）ものであり、最も自然な表現であろう。次に考えられるのは、②「2mを3等分した長さ」という表現である。これは、 $\frac{1}{3}$ mに関する別な表現方法、すなわち「1mを3等分した長さ」を拡張したものである。これらは、いずれも、わり算 $b \div a$ の商として分数を説明する立場、すなわち《商分数の論理》($\frac{b}{a} \Leftrightarrow b \div a$) である。これは、授業書の選択肢⑦にあたる。

次に、先に行った $\frac{1}{3}$ m の定義（「ことばの約束」）を「3つ分で1mになる長さ1つ分」と理解することにより、 $\frac{2}{3}$ m について、③「3つ分で1mになる長さ2つ分」という表現が得られる。同じように、 $\frac{1}{3}$ m に関する別な表現方法を「1mを3等分した長さ1つ分」と理解することによって、 $\frac{2}{3}$ m について、④「1mを3等分した長さ2つ分」という表現が得られる。これらは、「 $\frac{1}{3}$ m が2つ分の長さ」という表現に統一することができる。これは、単位分数の自然数倍として分数を説明する立場、すなわち、《分割分数の論理》($\frac{b}{a} = \frac{1}{a} \times b$) である。これは、授業書の選択肢④にあたる。

授業では、まず、このような多様な表現の可能性を発表させ（子どもから出なければ教師から出してもよい）、次に、それらを授業書の選択肢⑦、④にまとめればよい。その上で、両者が同じ長さを表現していることを示し、 $\frac{2}{3}$ m には2つの意味があり、どちらで考えてもよいこと、「分母」「分子」の用語について解説する。

これにより、次のような「言葉の約束」ができる。これについても、黒板に貼っておき、子どもがいつでも見て考えることができるようにしておく。

-
- (17) 日本の算術教育史におけるこの問題の位置については次を参照。岡野勉「明治検定期算術教科書における分数の導入過程」、日本教育方法学会紀要『教育方法学研究』第25巻、1999年。
- (18) 大田(1978)は、この問いに対する子どもの反応について、次のように述べていた。

「問題1では『3つ分で1mになる長さが $\frac{1}{3}$ m』と定義したのであるが、この定義からは分子が1でない分数については、たとえば $\frac{2}{3}$ mであれば『3つ分で2mの長さ』としか論理的には出てこないはずである。」「論理的には定義により『3つ分で2mの長さ』としか出ないはずであるが、『1mを3等分した2つ分の長さ』または『 $\frac{1}{3}$ mが2つ分の長さ』という考えを引き出したい。子どもから『分割分数の論理』が出ない場合は教師の側から出してもかまわないが、れんしゅう1の問題を考える中で気づく子どももいるだろう」（3ページ、アンダーラインは岡野）。

ここでは、「分割分数の論理」について、「論理的には出てこないはず」であるが、この論理に「気づく子どももいるだろう」から、それを「引き出したい」と説明されている。しかしながら、この説明には無理がある。「分割分数の論理」に「気づく子どももいる」ことを組み込んで、授業書の論理を構成しなければならない。ここでは、単位分数の定義に関する多様な理解の可能性という観点から、「3つ分で2mになる長さ」については、「最も自然な表現」と位置付けてある。

$\frac{2}{3}m$: 3つ分で $2m$ になる長さ
別の考え : $\frac{1}{3}m$ が 2つ分の長さ

④ 《商分数の論理》と《分割分数の論理》の区別と統一 (2)

問題3においては、問題2において一般の真分数について行った定義を帯分数・仮分数に拡張し、帯分数・仮分数について、《商分数の論理》と《分割分数の論理》の区別と統一を行う。

問題3

(1) $2\frac{2}{3}m$ は 3つ分で何 m になるでしょう。

予想

ア. $6\frac{2}{3}m$

イ. $4m$

ウ. $8m$

エ. その他

(2) $2\frac{2}{3}m$ は \square つ分で $\square m$ になる長さです。

だから、 $2\frac{2}{3}m = \frac{\square}{\square}m$

ヒント

$\frac{2}{3}m$ はどのような長さだったか。

思い出してみよう。

5

(1)については、 $2\frac{2}{3}m$ のテープを黒板に貼り、それを見ながら考える。 $2\frac{2}{3}m$ という記法は $2m + \frac{2}{3}m$ という意味であること(帯分数の記法)、それを3倍するときには、整数部分($2m$)、分数部分($\frac{2}{3}m$)ともに3倍し、次にその部分積を加えればよいこと(分配法則)、その過程において、「3つ分で $2m$ になる長さ」という $\frac{2}{3}m$ の定義(《商分数の論理》)を用いること、などがここでの内容となる。その結果、 $2\frac{2}{3}m$ は「3つ分で $8m$ になる長さ」であることが導かれる。正解はウである。合わせて、「 $2\frac{2}{3}m$ が 3つ分の長さ」を $1m$ テープで測定することにより、それが $8m$ であることを確認する。

(2)においては、先の結果に対して《商分数の論理》を適用する。《商分数の論理》によれば、「3つ分で $8m$ になる長さ」は $\frac{8}{3}m$ と表現される。このようにして、 $2\frac{2}{3}m$ も $\frac{8}{3}m$ も等しい長さを表現していることが導かれる。合わせて、《分割分数の論理》により、 $\frac{8}{3}m = \frac{1}{3}m \times 8$ であることについても確認する。実際に測定して、 $2\frac{2}{3}m = \frac{8}{3}m$ のテープから、 $\frac{1}{3}m$ テープが8つ分とれることを示す。

⑤ 測定 2 段階による真分数の導入

問題 4 においては、問題 1 と同じく、長さを測定する場面が設定されている。ただし、ここでは、最初に生じた端下量(「はんば①」)によって単位量(1 m)を測定しても、さらに端下量(「はんば②」)が生じるように教材が構成されている。このような場合について、端下量(「はんば①」)の数値化の方法を考えるのである。

これについては次のような方法が考えられる。

- (1) まず、考えられるのは、互除操作の繰り返しによる方法である。これによれば、新しく生じた端下量(「はんば②」)によって最初の端下量(「はんば①」)を測定する。次に、その結果を用いて単位量(1 m)と「はんば②」との関係を導く。これらの測定の結果、「はんば②」については、「5 つ分で 1 m になる長さ」であることから、《商分数の論理》により、 $\frac{1}{5}$ m と表現できる。次に、「はんば①」は、「はんば②」($\frac{1}{5}$ m)が 2 つ分の長さであるから、《分割分数の論理》により、 $\frac{2}{5}$ m である。

問題 4

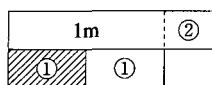
テープは何 m あるか、分数で表してみよう。

- (1) まず、1 m でテープをはかる。



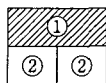
1 m とはんば①が出てきた。

- (2) そこで、はんば①で 1 m をはかる。



2 つ分とまたはんばがでてきた。
これをはんば②とする。

- (3) 今度は、はんば②ではんば①をはかってみる。



ちょうど 2 つ分とれた。

- (4) ・はんば②は、5 つ分で 1 m になる長さだから、 $\frac{1}{5}$ m。
 ・はんば①は、はんば②が 2 つ分だから、 $\frac{2}{5}$ m。
 ・だから、テープの長さは、 $2\frac{2}{5}$ m。

(2) 次に、(1)の順序を一部変更した方法が考えられる。新しく生じた端下量(「はんば②」)によって、最初の端下量(「はんば①」)を測定するのではなく、単位量(1m)を測定するのである。その結果、「はんば②」は「5つ分で1mになる長さ」、すなわち $\frac{1}{5}$ mであることが直ちに導かれる。その後、「はんば②」で「はんば①」を測定することにより、「はんば①」は、 $\frac{1}{5}$ mが2つ分の長さ、すなわち $\frac{2}{5}$ mであることが分かる。ここでも、《分割分数の論理》、《商分数の論理》がともに用いられる⁽¹⁹⁾。

問題4では、「はんば②」については、単位分数によって表現される長さになるよう、教材が構成されている。従って、この方法によっても数値化は可能なのである。それだけではない。「はんば②」の数値化にあたって、(1)の方法は、「はんば①」と「はんば②」の関係を媒介としている。これに対して、この方法は、この関係を媒介することなく、直ちに、「はんば②」を数値化することができる。

(3) これらの方法とはまったく異なる方法として、次の方法も考えられる。「はんば①」×x=y mを満たす自然数の組(x, y)を求め、そこから、「はんば①」が「x個分でymになる長さ」、すなわち $\frac{y}{x}$ mであることを導く方法である。この方法によれば、「はんば①」×5=2mとなり、そこから、「はんば①」が $\frac{2}{5}$ mであることが導かれる。この方法によれば、《分割分数の論理》を用いず、《商分数の論理》のみによって、「はんば①」を数値化することができる。

授業では、黒板にテープを貼り、それを見ながら測定方法について考える。上記(1)~(3)の一部または全部が出されれば、それぞれの方法について確認した後、テープを子どもに渡し、実際に作業させればよい。

授業書に示した方法(1)は、互除操作を2回繰り返す、いわゆる「互除法2段階」である。ここで、特にこの方法にこだわる必要はないだろう。小島順が指摘しているように、「互除法的測定は、小学校算数の範囲では、測定的一般的方法ではあり得ない」⁽²⁰⁾からである。先に見たようないろいろな測定方法が考えられることを示した上で、方法(1)について解説し、「研究問題」に進む。

⑥ 互除操作の繰り返しは有限か？無限か？⁽²¹⁾

ここでは、特に、先の方法(1)、すなわち、新しい端下量で最初の端下量を測定する方法(互除操作)の繰り返しによる方法を取りあげる。そして、連続量の測定の際に、この操作の繰り返し

(19) この方法は、多賀城東小学校3年3組における授業(岡野・大田 1998)において、子どもが発見し、試みた方法である。ただし、この方法は、問題4のような、「はんば②」で終わる場合においてのみ、適用可能な方法である。

(20) 小島順「小学校算数における分数の導入」、松下佳代・松井幹夫・小島順・上垣渉『分数指導の新しい方向を求めて』、数学教育協議会、1997年、50ページ。

(21) この研究問題も、今回、新たに加えた問題である。直接的には次の批判による。「互除法がここで終わったのは、測定対象のBがあらかじめ $B=(2+\frac{2}{5})m$ として作られていたからである。これは本来の測定ではない。本質的なウサン臭さが付きまとう」。小島順、前掲論文、50ページ。無限に続く場合から始めることはできないこと、教育内容・教材を構成するという営みは、本来、非常に意図的かつ作為的なものであること、などを考えれば、これは正当な批判とは考えにくい。ただし、このような批判とは別に、ここで示した内容について考えることは、子どもの思考の自然な拡張であり、また、意味のあることと考えられる。

研究問題

(1) 【問題4】で、1mでテープを測ったとき、はんばが出てきました(はんば①)。次に、それで1mを測ったら、またはんばが出てきました(はんば②)。それではんば①を測ったら、ちょうど2つ分とれました。

けれども、ここでまたはんばが出るかも知れません(はんば③)。そのようなときには、どうすればいいでしょうか？

はんば③ではんば②を測ればよいのです。

それでもはんばが出たら、それをはんば④として、はんば④ではんば③を測ります。

それでもはんばが出たら、それをはんば⑤として、はんば⑤ではんば④を測ります。

それでもはんばが出たら、……

(2) このような繰り返しは、どこかで終わりになるのでしょうか？どこまでも続くのでしょうか？

予想

ア. どこかで終わりになるだろう。

イ. どこまでも続くだろう。

予想を立てたら、先生に聞いてみましょう。

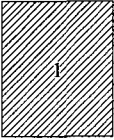
が有限回で終わるか、無限に続くか、を問う。両方の場合が考えられること、前者の場合、その量は分数(一般には有理数)によって表現できるが、後者の場合については新しい数(無理数)が必要になることを話す。正方形の一辺と対角線の関係など、後者の具体例を示すのもよい。

⑦ 分数のタイル表現

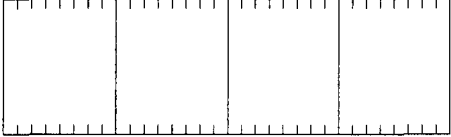
練習2では、分数をタイルによって表現する。タイルは加法・減法の計算などにおいて有効な教材である。注意しなければならないのは、数が単位量に対する比であることから、単位量の大きさが一目で分かるようになっていなければならない、という点である。これまでは、1mが「1」であったが、ここでは、タイル1枚が「1」となる。授業においては、この点について注意を促すとともに、「1」にあたるタイルを常に黒板に貼っておく。

この授業書においては、量の測定を通して分数を導入した。練習2においては、そのようにして導入した分数が表現する量を構成することが課題となる。タイルには、あらかじめ、分母の数によってその面積を等分する目盛りが付してある。授業においては、《分割分数の論理》により、分数が表現する量(面積)に斜線を引かせればよい。

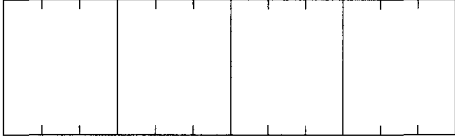
れんしゅう 2
 分数をタイルであらわしてみよう。



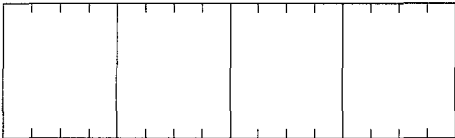
① $3\frac{5}{8}$



② $1\frac{2}{3}$

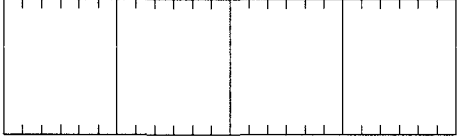


③ $2\frac{7}{4}$




8

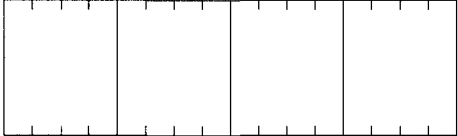
④ $\frac{5}{6}$




⑤ $\frac{12}{3}$



⑥ $\frac{4}{4}$



⑦ $\frac{3}{1}$



9

ここで、例えば⑥について、タイル4枚に斜線を引く誤りが考えられる。これに対しては、次の2通りの対応が考えられる。

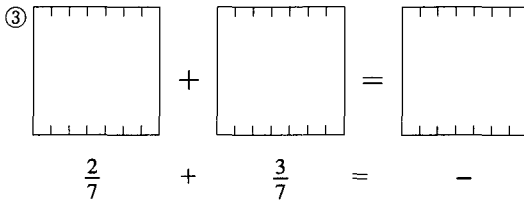
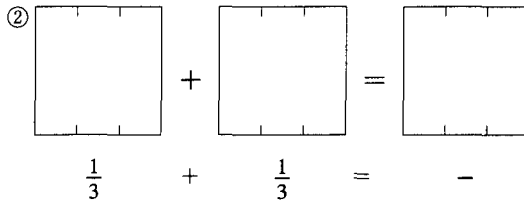
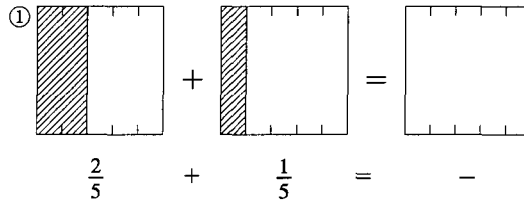
- (1) 《分割分数の論理》により、 $\frac{4}{4} = (1 \div 4) \times 4$ であること、「1」にあたる量は、与えられた量全体（タイル4枚）ではなく、タイル1枚であることを明らかにする。
- (2) 《商分数の論理》により、 $\frac{4}{4}$ は「4つ分で4になる大きさ」であることから、タイル4枚の4つ分はタイル16枚になり、定義に合わないことを示す。

練習2は、基本的には、《分割分数の論理》を用いることで解くことができる。《商分数の論理》については、(2)のように、《分割分数の論理》を用いて構成した量が、その分数を正確に表現しているかどうかを検証するために用いればよい。

⑧ 同分母・真分数の加法

問題5は、加法の「素過程」としての、同分母・真分数の加法（くりあがりなし、約分なし）のタイル算である。《分割分数の論理》により、①については、「1を5等分した大きさ（ $\frac{1}{5}$ ）の2つ分と1つ分を合わせると、3つ分、すなわち $\frac{3}{5}$ となる」と説明される。これを一般化して、「分数のたしざんは、分母をそのままにして、分子だけをたせばよい」という計算規則を導けばよい。①について教師が説明した後、②③については子どもが自分で計算するようにすればよい。

問題 5



10

⑨ タイルの分数表現

練習 3 は、練習 2 とは逆に、分数によってタイルを表現する問題である。②については、 $\frac{3}{1}$ 、 $1\frac{2}{1}$ 、 $2\frac{1}{1}$ 、③については、 $\frac{7}{3}$ 、 $1\frac{4}{3}$ 、 $2\frac{1}{3}$ など、できるだけ多様な表現を導くようにしたい。その後、まとめとして、枠の中の文章を読み合わせる（この部分は、最初は白紙にしておき、後に配付して授業書に貼るようになる）。ここで重要なことは、仮分数・帯分数の区別は表現形態の相異に過ぎず、それぞれ別個の分数ではない、という点である。

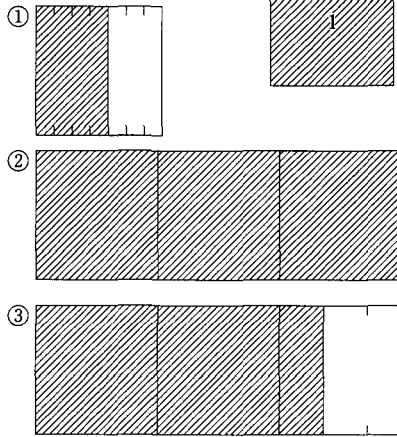
⑩ 分子が 0 の分数

問題 6 においては、分子が 0 の真分数は 0 であること、また、帯分数の記法は整数部分と分数部分の和を意味していることを確認する。 $\frac{0}{0}$ については次の問題 7 で扱うので、ここでは、あえて、「分母が 0 でないとき」と断る必要はない。 $\frac{0}{5}=0$ については、《分割分数の論理》によれば、 $\frac{0}{5}=\frac{1}{5}\times 0=0$ 。《商分数の論理》によれば、 $\frac{0}{5}$ は「5 つ分で 0 になる大きさ」、すなわち 0。2 通りの説明が可能である。導入部分においてこれを確認しておくのである。

授業においては、正しいと思うものを子どもに選択させ、討論を通してそれを検討する。まとめの部分は最後に配付する。

れんしゅう3

タイルを分数で表してみよう。



③のように、1より大きい分数の場合は、 $2\frac{1}{3}$ 、 $1\frac{4}{3}$ 、 $\frac{7}{3}$ など、いろいろ書き方があります。 $2\frac{1}{3}$ 、 $1\frac{4}{3}$ のような書き方を帯分数、 $\frac{7}{3}$ のような書き方を仮分数といいます。

①のように、1より小さい分数を真分数といいます。

問題6

$2\frac{0}{5}$ と 2 は、どちらが大きいでしょうか。3人に聞いてみました。

しげやくん 「 $2\frac{0}{5}$ は、2に何かを足したものだから、 $2\frac{0}{5}$ のほうがちょっと大きい」。

こうじくん 「どっちも同じだと思う」。

ひさこさん 「 $\frac{0}{5}$ は0で、0には何をかけても0だから、2のほうが大きいと思うわ」。

分子が0の真分数は、いつでも0になります。

帯分数 $5\frac{2}{7}$ は、 $5 + \frac{2}{7}$ の+がしょうりやくされていると考えます。

⑩ 「不定」と「不能」に関する問題

問題7は「不定」と「不能」に関する問題である。

《商分数の論理》により、 $\frac{0}{0}$ は「0個分で0になる大きさ」、 $\frac{3}{0}$ は「0個分で3になる大きさ」と説明される。前者については、どのような大きさでもそれにあたる。後者については、そのような大きさは存在しない。つまり、分母が0の分数は確定した大きさを表現しないので、数としては無意味なのである。授業ではこのことに気が付けばよい。

このことは、倍分・約分の際に、分母・分子に0をかけないこと、逆に0で割らないことの根拠になる。

《商分数の論理》を導入過程に明確に位置付けることによって、このような問題についても指導の可能性が拓かれる。有理数概念の形成にとって、この内容を避けて通ることはできない。

問題7

$\frac{2}{5}$ m は、5つ分で2mになる長さでした。
 それでは、 $\frac{0}{0}$ m はどのような長さでしょうか。
 また、 $\frac{3}{0}$ m はどのような長さでしょうか。

- ・ $\frac{0}{0}$ m は、0個分で0mになる長さですから、どのような長さでも $\frac{0}{0}$ m になります。
- ・ 0個分で3mになる長さはありません。だから、 $\frac{3}{0}$ m の長さはありません。
- ・ どちらにしても、分母が0の分数は考えないことにします。

13

授業においては、①～⑤のうち、 $\frac{0}{0}$ を表現するタイルはどれか？を問う。④と答える子どもが多いと思われるが、《商分数の論理》によれば、①～⑤のいずれも、また、どのような大きさも $\frac{0}{0}$ を表現していること（「不定」）が明らかになる。 $\frac{3}{0}$ についても、やはり、⑤と答える子どもが多いと予想される。これについても、《商分数の論理》により、①～⑤のいずれも、また、どのような大きさも $\frac{3}{0}$ を表現していないこと（「不能」）が導かれる。

2. 実験授業による、授業書「新しい数一分数（改訂版）」の検証

第2章においては、授業書「新しい数一分数（改訂版）」による実験授業の結果について報告するとともに、その分析を通して授業書の評価を行う。

授業は、1998年11月～12月、新潟県内の小学校において、4年生（在籍児童数18名）を対象に、主として、立石由美教諭によって行われた。部分的に、大田、岡野が授業を担当した。授業においては、授業書のすべての章が用いられた（総授業時数25校時。1校時45分）が、本論文においては、今回、特に改訂を加えた第1章に限定する。

この部分の授業時数は10校時。日程は表1の通りである。著者のうち、岡野と山川はすべての授業を参観し、ビデオテープに録画した。大田は前半部分の授業（11月12, 13日）を参観した。授業の進行に合わせ、必要に応じて、授業者との間で、事前打ち合わせ、事後検討会を行った。感想文については、前半部分終了後（11月13日）、第1章終了後（11月24日）、授業書のすべての章の終了後（12月18日）の3回に分けて書いてもらった。また、理解が困難であった内容について、特に記述を求めた（11月24日）。第1章終了後（11月24日）には評価テストを実施した（11月19日には、授業者の判断により、問題2に関する簡単なテストが実施された。ただし、この結果については分析の対象とはしていない）。

表1 実験授業の日程

日 程	校 時	問 題 等	内 容
11月12日	2校時	問題1 練習1	測定1段階による単位分数の導入・定義
	3校時	問題2 お話	商分数と分割分数の区別と統一（1） 分数と小数
13日	4校時	問題1 問題2	前日の復習および続き
	5校時	問題3	商分数と分割分数の区別と統一（2）
	6校時	問題4	測定2段階による真分数の導入
		研究問題	互除操作の繰り返しは有限か無限か？
17日	5校時	練習2	分数のタイル表現
18日	2校時	問題5 練習3	同分母・真分数の加法 タイルの分数表現
19日	6校時	問題6	分子が0の分数
24日	1校時	問題7	0分の0
	2校時		0分の3

事前テストは、授業内容の予告を意味し、授業の本来的な展開にとってマイナス要因となるおそれがあるため、実施していない。なお、今回授業を受けた子どもたちは、3年生において、すでに、教科書による分数の授業を受けている。しかしながら、今回、この点に対する配慮は行わず、子どもたちははじめて分数を学習するものと想定して、授業を実施した。

授業書の評価については、(1)授業過程の分析・評価、(2)評価テストによる、授業書の目標に対する到達度、(3)感想文による、授業に対する子どもの歓迎の度合い、の3点から行う⁽²²⁾。

(1)にあたっては、ビデオテープをもとに作成した授業記録を基礎資料として用いる。さらに、必要に応じて、子どものファイルノート、参観中の記録等を参照する。(2)(3)については、上記により得られたデータにもとづいて行う。

(1) 授業過程の分析・評価

① 測定1段階にもとづく単位分数の導入

授業においては、まず3mテープの測定を行い、1mが3つ分で3mであることを確認した。次に、問題のテープ($2\frac{1}{3}$ m)と1mテープを各グループに渡して作業を行い、問題のテープをmによって表現することを求めた。この時点においては、問題のテープを1mのテープで測定すること、それによって測りきれない長さが生じること、それを「はんぱ」とよぶことなどは行われていない。

作業の間、子どもたちからは、「先生あまったよ」、「ものさし使っちゃダメなんでしょ?」、「(1mのテープを)折ってもいい?」、「1cmって50回折るの?」、「わかんないよ」、「出せねえよ。こんなもん」などのつぶやき、質問が出されていた。授業者は、それらに答えながら、各グループを回り、作業の様子を見たり、助言を与えたりしている(子どもたちは、1グループを3人として、6つのグループに編成されている)。その様子を次に引用する。

C：テープを1mテープによって測定し、2mとはんぱが生じることを知る。はんぱを定規で測ろうとする。

C：先生、定規で測っていい?

T：定規を使わずに測ってごらん。

C：1mのテープを、2等分、4等分、8等分する。

C：2等分したら50cm、4等分したら25cm、8等分は0.00とか使うんじゃない?

C：わかんねえ。

C：1mのテープにはんぱのテープをあて、はんぱの長さだけ切る。

C：25cmはここだよなあ。

ここでは、1mのテープの2等分、4等分、8等分という、単位量に対する系統的な2等分の方法が試みられている。しかしながら、この方法によっては端下量を数値化することはできない。そのことが明らかになった時点で作業が止まっている。「1mのテープにはんぱのテープをあて」ることも行われているが、端下量による単位量の測定が行われているわけではない。

次に、子どもたちによる、作業結果の発表に進む。授業者が、作業を止め、結果を発表することを求めたのに対して、子どもたちからは、「先生、全然わかんない」、「何にもわかんない」という発言が出された。授業者は、てつやを指名し、「どのへんまでできたか、発表してください」と発表を求めるが、これに対しても、別の子どもから、「できたところなんてないよなあ」というつぶやきが聞かれた。てつやは説明できないようすであった。次に指名されたあやこは次のように説明した。

あやこ：1mは半分で50cmだから、50cmで(はんぱを)測ったら、まだ50cmもいかなかったから、(1mを)4つ分に分けてみようってことで、4つ分に分けてみました。

(22) 高村泰雄「授業書方式による教授過程の基礎理論」、同編著『物理教授法の研究』、北海道大学図書刊行会、1987年、15～16ページ。

このグループにおいても、単位量に対する系統的2等分の方法が試みられていた。同じ方法を発表した子どもの発言を次に引用しておく。

たくや：まずねえ、これで1m測って、切って2本になって、2m。そして、あと、残ったやつ（はんば）がこれ（1m）で測れないから、1mにもいかないから、これ（1m）を半分に折ると50cmになるから、その半分にすると25cmになって、それから…、そこまで。

まこと：まずこれ（1m）を半分に折って、それでも、まだこっち（2等分した1mテープ）の方が長いから、また、その半分に折って、今度は小さくなっちゃったから、…それで、んーと、わからない。

りえ：まず、これ（1m）で2回測れて、で、多かったから、（1mを）半分に折って、それで、また多かったから、半分に折って、で、やったら、今度、こっち（はんば）の方が多くなった。

以上が、作業の手順を具体的に説明した発言である。手順はすべて同じである。授業者は各グループから1名を指名して発表を求めたが、その他の子どもたちは作業の手順を具体的に説明することができなかった。「切って試した」が「意味が分からなくなったから、もう1回最初からやっている」（えいすけ）、「わからなくなっちゃった」（まこと）、「細かいところまで測ろうと思」い、1mのテープを「2分の1にしちゃった」が、結局、「わけ、わからなくなった。そのわけもわからない」（かずゆき）などである。

この結果を受け、授業者は、テープを示しながら、まず、単位量に満たない長さを「はんば」とよぶことを確認した。次に、子どもたちの作業の結果により、単位量を2等分した長さは端下量より長いこと、単位量を4等分した長さは端下量より短いことを確認し、「そういう時どうする？」と問う。これは、端下量によって単位量を測定する方法を引き出すことを意図した問いとも見られるが、その意図が明確に具体化されていない。子どもたちは、「もっと細かい（単位を作る）」、「また半分に折る」など、作業において試みた方法を繰り返し述べるのみである。そこで、授業者は、まず、2等分、4等分の結果から単位量を3等分する方法を導き、その長さが端下量と等しいことを示した。

T：誰もちょっと言ってくれなかったんで、ちょっと先生も困ったんだけど、先生が1つ言うね。これさ、2つに折ってもダメ、4つに折ってもダメとなると、もうひとつ、することがあるでしょ？なんだ？もうちょっと考えてくれる？2つに折るとこっち（2等分した1mのテープ）が長い。4つに折るとこっち（はんばのテープ）が長くなると、この長さ（はんばのテープ）は何と何の間だ？

C：50cmと2（教師の発言に消される）。

T：これとこの間だよ。こういう時は、どうしたらいい？

C：その中からとる。

T：そういう時は？

C：……

T：（板書しながら）2、4だろ？（1mテープを）2つに折ると（はんばの方が）短い。4つに折るとこっち（はんばの方）が長く（なる）。2になる（折る）と（はんばの方が）短いわけでしょ？じゃあ、どうしたらいい？

C：3。

T：3だよ。3というのに気が付くろ？じゃあ、3にしようというわけで、これで確かめ

てみようっていうわけ。いい？確かめてみるよ。(1mを3等分したテープをはんばに合わせる) そうすると、どうですか？

C：同じ(つぶやき)。

T：こうなると、どうも、ここがこうなる(1mを3等分した長さがはんばと等しい)っていうのが分かるね。

次に、「もうひとつ、やり方があるの。わかる？」と問うが、子どもたちからは反応がない。そこで、授業者の側から、一方的に、端下量によって単位量を測定する方法を示し、その結果によれば、端下量は「3つ分で1mになる長さ」と表現できること、そのような長さを3分の1メートルということを説明した。

T：誰も出てこなかったから、先生が言っちゃうんだけど、こっちの方(はんば)でやってみるね。そしたら、(はんばのテープで1mを測定する)1個、2個、3個、測れるね。ま、同じこと言ったんだけど、そうすると、1mが、これ、はんばで測ると、いくつになる？

C：3個分。

T：3個分になったよね。「3個分」(板書。もう一度測定して3つ分になることを確認する)。これは何か気が付かない？

C：？

T：今、はんばで測ると、3つ分で1mになったよね。こういうのをさ、3つ分で1mになる長さをこう言うんです。

C：3分の1？

T：「3つ分で1mになる長さを3分の1mという」(板書)。そして、こう書くんです。
「 $\frac{1}{3}$ m」(板書)。

次に、テープ全体の長さは、2mと $\frac{1}{3}$ mであり、それが $2\frac{1}{3}$ mと表現されること、 $\frac{1}{3}$ mについては「1mを3等分した長さ」という表現も可能であることを説明し、授業書を配付してまとめた。

このような授業の展開に関して、ここでは次の4点を指摘することができる。

(1) 指導過程における作業の位置付け、内容・方法について、検討が必要である。まず、子どもたちが作業に入る前には、黒板に1mテープとはんばのテープを貼り、それを見ながら、どうすれば「はんば」をmで表現することができるか？考えることが必要である。その際、結論を得る必要は必ずしもない。子どもたちから何らかのアイデアが出されれば、それで十分である。そのアイデアを検証するために作業を行えばよい。そのためにも、「はんば」という言葉は作業の前に導入しておく必要がある。また、作業の課題を考えれば、子どもたちに与えるのは、1mテープと「はんば」のテープだけで十分である。

(2) 子どもたちは、単位量に対する2等分を繰り返し、失敗に終わっている⁽²³⁾。この結果から出発して、どのように分数の定義を導くか？この点が、この授業の最も重要な課題となった。その際、等分割の方法そのものを対象化することが必要である。例えば、なぜ、1mを等分しようとしたのかを問えばよいだろう。この問いを考えることを通して、子どもたちから、端下量

(23) もっとも、ほとんどの子どもがこの方法を使ったというのは珍しいケースかも知れない。因みに、1997年12月、多賀城東小学校3年3組で行った授業においては、1mを3等分してはんばに合わせる(3つの班)、はんばで1mを測る(5つの班)、2等分を繰り返して失敗した(1つの班)という結果であった。

で単位量を測定する方法が出されることが期待できる。その際、1 m テープとはんばのテープを黒板に貼るなどして、両者の関係に考察の焦点を絞ることも重要である。

(3) 端下量の処理に際しては、単位量の2等分を繰り返すことが子どもにとって自然な方法なのかも知れない。この方法に依拠するならば、測定の順序を、例えば、次のように設定することも考えられる。① 3 m のテープの測定、② $2\frac{1}{4}$ m のテープの測定、③ $2\frac{1}{3}$ m のテープの測定。

②においては、1 m を4等分すれば端下量の数値化は可能である。それにより、端下量は「1 m を4等分した長さ」と表現される。次に、端下量で単位量を測定する方法により、「4つ分で1 m になる長さ」という表現が導かれる。これら2つの表現によって $\frac{1}{4}$ m を定義する。その際、両者が同じ長さを表現していることも確認しておく。③においても、②を経ることにより、端下量を数値化する2つの方法、その結果にもとづく端下量の表現（「1 m を3等分した長さ」と「3つ分で1 m になる長さ」）、それによる $\frac{1}{3}$ m の定義へと自然に進むことが期待できる。

(4) 授業書の問題として、測定に用いる単位量として、m が適当かどうか、検討が必要である。m で測定して端下量が生じたら cm を用えばよい。系統的10等分にもとづく単位系を学習している子どもたちにとって、これは自然な考えである。これに対して、別の方法を考えることを要求するのは不自然かも知れない。操作のしやすさという点についても考慮に入れ、個別単位、あるいは系統的10等分にもとづかない単位（「尺」など）を用いることについても、今後、検討が必要である。

問題1については、事後検討会の結果をふまえ、翌日にも授業を行った。授業においては、 $1\frac{1}{5}$ m のテープの測定を課題とした。測定の前に、「このはんばをどうするんだっけ？」と、測定方法について問うたところ、子どもたちは、「切る」、「折る」など、前日の作業において試みた方法を繰り返し述べるに止まった。質問の意味もあいまいであるが、端下量によって単位量を測定する方法が子どもの記憶に残っていないことが示された。

このような問答に続いて測定に入った。測定に際しては、前日とは異なり、1 m テープとはんばのテープだけを各グループに渡した。約15分後、作業の結果が次のように発表された。

T：じゃあ、全部できたみたいなんだけど、はっきりしない人がいるので、みんなでもう1回見てみたいと思います。みんなは、これ（はんば）をどうしたんだっけ？何で測ったの？
（中略）

T：いくつ分か、測ったんだよね。こうやって（はんばで1 m を測定する）測っていったわけですから、何個測った？

C：5個。

T：だったよね。だから？

C：5分の

T：5分の？

C：5分の1 m。

測定の前の発言とは対照的に、ほとんどの子どもたちが、はんばで1 m を測定したのである。この結果は興味深い。これは、測定の前にその方法を問うたこと、測定の際、1 m のテープとともに、問題のテープ全体ではなく、はんばのテープだけを渡したこと、によるものであろう。

練習1については、5分程度しか時間がとれなかった。①について授業者が説明しながら解答を導き、②③については各自で考えた後、プリントを見せるよう指示した。プリントを見る

と、ほとんどの子どもが正解していた。真分数の定義は、概ね、定着していると思われる。

ただし、③については、 $1\frac{1}{2}$ m という解答が約3名あった。これは、帯分数の形式を守ろうとしたがゆえに生じた誤りであろう⁽²⁴⁾。時間があれば、全員で検討したい。

③は1 m で1回も測れない。だから、「0 m とはんば」なのである。「はんば」は、「2つ分で1 m になる長さ」であるから、定義により、 $\frac{1}{2}$ m である。従って、全体の長さは0 m と $\frac{1}{2}$ m 。これは、帯分数の形式によれば、 $0\frac{1}{2}$ m と表記されるが、0 は省略してよいので、 $\frac{1}{2}$ m と記せばよい。 $\frac{1}{2}$ m と $1\frac{1}{2}$ m を比較しながら、このような説明を行えばよいだろう。討論を通して、子どもたちに検討させるのもおもしろい。

② 教育内容体系における分数の位置付け

授業書の「お話 分数と小数」を子どもたちに読み聞かせた。特に問題なく進行したので、分析は省略する。

③ 《商分数の論理》と《分割分数の論理》の区別と統一 (1)

$\frac{1}{3}$ m について行った単位分数の定義が「言葉の約束 (もとにする考え)」としてまとめられ、黒板に貼られている。授業においては、この定義を確認した後、授業書の問題文(ただし、選択肢はカットされている)を読み、 $\frac{2}{3}$ m はどのような長さか? 子どもたちに予想してもらった。最初の5分から10分頃までは、静かにプリントに向かっていった。その後、いろいろな考えが出てきて騒がしくなってきた。16分後、発表に入った。授業記録から、関連する部分を次に引用する。

ゆうや:



3つ分で1 m になる長さを3分の1と言うことができるから、3つ分で2 m になる長さを3分の2という。だから……

T: だから、ここが3分の2ですと言えばいいのだから、

ゆうや: 黒板の色をぬったところが3分の2です。

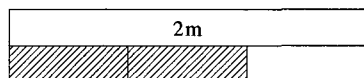
T: (3分の2) メートルかな。はい、いいよ。というのがゆうや君の考えです。

これはおもしろい考えである。まず、図においては、「3つ分で1メートルになる長さ2つ分の長さ」が表現されている。これは《分割分数の論理》である。これに対して、言葉においては、「3つ分で2 m になる長さ」への拡張が述べられている。これは《商分数の論理》である。しかも、上の図は、「3つ分で2 m になる長さ」を表現しているとも見られる。多様な説明の可能性が内包された図である。

「他の考えは?」という問いかけに応じて、次にりえが発表した。

(24) 1997年12月、多賀城東小学校3年3組で行った授業においては、 $1\frac{1}{2}$ m (9人)、 $\frac{1}{2}$ m (26人)、 $0\frac{1}{2}$ m (3人) という結果であった。 $0\frac{1}{2}$ m という解答にも、帯分数の形式を守ろうとする姿勢が見られる。

りえ：



3つ分で1mになる長さを3分の1mと言うから、3分の2mは2mになる。

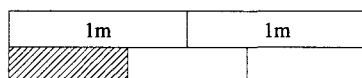
これに対して、授業者は、「3分の2mは、いくつ分で2mになるの?」と問い、同じ考えの子どもに説明を求めた。これに応じて次の説明が行われた。

あやこ：一緒の図なんだけど、何か違う。3つ分で2mだから、3分の2mは、ここからここまで(りえの図の斜線部分)が3分の2mだと思います。

てつや：3つ分で1mになる長さを3分の1mだから、3分の2mは3つ分が2つで3分の2mになる。

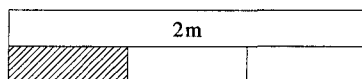
りえの図は「2mを3等分した2つ分」を表現している。りえは、3分の2mを $(Xm \div 3) \times 2$ の結果と予想しているのかも知れない。あるいは、3分の1mを「1mを3等分した長さ1つ分」と理解し、そこから、「2mを3等分した長さ2つ分」と予想したのかも知れない。あやこ、てつやは、図についてはりえに同意しながらも、言葉においては、「3つ分で2m」(あやこ)、「3つ分が2つ」(てつや)などの表現を行っている。次に、たつのがりが発表した。

たつのがり：



3つ分で2mになる長さを、3分の2mというのでした。だから、ここから、ここまで。たつのがりは、「3つ分で2mになる長さ」という表現を自分で導き、それを正確に表現している。これは、授業書の選択肢⑦にあたる。また、たくやは、「2mを3等分した長さ」をテープによって示した。これは、たつのがりの表現の逆である。

たくや：



3分の1で1メートルになる長さを3分の1メートルと言うから、3分の2メートルは、これ(2mのテープの)この長さを(3つに折って)今の長さを、こう、3つに分けたから、3分の2メートル。

最後に、授業者は、かずゆきに発表を求めた。

T：かずゆき君、あなた、ちょっと違う考えだろ？さっきさ、こんなの簡単だと言って、さっさと書いちゃったよね。かずゆき君はこれどう思ったの？(かずゆきの机まで行き)ここからここまでが何mなの？

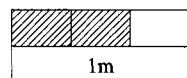
かずゆき：1m。

T：じゃあ、ほら、書いて、説明して。

C：説明考えてない。

T：うん、いいわ。じゃ、その図書いて。

かずゆき：



T：わけ、説明してくれる？

かずゆき：えっ？

T：わけ。

かずゆき：できない。

T：できない。でも、そう考えたのはどうして？

かずゆき：どうしてだろうねえ？

C：笑い。

T：そんなのすぐできると言ったんだよ。かずゆき君、その時、先生に何か言ったじゃない。

かずゆき：何？3分の1が2個。

T：2個に決まってる、と言ったの。というのが、かずゆき君の意見でした。

かずゆきは、図、言葉ともに、「3分の1mが2つ分の長さ」である。これは、授業書の選択肢④にあたる。ただし、かずゆきは、理由の説明ができないため、発表内容に対して自信がもてないようすである。

先に述べたように、 $\frac{2}{3}$ mの予想に際して、子どもたちが要した16分程度であった。この間に、上記のように、実に多様な表現が、図、言葉によって行われている。この事実は注目に値する。これは、単位分数から一般の真分数への拡張の方法が一意的ではないことを明確に示している。討論の素材としては十分であろう。

なお、授業記録の引用は省略するが、たくやは「3等分する」ことを「3つ分にする」と表現している。授業者も同じ表現を用いている。等分と倍では意味が正反対である。このような混乱は、この時点においてはやむをえないかも知れないが、やはり、訂正しておいた方がよいだろう。関連して、授業書にある「3つ分で」も「3つで」に訂正する。

授業においては、討論の前に、発表された図と言葉について質問を求めた。

T：これはどうなの？って言うておきたいことない？はい。かずゆき君。

かずゆき：ゆうや君、2メートルが3つ分と言ったけど、ゆうや君の図は2メートルが6個分に分かれている。

T：ああ、ゆうや君、そうじゃないよね。あなたはこれを何て言った？

ゆうや：3つ分で1メートルになる長さを3分の1だから、3つ分で2メートルになる長さを3分の2という。

T：なってるじゃない。

C：ああ、なるほど。

この問答を通して、ゆうやの図と言葉によって表現されている論理がより明確に説明された。それに対して、ただひとり、「3分の1メートルが2個」を発表したかずゆきは、相変わらず、自信がないようすである。

えいすけ：かずゆき君ので、何で、3分の1メートルは2個なの？

T：かずゆき君、どうして3分の1メートルが2個なんだ？って。

かずゆき：っか、説明できないなあ。

C：笑い。

T：説明できないの。

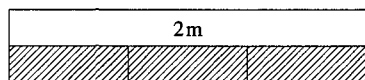
かずゆき：……が説明できなくて、困ってるの。

T：困るよね。

これらの問答の後、検討に入った。まず、「3つ分で1mになる長さ」が $\frac{1}{3}$ mであることを

テープ図によって確認した。その際、授業においては2mを3等分した図が示されたが、これは明らかに誤りであった。

次に、「3つ分で2mになる長さ」を表現している図はどれか？子どもたちの発表をもとに考えた。挙手によって発表させたところ、予想分布は、ゆうや4人、りえ9人、かなえ0人、かずゆき1人、たつりのり6人となった。なお、かなえは、授業者の問いに対して、次の図を後から発表した。これも選択肢に加えられている。



また、予想の発表において、かずゆきは、「自信がない」として自らの予想を取り下げ、ゆうやの予想（「これでもいいと思う」）、たつりのりの予想（「いちばんわかりやすい」）への支持を表明した。

上記の検討にあたっては、 $\frac{2}{3}$ mが「3つ分で2メートルになる長さ」であることが前提になっている。予想の発表において多くの子どもがこの考えを採用していたことによるものであろうが、この点については、やはり、確認しておくことが必要である。また、この時点において、りえの図がクラスの半数から支持されている。この図についても、選択肢の一つとして、授業書に入れることを検討したい⁽²⁵⁾。

その後、子どもたちが発表した図について、それが「3つ分で2mになる長さ」になっているか？順に検討を行った。その結果、かなえの図、りえの図は一致しないこと、たつりのりの図が一致していることが明らかになった。最後に、ゆうやの図が媒介となって、《商分数の論理》と《分割分数の論理》の同一性が示された。最後の部分に関する授業記録を次に引用する。

T：じゃあ、ゆうやくんは？

C：いいんじゃない？

T：ゆうやくんのはすごくいい考えなんだけど、もうちょっと考えてみて。

まこと：くっつければ、

T：何かと一緒にならない？

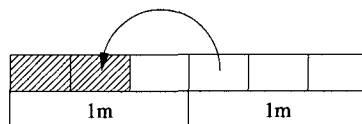
C：かずゆき君。

C：たつりのり君。

T：かずゆきくんとも一緒になるし、

C：なんで？

C：なるの？



(25) 多賀城東小学校3年3組の授業において、この問題に対する考えは次の通りであった。「3つ分で2mになる長さ」(11人)、「 $\frac{1}{3}$ mが2つ分の長さ」(6人)、「2mを3等分した2つ分の長さ」(1人)。なお、ここでは、図または言葉の少なくとも一方が明確な意味を表現していると思われるものはすべてとりあげている。児童数は39名。

また、1976年、小樽市立最上小学校4年1組の授業において出された考えは、次の5つに大別されている。①「3つ分で2mになる長さ」、②「2mを3等分した1つ分の長さ」、③「 $\frac{1}{3}$ mが2つ分の長さ」、④「ある長さを3等分した2つ分の長さ」、⑤「2mと1mの半分」(大田邦郎「小学校における、有理数のひとつの表現としての分数の指導」、北海道大学教育学部卒業論文、1977年)。

以上の結果により、この問題に対する子どもたちの予想傾向は、概ね、明らかである。

これに続いて、2つのテープの長さが等しいことが授業者によって示されたが、子どもたちはそれほど驚いていないようであった。これは、先の説明において、同じ内容がすでに示されていたからであろう。この授業において示されたように、ゆうやの図は、《商分数の論理》と《分割分数の論理》を統一する媒介として有効である。授業書に取り入れたい。

なお、翌日の授業において、「3分の2mというのはどのような長さだったか？」と問うたところ、次の3つの表現が出された(すべて言葉による)。①「2mを3つに分けた1つ分」、②「3分の1mが2つ分」、③「3つ分で2mになる長さ」。

①については、前日の授業において、たくやが発表したのみであり、直接的には扱っていない。にもかかわらず、ここで、この表現が出されている。これは、①と③の同一性についてすでに認識していた子どもの存在を示している。①は《商分数の論理》の直接的な表現である。今後、これを指導過程に位置付けることも検討したい。

授業書の問題として、「 $\frac{1}{3}$ mが2つ分の長さ」を「別の考え」としたのは不適切であった。 $\frac{2}{3}$ mについて、「3つ分で2mになる長さ」(《商分数の論理》)を定義とした場合、「別の考え」は「2mを3等分した長さ」とするのが適当である。「 $\frac{1}{3}$ mが2つ分の長さ」(《分割分数の論理》)については、定義として、「3つ分で2mになる長さ」と同等の位置付けを行うべきである。以上により、一般の真分数については、今後、「言葉の約束」を次のように改訂する。

$\frac{2}{3}$ m : 3つ分で2mになる長さ (《商分数の論理》)
別の考え : 2mを3等分した長さ
: $\frac{1}{3}$ mが2つ分の長さ (《分割分数の論理》)

④ 《商分数の論理》と《分割分数の論理》の区別と統一 (2)

まず、(1)について、第4校時の最後の数分間において、問題の意味を説明した後、黒板に $2\frac{2}{3}$ mのテープを貼り、第1回の予想集計を行った。その後、第5校時の開始時に第2回、第5校時の途中に第3回の集計を行った。第1回と第2回とのあいだには、給食、昼休み、そうじが行われたが、数名の子どもが黒板のテープを見ながら、この問題について考えていた。第2回と第3回との間には約15分の時間があり、この間、子どもたちはまわりの子どもとも相談しながら考えている。授業者は、「言葉の約束」を示し、それをういて考えるよう指示するのみである。以上における予想分布とその変化を表2に示す。

予想がウに集中していくようすが示されている。個々の子どもにおける予想変更の具体的な

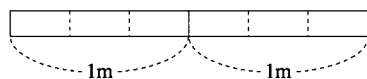
表2 「問題3」(1)に対する予想分布の変化

	第1回	第2回	第3回
ア	9人	12人	3人
イ	1人	1人	0人
ウ	2人	5人	14人
エ	1人	0人	0人
総計	13人	18人	17人
不明	5人	0人	1人

内容については明らかではないが、発言、つぶやき等においては、アからウへの変更を表明した子どもが多く見られた。

次に、理由の発表に移った。最初に発表したのは、ア($6\frac{2}{3}$ m)と予想した子どもであった。授業書において、この選択肢は、整数部分のみを3倍した結果として示されていた。しかしながら、この子どもは、「3つ分」を「3等分」と考えた結果、この選択肢を選んだようである。

T：こういうこと？(板書)



きょうすけ：うん。

T：じゃあ、こうしとくよ。これでいいの？はい。それから？

きょうすけ：1 mが3つになって、もうひとつの1 mも3つになって、その3つと3つを合わせて、6と3分の2 mになりました。

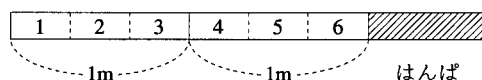
T：これと、これを合わせるの？そうすると6になるってこと？

きょうすけ：うん。

T：あと、3分の2っていうのは、この絵の中でどれにあたる？

きょうすけ：あまり。

T：あまり。はんばの分があるわけね。こうなってるわけ(はんばを追加)。このはんばの部分は別なのね。これをくっつけたわけ。それで、6と3分の2 mね。



これは、これまでの授業において、「分」という言葉に2つの意味が混在していたことが原因であろう。「3つ分」が「3等分」ではなく、「3倍」を意味することを明確にすることが必要である。今後、問題の表現を「3本つなげると何 m になるでしょう」に改める。授業においては、 $2\frac{2}{3}$ m のテープを3本示すことが必要である。

続いて、2人の子どもが発表を行った。 $\frac{2}{3}$ m の3つ分が2 m となることについては、まず、《商分数の論理》(「言葉の約束」②、 $\frac{2}{3}$ m : 3つ分で2 m になる長さ)を用いた説明が行われた。

かずゆき：2 m と3分の2 m に分けて、2 m が3つ分になると6 m になって、まだ3分の2 m が3つ分になっていないから、3分の2 m を3つ分にする、2 m だから、足して8 m のウにした。(中略)

T：かずゆき君、これ(「言葉の約束」)使った？

かずゆき：はい。

T：使った。何番、使った？

かずゆき：②。

T：②のこれを使ったんだって、かずゆき君は。そうすると、何て書いてある？

C：(授業者と一緒に)3つ分で2 m になる長さが3分の2。

T：ということは、これ(3分の2 m)が3つで、何になるの？

C：2 m。

これは、授業書において想定していた説明である。授業においては、これに加えて、《分割分数の論理》(「言葉の約束」②の「別の考え」、 $\frac{2}{3}$ m : $\frac{1}{3}$ m が2つ分の長さ)を用いた説明も行われ

た。

あやこ：これ（ $\frac{2}{3}$ m）を， $\frac{1}{3}$ と，これ（ $\frac{2}{3}$ m）を，3つやって，

T：3つ？

あやこ：3つ。

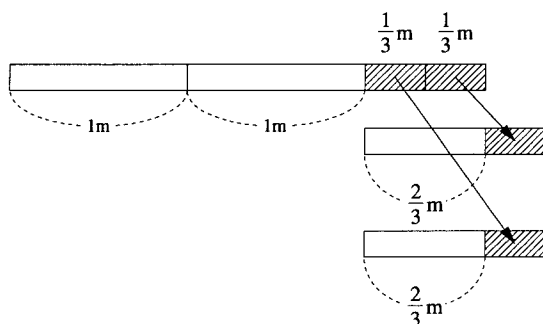
T：うん。こうね（ $\frac{2}{3}$ m のテープの下に， $\frac{2}{3}$ m のテープ図を2つ書き加える。次の図を参照）。

あやこ：で， $\frac{2}{3}$ の2で，この2を分ける。 $\frac{1}{3}$ と $\frac{1}{3}$ に。

T：これを分ける。また分ける。

あやこ：これは分けない。

T：こっちは分けない？



あやこ：1個だけ分けるの。

T：はあはあ。これを $\frac{1}{3}$ と $\frac{1}{3}$ にするのね。うん。そうすると？

あやこ：そして，その $\frac{1}{3}$ とこっちの $\frac{1}{3}$ を足して，1 m になって，で，この $\frac{1}{3}$ とこの $\frac{1}{3}$ を足して 1 m になる。

C： $\frac{1}{3}$ と $\frac{1}{3}$ じゃ， $\frac{2}{3}$ じゃないんだ？

あやこ：そうそう。 $\frac{1}{3}$ と $\frac{2}{3}$ を足して 1 m になって，これと同じようにして，こっちの 6 m と，こうするとこれを全部足すと 2 m になるから，6 と 2 を足して 8 m になったから，私はウダと思いました。

T：そういう考え方したの。すごいね。

2通りの考えを確認した後，問題のテープを3本つないで測定し，その長さが 8 m であることを示した。

(2)については，まず， $2\frac{2}{3}$ m のテープを黒板に貼り，「 $2\frac{2}{3}$ m = $\frac{\square}{\square}$ m と言えるでしょうか？」と問題を示した。次に，「これをもとにしてください」として，子どもたちと，(1)の結果，「 $2\frac{2}{3}$ m は3つ分で 8 m になる長さでした」を確認した。その直後に，「もうわかった」という声が聞かれた（ただし，この子どもは $\frac{3}{8}$ m と書いていた）。その後，7分程度，考える時間をとった。この間，授業者は「言葉の約束」をヒントに考えるよう指示するのみであったが，かなりの子どもが正解に辿り着いたようであった。教室のあちこちから，「わかった」，「できた」，「どうして $\frac{1}{3}$ の 8 m になるの？」などの声が聞かれた。その後，発表を通して，「言葉の約束①」（ $\frac{1}{3}$ m : 3つ分で 1 m になる長さ）によれば，「3つ分で 8 m になる長さ」は $\frac{8}{3}$ m と表現できること，「言葉の約束②」（ $\frac{2}{3}$ m : 3つ分で 2 m になる長さ）によっても説明は可能であることを確認した。さらに，「言葉の約束②」の「別の考え」（ $\frac{2}{3}$ m : $\frac{1}{3}$ m が2つ分の長さ）によれば， $\frac{8}{3}$ m には「 $\frac{1}{3}$ m が8つ分」という意味もあることを確認し，実際に測定を行った。関連する部分を授業記録か

ら引用する。

きょうすけ：もとにする考えと同じで、3つ分はこれ(3つ分で8mになる)だから、で、1mとか、2mは、これ、8mだから、3分の8m。

T：そうか。もとにする考えでいくと、今、きょうすけ君が言ったのは、(もとになる考えの)

①で言うと、1になるところが8になるから、だから、3分の8だって言ったのね。これ(「言葉の約束」)を使った。みんな同じ？

C：うん／使った／同じ。

T：答だけじゃない、考え方だよ。

C：うん／考え方。

T：考え方、違う？その考え方でいいの？みんないい？(C：いい) かずゆき君もいいの？今、きょうすけ君はこれ(「言葉の約束」①)を使ったんだよね。これ(「言葉の約束」②)でもあるの？どっちを使った？どっちも使った？

C：①。

T：①の方使った？

C：どっちでもできる。

T：どっちでもできる。そうだよ。どっちでもできる。もとになる考えを使ったら、すごいかんたんだったわけだよ。で、ちょっとだけね。あと1分。3分の8mってことは、(板書「 $\frac{8}{3}$ m」) こうなったっていうことは、何が8個あればいいの？

C：8m／えーと、3！

T：3？

C：3m。

T：3mが8個あればいいの？

C：3m／2分の3／3分の1／8mが…／3分の8m。

T：何が？

C：3分の1m！

T：それは、どれでできるの？

C：(「言葉の約束」の) ①。

T：これ(「言葉の約束」①)？これを使えばいいの？

かずゆき：②！

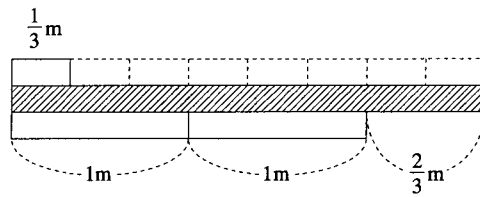
T：②のどれ？

かずゆき：②の別の考え。

T：これ？(C：うん) これ、かずゆき君が言った、3分の1mが2つ分で3分の2mなんだから、何が、いくつあればいいの？

かずゆき：3分の1mが8個。

T：8個あればいい。8つ分あればいい？じゃあね、($2\frac{2}{3}$ mのテープに $\frac{1}{3}$ mの目盛りを付す)。



T：はい。どうですか？ということで、全部で何個だった？

C：1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8。

T：ということで、3分の1が8個で3分の8です。拍手！

問題3については今回は初めての授業となったが、(1)(2)ともに、むずかしさを感じながらも、子どもたちは楽しそうに問題に取り組んでいた。

⑤ 測定2段階による真分数の導入

授業者が、1mのテープと測定の対象となるテープ($2\frac{2}{5}$ m)を黒板に貼り、1mテープによって測定した。2つ分とれて「はんば」が出ることを示し、「これだけはんばがありますので、どうしようか？というわけです。これをみなさんにあげますから、またさっきのように測ってください」として、各グループに測定を求めた。

その結果、ほとんどのグループが、はんば①を2等分して1mテープを測定した。5つ分で1mになることから、はんば①を2等分したテープは $\frac{1}{5}$ m。はんば①は $\frac{1}{5}$ mが2つ分の長さだから $\frac{2}{5}$ m。このような手順により、5つのグループがはんば①を数値化することができた(数値化に至らなかったグループが1つあった。ただし、このグループも、はんば①を2等分したテープの数値化までは到達している)。

授業記録より、子どもによる発表の部分を次に引用する。

しゅん：まず、あまりの部分、折らないで1mを測った。

T：これ(1mのテープ)を測ったのね。(黒板上で実演する)

T：まず、こう測ったわけね。はい。そしたら？

しゅん：そしたら2個とれた。そしたら、今度は、半分に折って測った。

T：今まで言った人はみんなこれ(はんばのテープ)を半分に折ったね。

で、あまりの部分をもた(はんばの2等分)で測ったよね。

しゅん：そしたら、1個とれた。

T：うん。そして？

しゅん：だから、はんばの半分で、1mを測った。

T：うん。これ(はんばの2等分)でまた1mを測ったのね。

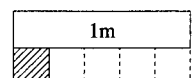
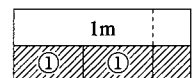
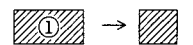
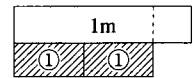
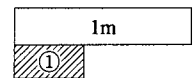
そしたら？

しゅん：そしたら、5個とれた。

T：5個とれた。うん。そして？

しゅん：そこまで。

えいすけ：(前に出て自分のプリントを読む)はんばを半分に折って1mに測ると、5分の1になるから、



T：（5分の1mは）どこからどこまで？

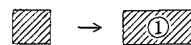
えいすけ：ここから、ここまで（黒板で示す）。

T：ここからここまでが5分の1になる。それで？

えいすけ：5分の1mになるから、はんばのもうひとつ、これのもう1つの…

T：こう？（2等分したはんばを広げて見せる）

えいすけ：もう1つの、測ると、5分の1になって、5分の1が2つ



あるから、5分の1足す5分の1は5分の2m。だから、（テープ全体の長さは）2と5分の2m。

T：これ、たしざんをしたのね。

えいすけ：うん。

T：たしざんで出さなかった人もいるよね。何を使ったっけ？「5分の1が2つで」っていうのは（「言葉の約束」を示して）どこを使えばよかったんだっけ？さっきの人が言ってくれたよね。

かずゆき：②の別の考え。

T：②の別の考えを使うと、5分の1が2つで5分の2になる、という考えです。

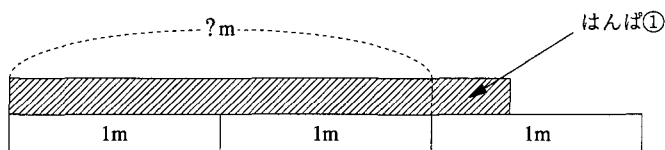
はんば①を2等分してはんば②と比較するという操作は、2つのはんばの比が2：1であることを直観的に発見し、それを検証しようという意図にもとづくものであろう。形態の相異はあるけれども、子どもたちが行った操作は、はんば②でははんば①を測るという操作（授業書の(3)）と同じ内容なのである。

なお、この授業においては、測定の方法について議論をせず、いきなり、グループによる作業に入った。それでも、授業者の個別指導もあり、ほとんどの子どもたちが数値化に成功した。しかしながら、この事例を直ちに一般化することは適切ではないだろう。一般的には、測定を行う前に、測定の方法について考えさせる方がよい。

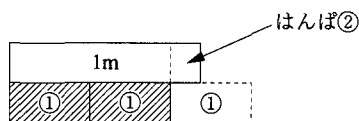
⑥ 互除操作の繰り返しは有限か？無限か？

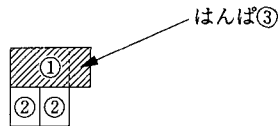
問題4において子どもたちが行った測定手順が互除操作と同じであることを説明した後、研究問題に進んだ。関連する部分の授業記録を次に引用する。

T：では、研究問題。最初のテープを適当に切ってしまう（?mのテープを作る）。そして、今度は、また1mで測ってはんばが出て（実演しながら）、



T：（はんば①で1mを測定する）今度は、1回、2回。3回はとれない。





T: さて、どうしましょう？はんば①で(1mを測定すると)2回とれて、はんば②が出て、今度は、はんば②ではんば①を測って、1回、2回で、またはんばが出て、はんば③が出てきました。はんば③で、はんば②を測ります。ぴったりなると思う？どう？

C: なる。

C: ならない？

T: (測定する) 1回, 2回。2回はいかない。



T: どうしよう？

C: また切る。

T: また切つてうまくいけばいいんだけど。さっき適当に切ったからねえ。はい、研究問題です。実は、これ、大きな声で言えないんですけど、中学校で習うことなんです。わかんなくていいから、考えてね。適当に切ってしまったから、はんば②、はんば③、はんば④が出ました。で、またやったら、はんば⑤が出るかも知れませんね。これ、どうですか？どこかでぴったりいく？それとも、絶対にぴったりいかないこともたまにはあるんじゃないかな？と思う人もいる？プリントに○を付けてみてくれる？

C: わかんない。

T: 自分の思った意見でいいですよ。これ、難しい問題だから、わからなくてもあたりまえですから。あのね、実はこれ、大学生のお兄さんお姉さんたちもわからなかった問題なんです。だから、みなさんわからなくてあたりまえですから。大学生のみなさんも本当は中学校で習ったはずなのに忘れてるの。じゃあ、ちょっと聞かせてね。予想アに○付けた人、どのくらいいる？

C: 挙手多数。

T: 全員かな？じゃあ、イに○付けた人。

C: 挙手2名。

T: 手を挙げなかった人、どうする？じゃあ、15対2で、まだ考えてる人が1人。じゃあ、どうしようかな？答、言っちゃおうかな？中学校で出てくるんで、それまで、どうしても知りたい人は先生のところまで聞きに来てもいいですけどね。算数ってね、いつも答があるって限らないこともありますよ。答の出ない問題っていうのもたくさんあるんです。大きくなったら、また考えることが出てくるんで、その時に考えてください。

「互除操作が無限に続くこともある」と予想した子どもが2名いた。これは、小学校4年生でも、無限をイメージすることができることを示している。

授業者によれば、後日、何人かの子どもがこの問題の正解を聞きにきた。そのような場合には、両方とも正解であることを告げ、一辺1mの正方形の対角線($\sqrt{2}$ m)や直径1mの円の円

周 (πm)などを例として、互除操作が無限に続く場合について説明すればよいだろう。

なお、どちらか一つを選ばせることを考えれば、選択肢は次のように改訂した方がよいだろう。「ア. どんときでも、どこかで終わりになるだろう。イ. 無限に続くこともあるだろう」。

⑦ 分数のタイル表現

①($3\frac{5}{8}$)については、まず、子どもに考えさせた。整数部分(3)については、タイル3枚に斜線を付せばよい。この点については直ちに理解できたが、分数部分($\frac{5}{8}$)についてはすぐには書けない子が多かった。そのため、5分程度考える時間をとった。その後、一人の子どもを指名して、黒板に貼られたタイルに斜線を入れてもらった。斜線は正確に付されていた。これに対して、授業者はその理由について説明を求めた。

T: 「どうして8分の5がここまでになったか?」っていうの言える人いる? どうしてなのか、説明してくれる人いない?

あやこ: 8分の5は、8個に分けた5つぶんだから、ここまでだと思います。

T: というのがあやこちゃんの考えです。他の人で、あやこちゃんのように考えなかったという人いませんか? みんな同じ? 違う? じゃあ、それでいきましょう。「8個に分けた5つぶんっていうのは、この中(『もとになる考え』)では、どの考えを使ったのだろう?

C: (1)。

C: (1)の別。

T: あやこちゃんは1を言わなかったんだけど、1を8個に分けたということは? このあいだ、1を3等分した長さが3分の1mだったよね。だから、今は3じゃなくて何等分するのだった? 8等分してそれが5つぶんだから…本当にこれかなあ? これじゃない気がしたけど。別の考えだよね。よし、そしたら、もとになる考えを使って、②, ③, ④, ⑤, ⑥, ⑦, 全部やってください。中には、あっと驚く超難問が入ってます。

明確な結論を導かないまま、次の問題に進んだ。②から⑦については、10分程度考える時間をとった後、子どもたちが黒板のタイル図に斜線を入れた。すべて正解であった。授業者は、これらについても、その理由を、定義との関連において説明することを求めた。なお、テープからタイルへの教材の移行にともない、この問題において、定義(「言葉の約束」または「もとになる考え」)は、次のように表現が改められている。

- | |
|--|
| (1) $\frac{1}{3}$: 3つで1になる大きさ
(別の考え方) 1を3等分した大きさ |
| (2) $\frac{2}{3}$: 3つで2になる大きさ
(別の考え方) $\frac{1}{3}$ が2つ分の大きさ |

ここで、「『もとになる考え』のうち、どの考えを使ったのか?」という問いについて検討する必要がある。すでに述べたように、子どもたちは正確にタイルに斜線を引くことができている。しかしながら、このことと、その際、先の問いに対して的確に回答できることとの間には距離があるからである。

まず、タイルに斜線を引く際に子どもたちが用いた考え方は、例えば、①においては、 $\frac{5}{8} = (1 \div 8) \times 5$ であろう。先の問いを行う際には、まず、この考え方をういたことが、子ども

たちの間で明確になっていることが必要になる。

その上で、「もとなる考え」との関連について考えることが可能になる。先の考え方は、 $\frac{5}{8} = \frac{1}{8} \times 5$, $\frac{1}{8} = 1 \div 8$ に分解される。「もとなる考え」との関連については、前者が「(2)の別の考え方」、後者が「(1)の別の考え方」である。先の考え方はこれら2つの組み合わせなのである。従って、「どの考えを使ったのか?」という問いに対しては、「『(1)の別』と『(2)の別』を使った」というのが正解になる。しかしながら、授業において、このような回答は想定されていないようである。

そもそも、「もとなる考え」は、個別的な数値を用いて、分数の定義を記述したものである。先の問いにおいて要求されているのは、個別の分数をタイルによって表現する際に用いた考え方を言語によって明確に表現すること、さらに、それと「ものになる考え」との関係について説明することである。「ものになる考え」については、これまでの授業によって、ある程度、定着していることが期待できる。しかしながら、この点を考慮に入れたとしても、先の要求に的確に答えるためには水準の高い思考が要求されるであろう。

ただし、これは、このような問いを指導過程から除外することを求めるものではない。この問いについては、それに対して適切な位置を与えることにより、分数の定義のさらなる定着に効果が期待できる。その際、上記の諸点について十分な注意が必要になる。授業においては、この点が十分考慮されていないまま、先の問いが行われており、そのために、子どもの反応に対して的確な対応が行われていない場面が見られた。このような観点から、②③④の授業を見よう。まず、②($1\frac{2}{3}$)に関する授業記録を引用する。

T: (「もとなる考え」を全員で読んだ後) これを使おうってわけ。1と3分の2は、どうしてこうなるんだろう? どの考えを使ったか、ちょっと考えてちょうだい。ちょっと時間をあげますから、自分は(1)の考えを使ったのか、(1)の別の考えを使ったのか、(2)、(2)の別を使ったのか、考えてください。

C: 考える。授業者は机間巡視。この間2~3分。

T: 今ね、先生とたくみ君で考えたのがあるから聞いて。②はね、たくみ君はこう考えたんです。「3つ分で2になる大きさ」。これを使ってくれたんです。そうすると、たくみ君は、(プリントにあるタイル図の)横に、「(2)」(もとなる考え(2))と書けばいいわけです。他の人いない? 違う考えを使ってくれた人いない?

かなえ: (2)の別。

T: かなえちゃんの場合は、「(2)の別」って書けばいいんだよね。どっちの考えでもいいんだけど。

T: たくみ君のように(2)で考えた人は? (挙手させる) はい。ひろき君がいました。

T: (2)の別で考えた人は?

C: 数名。

T: (1)で考えた人は?

C: いない。

T: (1)の別で考えた人は?

C: 多数。

T: 1を3等分したのが3分の1だから…あれ? 3分の1になっちゃうよ。(1)の別じゃなさそうだね。3等分して、それが何個分かって言いたかったんだろう? これが2個分って言

いたかったんだろう？ね？3分の1が2つぶんだから、(2)の別の考えだよ。どっちの考えでもいいんだよ。

分数部分について、まず、「3つ分で2になる大きさ」(「もとになる考え」の(2))を、次に、「 $\frac{1}{3}$ が2つ分の大きさ」((2)の別の考え方)を確認している。この問題においては、後者を確認すればそれで十分である。仮に、前者についても触れるならば、まず、後者を確認し、次に、それにもとづいて構成されたタイルの大きさが前者をも満たしていることを確認する、という順序になるだろう。また、「(1)の別で考えた」という考えが否定されている。これは、単位分数 $\frac{1}{3}$ について、「1を3等分した大きさ」と理解した、という意味である。この点を確認した上で、これと「(2)の別の考え」とを組み合わせればよいことを説明すればよい。

④($\frac{5}{6}$)についても、まず、「(1)の別の考え」を用いたという反応があった。これに対して、授業者は、「ちょっと合わないね」と述べ、次に、「じゃあ、(2)の考えですが、これは何個分で何になったらいいの？」と、《商分数の論理》にもとづく表現を求めた。しかしながら、「5」、「1」、「6分の5」などの反応があり、意図した表現がスムーズに得られない。これに対して、「(2)の別だったらどうなるの？」という問いに対しては、直ちに、「6分の1が5個」という回答が出された。子どもたちは、《分割分数の論理》を用い、 $\frac{5}{6} = \frac{1}{6} \times 5$ と考えているのである。なお、ここでも、「(1)の別の考えを用いた」という発言を否定する必要はない。これについても、単位分数に関する発言($\frac{1}{6} = 1 \div 6$)として理解すればよい。

③($2\frac{7}{4}$)においては、この問いに対して興味深い反応が見られた。

T：③はどっちの考えでやった？説明できる人いる？これちょっと難しかったよね。

C：(2)の別。

T：(2)の別で考えたっていう人いる？

C：数人。

T：では、(2)の別じゃないよっていう人いる？

あやこ：(1)でやった。

T：では、あやこちゃん、(1)を使うとどうなったか教えてくれる？

T：(1)をみんなで読んでみよう。

C：(全員で読む)「3つぶんで1になる大きさ」が「3分の1」。

T：そうすると、2(整数部分)はそのままでもいいよね。(1)の考えを使うと、4つ分で1になるのが？

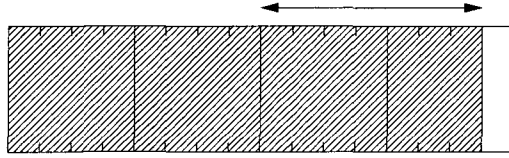
あやこ：4分の1。ああ、4分の4。

T：この前は、3つ分で1になるのが3分の1だったんだよ。だから、4つ分で1になるのは？

あやこ：4分の1。

T：あやこちゃん前に出てきて。あやこちゃんがやったのは、4分の1が7個だから、どこからどこまでになる？

あやこ：ここから、ここまで。



あやこ：4分の4で1になるから、4分の7から4分の4を引いて4分の3で、(1に)4分の3をたすと、4分の7になる。

あやこは、「4つ分で1になる大きさ」という $\frac{1}{4}$ の定義と《分割分数の論理》により、 $\frac{1}{4} \times 4 = \frac{4}{4} = 1$ を導いている。これを用いて、分数部分を、 $\frac{7}{4} = \frac{4}{4} + \frac{3}{4} = 1 + \frac{3}{4}$ と理解しているのである。先の定義は、「もとにする考え」においては「(1)」にあたる。「(1)でやった」という発言については、このような意味において理解することができる。

もっとも、このような論理を自力で構成することをすべての子どもに求めることは適切ではないだろう。タイルに斜線を入れる過程で、 $\frac{4}{4} = 1$ に気が付けば十分である。授業者は、あやこの考えを確認した後、「4分の1を7個ぶん塗る(方法もある)。どちらの考えでもいいんだよ」とまとめた。これは、②とは異なり、「 $\frac{7}{4}$ については、 $\frac{1}{4} \times 7$ と考える、 $1 + \frac{3}{4}$ と考えるもよい」という意味である。

次に、⑤($\frac{12}{3}$)、⑥($\frac{4}{1}$)、⑦($\frac{3}{1}$)について見よう。これらの分数については、《商分数の論理》(「言葉の約束」(2))を用いてもタイル表現は可能である。これらについては、①～④よりもスムーズに授業が進行した。その理由として、これまでの授業を通して先の問いの意図が理解されたことも考えられるが、子どもたちは、実際に、《分割分数の論理》、《商分数の論理》の両方を用いていたのかも知れない。⑤の授業記録を引用しておく。

T：⑤($\frac{12}{3}$)はどうなるかな？3つ分でどうなればいいのか？

C：3つ分で12。

T：というのはどの考え？

C：(2)の考え。

T：じゃあ、(2)の考えだよ。 (2)の別で考えたらどうなる？

かずゆき：3分の1が12個。

T：つまり、3分の1が12個って何だっけ？

C：……

T：かずゆき君、何？

かずゆき：……

T：つまり、3分の1が12個って何？何になった？4になったよね(タイルを数える)。

⑤⑥⑦は、いずれも、整数表現が可能な分数である。このような分数については、独立した問題において扱った方がよい。また、「練習2」には、単位の付かない分数を扱うこと、タイルを用いること、基準量がタイル1枚になることなど、新しい要素が多く含まれている。「練習」ではなく、「問題」とするのが適当である。

⑧ 同分母・真分数の加法

①($\frac{1}{5} + \frac{2}{5} =$)については授業者とともに考え、②($\frac{1}{3} + \frac{1}{3} =$)、③($\frac{2}{7} + \frac{3}{7} =$)については子どもたちだけで考えた。タイルと式によって①を示した時から、「簡単じゃん」、「楽勝」など

の声が聞かれた。2枚のタイルを「くっつける」ことにより、結果が自然に導かれた。②③についても全員が正解していた。分数のタイル表現により、個別の問題に対する回答、それによる計算規則の定式化へと自然に進行した。

なお、①について、正解を確認した後、授業者から、「(答が)こうなったらどうしてだめ？」として、 $\frac{3}{10}$ が示された。これに対して、子どもたちからは、「10個のままじゃだめ」、「10個の中の3つ分になるから」、「5分の3になる」、「5分の3より小さくなる」などの理由が出された。いずれも $\frac{3}{10}$ が誤りであることを述べている。これはタイル表現の効果であろう。

先の問いに対して、「5分の3より小さくなる」という理由が出されている点に注目したい。 $\frac{3}{10}$ については、数による表記のみであり、タイル表現は行っていない。ここでは、数による表記のみによって、分子が等しい場合の分数の大小比較が行われている。比較の方法については、これまでの授業により、子どもが自力で獲得したのであろう。

ここで行われている計算については、例えば、「 $\frac{1}{5}$ mのテープと $\frac{2}{5}$ mのテープを合わせたら、何mになるでしょう？」といった、合併による意味付けを行ってもよいと思われる。

加法については、第5章「分数のたし算」においてまとめて学習する。ここで教えられる同分母・真分数の加法(くりあがりなし、約分なし)は、計算体系の「素過程(第1次)」にあたる。この点を明確にするためには、この内容は第5章に移した方がよい。

⑨ タイルの分数表現

授業書を配付した後、同じタイルを黒板に貼り、それらを見ながら授業が進行した。①についてはスムーズに解いていた。プリントを見ても全員正解している。②については、3通りの考えが出された。人数の分布と理由の説明を授業記録から次に引用する。

$\frac{3}{3}$ (10名)：まず、これ(タイル3枚)を3等分に分けたから、分母が3で、そして、3等分に分けたのを全部ますを埋めたから、3分の3だと思います。

$\frac{1}{3}$ (5名)：3分の1は3個1があるから。もとにする考えの①のやつでやった。

$\frac{3}{1}$ (2名)：このタイル(タイル1枚)が1枚でしょ。だったらさあ、1分の1はこれ(タイル1枚)が1枚でしょ。これが100個あるなら1分の100。

：1つ分に分けた3個分だから1分の3です。

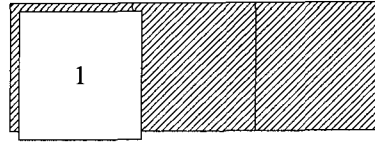
なお、 $\frac{1}{3}$ については、授業者との問答により、「3つ分で1になる大きさだから」という理由であることが確認された。 $\frac{3}{1}$ については、「分けるのがない。だから分母が1になる」ことも確認され、「 $\frac{1}{1}$ が3つ分だから」と板書された。その後、予想変更についてたずねたが、変更する子どもはいなかった。

$\frac{3}{3}$ という表現は、全体(タイル3枚)を1と見て、それに《分割分数の論理》を適用した結果であろう。 $\frac{1}{3}$ についても、全体を1と見ているが、適用しているのは《商分数の論理》である。全体を1と見る点においては共通しているが、適用する論理の違いによって2通りの表現が行われている点がおもしろい。 $\frac{3}{1}$ は少数派である。理由の説明は行われたが、それにより他の子どもの支持を得るまでには至っていない。タイル1枚が $\frac{1}{1}$ と表現されることについての説明が十分でないためであろう。

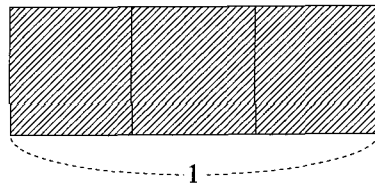
次に検討に進んだ。まず、 $\frac{3}{3}$ 、 $\frac{1}{3}$ について、全体を1と見るのではないこと、1はタイル1枚であることをもとに、検討が行われた。

T：じゃあねえ、こういう時には、全部ここ(「ことばのやくそく」)に戻って考えるというこ

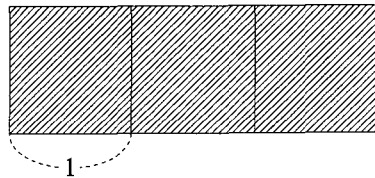
とです。じゃあ、みんなで一緒に考えましょう。本当はね、これが1なんだよね(タイル1枚を黒板から外して示す)。で、最初に言ったこと忘れたんだけど、これ、同じ大きさだよ。ね？これ、まず1だよ。このくらいの大きさなんだよ。



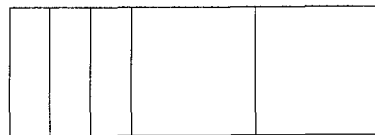
T：まず、3等分したから分母が3ということは、ゆうや君、これだけで1ですか？



T：ということになりますか、どうですか？1はどこまでですか？ここまでが1だよ。



T：そうしたら、1を3等分したからってということになると、こうなんないかな？



C：そう。そう／そうなる。

T：そうなるよね。で、そうすると、これ(タイル3枚)が1じゃないから、ちょっと、「3分(の3)」とはなりにくいんじゃないかな？ね。

T：じゃあ、次行っていい？3つ分で1になるって言うんでしょ？これはどうなるんだろう？1はこれ(タイル1枚)だから、3つぶんで1になるっていうのは、どういうことになるかな？

C：あっ！／お～お！

T：というのは？

C：とは？／あ、そうだ！／というのは？

T：っていうのが1つ。

C：そっか／3つだ。

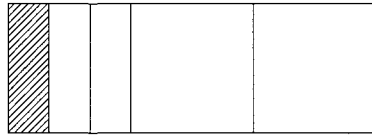
T：3つ分で1になるっていうことは、これ(タイル3枚)3つ分で1になるのかな？1はこ

れ (タイル1枚) だ。

C: あ〜/ そうだ。3分の1だったら、3つで1になっちゃうよね。

T: そうだ、いうた声が出てきたね。じゃあ、そうすると、3分の1っていうのは、この絵で言うとどこになるんだろう？

C: んーとねえ、3個分に分けた中の1個。



T: とうのわかった？

全体を1と見る考えに対しては、このような説明で十分であろう。あるいは、タイルによって $\frac{3}{3}$, $\frac{1}{3}$ を構成し、問題のタイルと比較してもよい。同じ分数が大きさの異なるタイルによって表現されることから、最初の表現について検討する必要性が示される。次に $\frac{3}{1}$ について。

T: はい。そうすると、今度、残る1分の3。この考えでいったらどうなるかということですが、ものすごく簡単に考えると、これ (タイル3枚) は何なの？

C: 1。

C: 3つ。

T: 1なの？

C (数名): 3。

T: 3だよ。すっごく簡単に考えると、これ (タイル3枚) 3だよ。で、さっき、まこと君とかずゆき君が、これは、(3分の1のタイル図を示して) こういう分け目がないから、分けてないから、これは1分の1だよっていったね。つまり、どっちの (もとなる) 考え使おう？どっちでもいいんだけど。

かずゆき: ②の別の考え！

T: (「もとなる考え」を示して) これね。これだとどうなるの？かずゆき君。

かずゆき: 1分の1が3つ。

T: うん。1分の1が3つ。ほとんどいいんだけど、これ (タイル1枚が) 1分の1になるっていうのは、つまり？

かずゆき: 1。

T: 1。そして？

かずゆき: それが3。

T: 1つ分で何になるの？

かずゆき: 1つ分で1分の1。

T: 1分の1だよ。それが3つとすると、正解は？

C (数名): 1分の3。

T: 1分の3。または、これが何になればいいんだ？

C (数名): 3。

T: 3になる。だよ。3でもいいんだけど、「分数であらわしなさい」だから、みんなはきちんと分数で表してくれました。3でもいいし、1分の3でもいい。

$\frac{3}{1}$ という表現を理解するためには、タイル1枚が $\frac{1}{1}$ と表現できることを理解することが必要である。この点が明らかになれば、次に、《分割分数の論理》により、タイル3枚について、 $\frac{1}{1} \times 3 = \frac{3}{1}$ という表現が導かれる。授業者は、この点について、「これは1分の1だよっていったね。つまり、どっちの(もとなる)考え使おう?」、「これ(タイル1枚が)1分の1になるっていうのは、つまり?」などと問いかけているが、いずれも失敗に終わっている。「どうしてタイル1枚は $\frac{1}{1}$ なの?」など、問いの意味をより明確にする必要がある。

この問いについては、タイルにおいて目盛りがないことは1等分を表現していること、1等分の意味、タイル1枚は「1つ分で1になる大きさ」であることなどが説明されなければならない。このような説明が必要な分数(分母が1の分数)については独自の問題を設けた方がよい。

また、上記の授業においては、最初から正解を述べていたかずゆきとの問答が中心であり、クラス全員における理解という点については疑問が残る。

③についても3通りの考えが出された。人数の分布と理由の説明を授業記録から次に引用する(()内の氏名は発表者)。

$2\frac{1}{3}$ (15名)：1が2個あるから、それにこっち(3枚めのタイル)は、これが3個に分けた1つ分だから、あと、3分の1だから、2と3分の1だと思います。(かなえ)

$\frac{7}{9}$ (1名)：ここ(3枚めのタイル)が3つに分かれているから、全部3つに分かれるんじゃないかなと思って、それで、ここ(1枚めのタイルと2枚めのタイル)と3分の1が塗ってあったから、9個に分けた。塗ったタイルを数えて、9分の7になりました。(あやこ)

$\frac{1}{2}$ (2名)：1個と、2つに分けた1つ分。(きょうすけ、とおる)

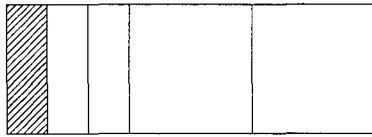
あやこは、3枚めのタイルに付されている3等分の目盛りを、1枚め、2枚めのタイルにも付した。その上で、タイル3枚を1と見て、斜線部分は1が9等分された7つ分にあたる。このように考えて、斜線部分を $\frac{7}{9}$ と表現したのである。これに対しては、 $2\frac{1}{3}$ を発表した子どもたちから、「あやこちゃんのもいいんじゃないの?」、「あやこちゃんと同じだよ」、「同じ考えでしょ」という意見が出された。あやこの考えもおもしろいが、それが $2\frac{1}{3}$ と同じではないかという意見もおもしろい。 $\frac{1}{2}$ については、理由、授業者の理解、ともに不明である。斜線のない部分に注目したのかも知れない。

まず、 $2\frac{1}{3}$ という表現が正しいことを確認し、続いて、 $\frac{7}{9}$ の検討に進んだ。

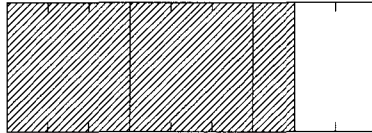
T：これ($2\frac{1}{3}$)とこれ($\frac{7}{9}$)、いっしょじゃないかというのが出た。で、今さ、もとなる考えをもう1ぺんよくまとめてみるね。(「もとなる考え」を示して)どっちを使おうか?確かに、あやこちゃんが言ってくれたみたいに、これは、3つづつ分かれてるよね。そしたら、これが9分の7かな?どの考えをもとにしたのかしら?じゃあ、1を3等分した長さが何だった?みんなで。

C (全員)：3分の1。

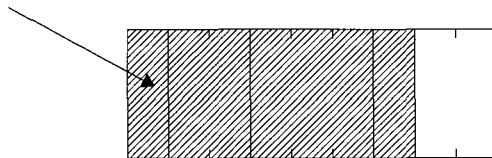
T：3分の1だよ。1を3等分した、これが3分の1だったよね。



T：そしたら、いま、全体が9になるって言ったのは？いいのかな？あやちゃん。他の人も一緒に考えてほしいんだけど、ここ、あやちゃんの考えでいくと、こうなってくるわけでしょ？



T：じゃあ、ここは何なってる？



T：3分の1だよ。そしたら、ここまで（上図の斜線部分）は何になるんだろう？

C（数名）：3分の7。

T：3分の7（板書）。3分の7になるけど？

C：ああ、そうか。

T：っていうのは？

C：全体から見て、

T：ん？

C：全体から見ないと、

T：あやちゃんはすごくいい考え出してくれたんだけど、9っていうのを、どうやって9にしたんだろう？あやちゃんわかった？言ってみて。

あやこ：3，3，3に分けて、9個分に切ったから、9等分にしたから、分母は9にした。

T：だよ。ということは、誰か気が付く？9等分したってことだろ？9等分ということは（板書「 を9等分」）、何を9等分するの？

C：3。

T：3を9等分？そういうのあるの？

C：あつ、1を、

T：ん？

C：1を／①の別の考え。

T：①の別の考えでいくと、どうなりますか？

C：（Tと一緒に）1を3等分。

T：とか、9等分とかいうことになるんですね。そうしたら、ここ（板書「 を9等分」の

下線部分)は何?

C: 3。

T: 3を9等分?

C: あっ, $1/1$ を 1 を9等分?あ, 違う。3を9等分。あ, 違う/2分の?

C: 3を9等分。やっぱし, 3を9等分。

T: これ, 3なの? (「もとになる考え」を示して) 変わっていいの?

C: じゃあ, 1, 1。

T: これは, 「じゃあ, 1」じゃなくて, 1だよ。1を9等分ということになると, あやちゃんの考えでいくと, 1は, どこからどこまでなの? 1は何等分されているの?

C (数名): 3。

T: 3等分だよ。そうすると, 分母は何になるの?

C (数名): 3。

T: 3。そうすると, 3分の?

C: 7。

T: これ ($\frac{7}{3}$) になるよね。そうすると, おかしくないよ。3分の1が全部で何個?

C (数名): 7個。

T: 7個だから, 3分の7だよ。

あやこは, 確かに, 「3を9等分した」のであり, この点を指摘した子どもたちの発言が間違っているわけではない。「3を9等分した大きさ」は $\frac{3}{9}$ と表現される(《商分数の論理》)。問題は, 授業書において, この論理が「言葉の約束」として定式化されていない点にある。授業は, もっぱら, 「言葉の約束④」の「別の考え」(《分割分数の論理》)により, 等分の対象はあくまで1でなければならないことを確認し, それにもとづいてあやこの考えを検討する展開となった。これは当然の結果である。

$\frac{b}{a} \Leftrightarrow b \div a$ という, 《商分数の論理》の直接的な表現についても, 定義に含めることが必要である。それにより, ここでは, 「3を9等分した大きさ」($\frac{3}{9}$)の7倍として, $\frac{21}{9}$ を導くことができる。これにより, $2\frac{1}{3}$, $\frac{7}{3}$, $\frac{21}{9}$ という3通りの表現が得られる。

授業においては, 先の記録に続いて, $2\frac{1}{3} = \frac{7}{3}$ であることが説明された。子どもからは「えー! すごいね」という声が聞かれた。同じ大きさに対して複数の表現が可能であることは, 子どもにとって, 新鮮な驚きであったようである。さらに, 先に発表されたあやこの考えを用い, 2枚めのタイルだけに3等分の目盛りを付すことにより, 同じタイルに対して $1\frac{4}{3}$ という表現が可能であることについても説明され, 「いっぱい答がある」とまとめられた。最後に, 仮分数, 帯分数, 真分数の用語が, それぞれ, 「上(分子)の方が大きく, グラグラと落ち着かない, 仮の分数」, 「大きいところを整数に直して出しちゃった。整数を帯のように引っ付けた分数」, 「分子が分母より小さい分数」と説明された。最後に, 子どもたちから, 「今日は大変だった」, 「おもしろかった」というつぶやきが聞かれた。

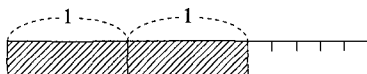
この授業においては, タイル1枚ではなく, 与えられた大きさ全体を1と見る思考が現れている。そして, そのような思考と, 分数の定義(「言葉の約束」との対立として授業が進行している。定義については, これまでの授業において導き, 様々な場面への適用を通して定着を図ってきた。この授業においては, 全体を1と見る思考との対立という観点から, 改めて, 定義の理解が問われる結果となった。

⑩ 分子が0の分数

授業書を配付し、問題を説明した後、各自の予想を問うた。黒板に3人の考えを書き、正しいと思うものに自分のネームプレートを貼ってもらったところ、全員が、こうじくん「どっちも同じだと思う」を選んだ。約6分間、時間をとって、理由について考えた。5名の子どもが理由を発表をした。授業記録から、関連する部分を次に引用する。

ひろき： $2\frac{0}{5}$ は $\frac{1}{5}$ が0になって2。で、あとの残りの2と2で同じだと思う。

たくや： $\frac{0}{5}$ は1を5つに分けた0個分になるから、ないということになる。だから、こうじくんが正しいと思います。



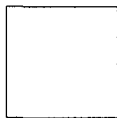
てつや： $\frac{0}{5}$ の分母の5は目盛りの数で、分子の数は $\frac{1}{5}$ が0個だから、 $2\frac{0}{5}$ は2になって、 $2\frac{0}{5}$ と2は同じ。

かなえ： $2\frac{0}{5}$ は、かけても0だから、2になると思うから同じだと思います。

きょうすけ：5つ分で0になる $\frac{0}{5}$ の0は、5つ分の中に入れても意味がない。だから、 $2\frac{0}{5}$ と2は同じになった。

ほとんどの子どもが、《分割分数の論理》により、 $\frac{0}{5} = \frac{1}{5} \times 0$ と考え、そこから、「同じ」という結論を導いている。かなえの説明に対しては、「ひさこちゃんと同じじゃないの」、「かけても0にはならない」、「何で2が出てくるの」などの質問(つぶやき)が出された。「かけても0」という発言は $\frac{1}{5} \times 0 = 0$ を意味するものであり、ひさこ(選択肢)のように、 $2\frac{0}{5} = 2 \times \frac{0}{5}$ と理解しているわけではないと思われる。きょうすけの表現は独特である。そこでは、前半に《商分数の論理》が、後半に《分割分数の論理》が用いられている。

授業においては、以上の考えを発表した後、タイルを用い、概ね、《分割分数の論理》にもとづいて、検討が行われた。

T：問題は $\frac{0}{5}$ だよ。では、 $\frac{0}{5}$ というのは？  が1だよ。では、 $\frac{5}{5}$ というのはどうなのだったっけ？

C：1！

T：5つ分で…

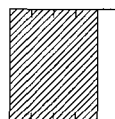
C：1になる。

C(数名)：5になる。

T：5つ分で1になるのは $\frac{1}{5}$ じゃない？

C：5になる！

T： $\frac{5}{5}$ ってというのは、5つ分で5になる。だから、5つ分で5になるということは、これ(タイル1枚)だよ。



T：じゃあ、 $\frac{4}{5}$ っていったらどこになる？

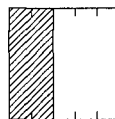
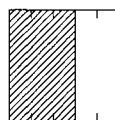
C：端から4個。

T：じゃあ、 $\frac{3}{5}$ っていったら？

C：3個。

T：じゃあ、 $\frac{2}{5}$ っていったら？

C：2。



T: じゃあ、 $\frac{1}{5}$ っていったら?

C: 1。

T: $\frac{0}{5}$ っていったら?

C: ゼロ。

T: つまり、0になるよね。だから、 $\frac{0}{5}$ というのは、みんながいったとおり、0になって、2と $\frac{0}{5}$ は同じ。みなさんが大まるといことになりますね。

その後、先に理由を発表したてつや、ひろき、たくやに対して、それが、「言葉の約束②」の「別の考え」、すなわち《分割分数の論理》によるものであることが確認された。次に、きょうすけの発表の前半部分「5つ分で0になる $\frac{0}{5}$ 」について、それが、《商分数の論理》、すなわち「言葉の約束①」によるものであること、この論理によっても、 $\frac{0}{5}=0$ を導くことが可能であることが説明され、「どっちでも考えられる」とまとめられた。


帯分数の記法の意味については、 $5\frac{2}{7}$ のタイル表現により、 $5+\frac{2}{7}$ であることが確認された。それが示されたとき、「ほえ〜」、「なあんだ。そうだったのか!」などのつぶやきが聞かれた。帯分数については、これまでの授業においても考えてきたはずであるが、記法の意味については、必ずしも自明ではなかったようである。


⑩ 「不定」と「不能」に関する問題

まず、「 $\frac{0}{5}$ m はどのような長さでしょうか」と問題を示し、それを言葉によって表現することを求めた。(1)「5つ分で0 mになる長さ」(《商分数の論理》)、(2)「 $\frac{1}{5}$ mが0個分の長さ」(《分割分数の論理》)という2通りの表現が発表された。それらを板書し、どちらで考えても0 mになることを確認した。ここまでは問題6の復習である。

次に、「 $\frac{0}{0}$ m はどのような長さでしょうか」と問題を示し、「5分の0でやったように、2つの見方で考えてみてください。(1)の考えを使うとどうなるか。それから、(2)の考えを使うとどうなるか」として、「言葉の約束」に従って表現することを求めた。その後、黒板にテープを4本貼った。

ア 1 m 

イ $1\frac{1}{2}$ m 

ウ $\frac{1}{5}$ m 

エ 3 m 

約10分後、まず、言葉による表現について、発表を求めた。発表された表現は次の通りである。あやこ：私の考えは0分の1 mが0個分の長さで、私の使ったもとにする考えは、②の別の考えです。

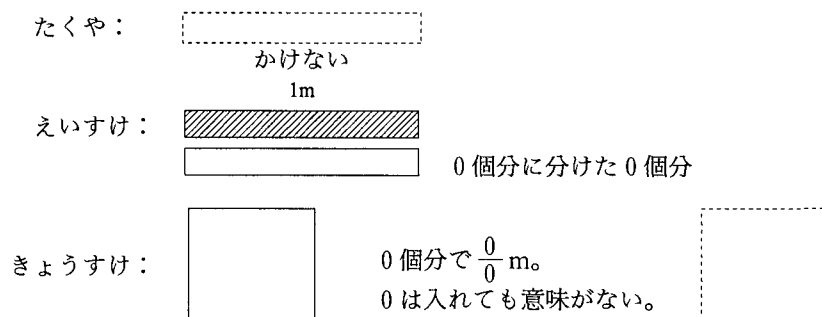
たくや：1 mを0個分に分けた0個分の長さ。

たつり：0個分で0になる長さ。

たくやの表現については、「言葉の約束」の「②の別の考え」によっていること、「1 mを0個分に分けた長さ」は $\frac{1}{0}$ mと表現できること、従って、あやこと同じであることを確認した。たつりの表現については、「言葉の約束①」を用いたことを確認した。こうして、 $\frac{0}{0}$ mにつ

いて、言葉による、次の2通りの表現が得られた。(1) $\frac{1}{0}$ m が0個分の長さ。(2) 0個分で0 m になる長さ。

次に、図による表現に移った。まず、黒板に貼られた4本のテープの中に自分の考えと一致するものがあるかどうかを問うたところ、全員が「ない」に挙手した。そこで、図を書いた子どもに対して、それを黒板に書くことを求めた。3分後、黒板に書かれた図は次の通りである。



図について、たくやは「0分の0は、0 m は0 m だから、図は書けない。0だから、0だから」、えいすけは「1が0個分で0」と説明した。きょうすけの図については、授業者が、「0等分したものが、0個あるから、『結局何も書けないよ』っていう(意味かな?)じゃあ、これと同じかな?これ(上図右側の点線の正方形)で0個」と確認した。3つの図は、0 m または0個を表現したものであり、 $\frac{0}{0}$ m = 0 m という考えにもとづくものであることが明らかになった。これは、先に見たテープに対する意見とも整合する。授業者は、「みんな、書いてくれた人は0 m だっていうことだね。いいですか?じゃあ、テープはみんな間違ってるよ、っていうこと」とまとめた。

続いて、その検討に進んだ。まず、4本のテープと子どもたちの図について、それらが、「(2) 0個分で0 m になる長さ」であるか否かが検討された。

T: 1つずつ検討してください。0 m は0個分で何 m になりますか?

C: 0 m。

T: 0 m になるね。じゃあ、0 m っていうのは正しいわけだ。じゃあ、1 m は0個分で何 m になりますか?これ、1 m が0個分で、

C: 0 m? / 1 m?

T: さっきわかったことが、「0 m が0個分で0 m」(板書)ですね。じゃあ、1 m は?(板書「1 m は0個分で」) 1 m、3つあったら何 m?

C (数名): 3 m。

T: 2つだったら?

C (数名): 2 m。

T: 1つだったら?

C (数名): 1 m。

T: 0個だったら?

C (数名): 0 m。

T: 0 m ね(板書に「0 m」と続ける)じゃあ、エはどうか? 3 m (板書「3 m は」)。3 m は2つあったら?

C : 6 m。

T : 6 m。1 つだったら？

C (数名) : 3 m。

T : 3 m。0 個だったら？

C (数名) : 0 m。

T : だよ。3 m も 0 個分で 0 m になりますね (「0 個分で 0 m」と続ける) 今度、これもいこうか？ (板書「 $1\frac{1}{2}$ m は 0 個分で」) 1 と 2 分の 1 m は 0 個分で？

C (数名) : 0 m。

T : 0 m ですね (「0 m」と続ける)。じゃあ、ウの 5 分の 1 m は？ 0 個分集めると？

C (数名) : 0 m。

C : 1 m ?

T : 0 個しか集めないんだから (板書「 $\frac{1}{5}$ m は 0 個分で」),

C : 0 個分？

T : これも 0 m ですね (「0 m」と続ける)。

T : そしたら、どれが正しいんだろう？

C : 5 番 / C : 全部。

T : 0 個分で 0 m になる長さっていうと (板書を示しながら) 0 m がそうですね。みんな書いてくれました。1 m も 0 個分で 0 m になるよね。3 m も 0 個分で 0 m になる。1 と 2 分の 1 m も 0 個分で 0 m ですね。5 分の 1 m も 0 個分で 0 m。どれが正しいんだろう？

C (数名) : みんな？

T : みんな正しいよね。

黒板に示されたすべての長さが「0 個分で 0 m になる」ことが示された。これを根拠として、授業書のまとめにあたる記述、「 $\frac{0}{0}$ m は、0 個分で 0 m になる長さですから、どのような長さでも $\frac{0}{0}$ m になります」が導かれた。そして、そのような長さについては「考えないことにする」ことが次のように説明された。

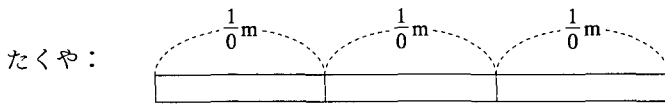
T : 0 分の 0 m って言って、例えば、きょうすけ君は 0 m を頭に思い浮かべるね。えいすけ君は 1 m を頭に思い浮かべる。たくやくんは 3 m を頭に思い浮かべる。それで話をしていると、話がゴチャゴチャになっちゃうよね。話が通じないですね。ですから、0 分の 0 っていう長さは、分数を考える時にね、考えないようにしましょう、ということですね。色々あって困るから、考えないようにしましょう。

次に、 $\frac{3}{0}$ m に進んだ。まず、「 $\frac{3}{0}$ m はどのような長さでしょうか」と問題を示し、8 分程度時間をとって考えてもらった。発表された意見は次の通りである。

ゆうや : 0 個分で 3 m になる長さ。

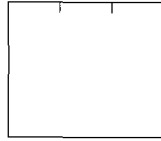


ひろき : 0 分の 1 m が 3 つ分の長さ。



えいすけ：0分の3mだと、0個に分けた3つ分だから、みんな0mになるから、0m。

きょうすけ：0個分のまずはないけど、3mの…はある。



きょうすけの図

授業においては、言葉による表現と図による表現が同時に行われた。しかしながら、両者については、一応、区別しておいた方がよいだろう。まず、定義にもとづいて言葉による表現を行い、次に、図による表現に移る。このような順序が適当である。授業書についても、この順序を示したものに改訂する。

ゆうやは《商分数の論理》による表現を行っている。この図に対しては、「0分の3mなのに、どこから3mという大きな数が出てくるの?」、「なんで大きな長さが出てくるの?」という質問が出された。これに対して、ゆうやは、「分子から出てくる」と答えている。さらに、「ってことは、じゃあ、0分の1mは1mってことなの?」と質問され、「そうじゃない」と答えている。これらの問答から判断すれば、ゆうやの図については、 $\frac{3}{0}$ mとは「0個分で3mになる長さ」のことだから、3mをテープ図によって示したが、0個分でその長さになるという点については表現できない、という意味に理解できる。ゆうやの考えについては、「(1)0個分で3mになる長さ」と板書された。後に、自分と同じ考えを選ばせたところ、ゆうやと同じ考えの子どもは7名であった。

ひろきの表現(言葉による)に対して、授業者は図による表現も求めた。ひろきはそれができなかった。そこで、「絵、これの図、書ける人いる?」という授業者の求めに応じて、たくやが図による表現を発表した。これは、《分割分数の論理》による表現である。これについては、「(2) $\frac{1}{0}$ mが3つ分の長さ」と板書された。同じ考えの子どもは4名であった。

えいすけは、先の発表に加えて、「みんな、0mになるから、0分の3mも0m」と説明した。全体として、「みんな0mになるから」が強調されている。これは、 $\frac{0}{0}$ mの授業において導いた命題、「どのような長さも0倍すると0mになる」を指しているのかも知れない。これと同じ考えの子どもはいなかった。

きょうすけの考え(言葉による)に対しては、「意味がわかりません」という意見が出された。そのため、授業者の求めに応じて、図が追加された。図については、授業者との個別のやりとりにより、「0個分というのが入るところがないってわけ。だけど、3mはあるよ、ってこと」と説明された。この説明を見る限り、きょうすけの考えはゆうやと同じように見える。ただし、授業において、この点は明確にされなかった。きょうすけの考えについては、「(3)0個分のまずはないけど3mはある」と板書された。

これらの発表により、少なくとも、 $\frac{3}{0}$ mについて、言葉による2通りの表現が得られた。まず、「(1)0個分で3mになる長さ」について、検討が行われた。

T：0個分ってどんなの？

C（数名）：0個分

C：0個分は0個分。

T：0個分は0個分。つまり？

C（数名）：ない！

T：ない？これが3mだったよね（テープを示す）ところが、0個分でというのは、あるか、ないか、どっち？

C（数名）：ない。

T：ないよね。じゃあ、これはない！みんなはないと言った。

これはあいまいなやりとりである。ここで用いられている「ない」という言葉は、「0倍という操作は考えられない」という意味にも、「どのような長さも0倍すると0mになる」という意味にも理解することができる。加えて、最後の「これはない」は、検討の結果を述べたものであるから、「0個分で3mになる長さは存在しない」という意味になる。

「(2) $\frac{1}{0}$ m が3つ分の長さ」の検討についても見ておく。まず、 $\frac{1}{3}$ m の定義（「3つ分で1mになる長さ」とそのテープ図を示し、次に、 $\frac{1}{0}$ m について、「0個分で1mになる長さ」という表現を導いた。

T：0個分で3mになる長さはなかった。0個分で1mになる長さは？どうでしょうか？
勇気を出して言ってみよう！

C（数名）：ない。

T：そうだよね。0個分で3mになる長さが無い。そしたら、0個分で1mになる長さは？

C：ない。

T：ない！ってことになるよね。こっち（板書「0個分で3mになる長さ」）はないのに、こっち（板書「0分の1mが3つ分の長さ」）はあるってことは？

C：ない。

T：とすると、これも、どういうことになる？勇気を出して言ってみたらどうなる？

C（数名）：ない。

T：ない。これもない。

「0個分で3mになる長さは存在しない」というのが、先に導いた結論であった。ここでは、これを根拠として、「0個分で1mになる長さは存在しない」、「 $\frac{1}{0}$ m が3つ分の長さ、すなわち $\frac{3}{0}$ m は存在しない」という命題が導かれている。

「 $\frac{3}{0}$ m は、0個に分けた3つ分だから、0m」（えいすけ）についても検討が行われた。1mテープの2等分、3等分を示した後、「0個に分けた3つ分ってどういうことかしら？」、「0個に分けるっていうのはどういうこと？」、「0分の3mなんていう長さは？」等の問いを行い、それらすべてに対して「ない」という返答を引き出した。

全体として、論理の筋道が見えにくい、非常に複雑な展開である。その原因としては、「ない」という言葉が、あいまい、あるいは恣意的に用いられていることがあげられる。そもそも、「0個分ってどんなの？」、「0個に分けるっていうのはどういうこと？」などの質問自体があいまいであり、どのような回答が想定されているのか不明である。子どもたちは、そのような質問に対しては、とにかく、「ない」と返答することによって、このような問題点に対応しようとしたのであろう。

しかしながら、この授業の根本的な問題点は、「どのような長さも0個分で0mになります」という命題がまったく用いられていない点にある。この命題と $\frac{3}{0}$ mの定義(「0個分で3mになる長さ」)によれば、そのような長さが存在しないこと、従って、 $\frac{3}{0}$ という分数が考えられないことは自然に導くことができる。

以上の分析により、 $\frac{3}{0}$ mについて考える際にも、 $\frac{0}{0}$ mの授業においてとられていた次の順序にもとづいて授業を進めることが必要かつ有効であることが示された。

- ① 定義にもとづいて言葉による表現を行う。
- ② 図による表現が行われている場合、それについて発表する。
- ③ 選択肢を示し、自分の予想に合うものがあるかどうか考える。
- ④ 選択肢(図を含めてもよい)の検討を通して結論を導く。

なお、④の検討は《商分数の論理》による表現についてのみ行えば十分である。授業書についても、これらの順序を示したものに改訂することが必要である。

(2) 評価テストの分析

次に、評価テストの分析を通して、授業書に対する評価を行う。

① 目的と性格

評価テストは、第1章「新しい数—分数」による授業がすべて終了した、11月24日に実施された。問題は次の通りである。18名中、15名から解答が得られた。

- (1) $\frac{1}{7}$ m はどのような長さですか？
考えられるものをできるだけたくさん書いてください。
 - (2) $\frac{3}{5}$ m はどのような長さですか？
考えられるものをできるだけたくさん書いてください。
 - (3) $\frac{9}{2}$ m はどのような長さですか？
考えられるものをできるだけたくさん書いてください。
- ★「もとになる考え」を思い出しましょう。
★絵だけでなく、できるだけ言葉で書いてください。

われわれが依拠している授業評価論によれば、「授業書による全授業が終わった後で、適切な評価問題により、授業書の目標に対する達成度を評価する」⁽²⁶⁾。ここで「授業書」とは、分数の定義(第1章)だけでなく、性質・大小関係(第2～4章)、加法(第5章)、減法(第6章)までの内容を含む。従って、評価テストについては、これらの内容に関する授業がすべて終わった後に実施するのが適当である。その際、分数の加法・減法の計算が自由自在にできるか?という点に評価の基準を設定するのは、一つの方法である⁽²⁷⁾。

今回実施した評価テストは、次の2点において、上記のものとは性格が異なる。

(26) 高村泰雄「授業書方式による教授過程の基礎理論」、同編著『物理教授法の研究』、北海道大学図書刊行会、1987年、15～16ページ。

第一に、今回の評価テストは、授業書の全体ではなく、授業書の第1章の終了後に実施された。

第二に、問題から明らかなように、今回の評価テストは、第1章に関する授業において導入し、その後、さまざまな形で用いられた分数の定義(授業においては、「もとなる考え」、「言葉の約束」などと呼ばれていた)について、授業後、その記憶を再生し、個別の分数に即して、それを表現することを求めたものである。個別の分数としては、単位分数として $\frac{1}{7}m$ 、一般の真分数として $\frac{3}{5}m$ 、仮分数として $\frac{9}{2}m$ を示した。表現に際しては、主として言葉を用いること、できるだけ多くの記述を行うことを求めた。例えば、 $\frac{3}{5}m$ については、授業において、「5つ分で3mになる長さ」、「 $\frac{1}{5}m$ が3つ分の長さ」、「1mを5等分した3つ分の長さ」などの定義、表現が行われ、用いられてきた。これらの定義、表現をどの程度想起し、言葉によって記述することができるか?——今回の評価テストの目的は、この点を明らかにすることに設定した。それにより、子どもにおける、言葉による分数理解の具体的な様相が明らかになり、授業書における定義、表現の問題点、その改善に関して何らかの示唆を得ることが期待できると考えたからである。

ただし、子どもによる分数理解については、言葉によるものだけでなく、図(テープ図、タイル図)によるもの、計算によるものなど、子どもの特性に応じた多様な形態が予想される。ここでは、主として言葉による理解に注目するが、多様に存在するであろう理解の諸形態を具体的に抽出し、その特徴を解明することは、今後の課題である。

② 対象と方法

子どもによる解答には、図(テープ図、タイル図)による表現と言葉による記述の両方が含まれている。ここでは、先に述べた観点から、言葉による記述を主要な分析対象とし、図による表現については副次的な扱いに止める。分析のために、まずは、子どもたちから得られた記述を整理・分類することが必要である。ここでは、そのためのカテゴリーを設定する。

まず、「言葉の約束」により、単位分数、例えば $\frac{1}{7}m$ は、「7つ分で1mになる長さ」(①)、「1mを7等分した長さ」(①の別の考え)と表現される。このうち、前者においては「倍」、後者については「等分」が、それぞれ、用いられている。これらは、自然数のわりざんの結果として分数を説明する立場、すなわち《商分数の論理》($\frac{b}{a} \Leftrightarrow b \div a$)による2通りの表現である。ここでは、前者を《倍を用いた商分数の論理》、後者を《等分を用いた商分数の論理》と呼ぶことにしよう。さらに、Unit of Fractionsの頭文字を用い、前者をU1、後者をU2と表記することにする。

U1：倍を用いた商分数の論理　：7つ分で1mになる長さ（言葉の約束①）

U2：等分を用いた商分数の論理：1mを7等分した長さ　（①の別の考え）

(7) 1976年の実験授業においては、この目標に対する達成度を見るための評価テストが実施されている(大田邦郎「小学校の分数指導における新しい試み(第1分冊・解説編)」、北海道大学教育学部教育方法学研究室編『教授学研究シリーズ』第3号、1978年3月、14~17ページ)。今回の授業においても、第6章終了後には、これと同じ問題を用いて、評価テストを行った。

上記の表現を、一般の真分数や仮分数に拡張する際に、次の方法が考えられる。

$\frac{4}{7}m$ を例にとると、上記の「1 m」を「4 m」に書き換えることにより、「7 つ分で 4 m になる長さ」、「4 m を 7 等分した長さ」という表現が得られる。これらは《商分数の論理》である。ここでも、前者においては「倍」、後者においては「等分」が用いられている。従って、前者を《倍を用いた商分数の論理》、後者を《等分を用いた商分数の論理》とし、Ratio Aspect of Fractions の頭文字を取って、前者を R 1、後者を R 2 と表記することにする。前者は「言葉の約束②」にあたる。

R 1 : 倍を用いた商分数の論理 : 7 つ分で 4 m になる長さ (言葉の約束②)

R 2 : 等分を用いた商分数の論理 : 4 m を 7 等分した長さ

次に、U 1、U 2 を、「7 つ分で 1 m になる長さ 1 つ分」、「1 m を 7 等分した長さ 1 つ分」ととらえ、この「1 つ分」を「4 つ分」に書き換えることによって、「7 つ分で 1 m になる長さ 4 つ分」、「1 m を 7 等分した長さ 4 つ分」という表現が得られる。これらは「 $\frac{1}{7}m$ が 4 つ分の長さ」という表現に統一することができる。これは、単位分数の自然数倍として分数を説明する立場、すなわち《分割分数の論理》($\frac{b}{a} \Leftrightarrow \frac{1}{a} \times b$) である。これは「言葉の約束②」の「別の考え」にあたる。

以上によって得られた 3 通りの表現を、ここでは、次のように整理する。なお、D とは、Division Aspect of Fractions の頭文字である。

D 1 : U 1 を用いた分割分数の論理 : 7 つ分で 1 m になる長さ 4 つ分

D 2 : U 2 を用いた分割分数の論理 : 1 m を 7 等分した長さ 4 つ分

D 3 : 分割分数の論理 : $\frac{1}{7}m$ が 4 つ分の長さ (②の別の考え)

上記のうち、D 1、D 2 においては単位分数についても説明が行われている。これに対して、D 3 においては単位分数の定義が前提とされている。この意味において、D 1、D 2 を「直接表現」、D 3 を「間接表現」と呼ぶことができる。

なお、D 3 については、これを単位分数に適用しても、単位分数を説明したことにはならない。しかしながら、子どもの解答には、例えば、 $\frac{1}{7}m$ を「 $\frac{1}{7}m$ が 1 つ分の長さ」としているものが見られた。従って、このような説明についても、一応、次のように区別しておく。

U 3 : D 3 を用いた単位分数の説明 : $\frac{1}{7}m$ が 1 つ分の長さ

これにより、単位分数については、先に述べた U 1、U 2 と合わせて、3 通りの表現が得られる。U 1、U 2 は「直接表現」、U 3 は「間接表現」である。

このようにして設定したカテゴリーを用いて、次に、子どもによる記述を整理する。単位分数、一般の真分数、仮分数のそれぞれについて、整理した結果を、表 3、表 4、表 5 に示す(59、60 ページに掲載)。これらの表には、子どもによる記述がそのまま記入されている。なお、子どもの記述には、そこにおいて用いられている論理について、一定の特徴または傾向が存在する。それにより、子どもの記述は、概ね、4 つのグループに分類することができる。表 3、表 4、表 5

においては、このグループを横点線によって示した。

次に、これらの表に見られるように、子どもによる記述には、正解の他に、表現が不十分なもの、重要な内容が書かれていないもの、数値が誤っているものなどが見られる。それらを、◎ ○△▲×によって区別したものが表6である。ここでも、先に述べた4つのグループによる分類を行い、横線によってそれを示した。

表3、表4、表5によって子どもの記述の具体的な形態を、表6によって、その全般的な傾向を知ることができる。

表6 子どもによる分数記述の概要

		単位数			真分数			仮分数						
		商分数			商分数		分割分数			商分数		分割分数		
		U1	U2	U3	R1	R2	D1	D2	D3	R1	R2	D1	D2	D3
(A)	とおる のりこ きょうすけ	◎			◎					◎				
(B)	ゆうや たつのり かなえ りえ えいすけ		○×			×		○			○			
			○			△				×				
			▲◎			○				×				
			▲○			○		▲						○
			○			○		○		○				
(C)	まこと あやこ かずゆき たくや ひろき	◎	○		◎	×				◎				
		◎	○	○				○	○					○
		◎	◎		◎	◎			○	◎	◎			○
		○	◎		◎			◎		◎			◎	
			◎	◎		◎			◎	◎			◎	◎
(D)	みか しゅん	△				△					△			
			▲					▲			×			

- ◎：正解（「m」、「長さ」を両方含んでいるもの）
- ：正解（ただし、「長さ」または「m」が書かれていないもの）
- △：表現が不十分なもの（例、「7こ分で1m」、「3mを5分した長さ」）
- ▲：重要な内容が書かれていないもの（例、U1に「1m」が書かれていない）
- ×：数値が誤っているもの（例、分母、分子の取り換え）

③ 子どもによる分数記述の分析

(1) 全般的な特徴

まず、クラスの全体に注目し、そこにおいて、《商分数の論理》、《分割分数の論理》が、どの程度適用されているかを見よう。ここでは、対象を真分数、仮分数に限定する。「等分表現」、「倍表現」の区別も含め、それぞれの論理が適用された件数を表7に示す。件数としては、表6から◎○のみを数えた結果を示した。

《商分数の論理》、《分割分数の論理》は、真分数において、それぞれ、10件、6件、仮分数においては9件、5件、全体においては11件、7件となる。《商分数の論理》に比べて、《分割分数の論理》の適用件数は低い。授業において与えた分数の定義においては、《商分数の論理》が「言葉の約束②」、《分割分数の論理》が「言葉の約束②の別の考え」として位置付けられていた。このような位置付けが《分割分数の論理》の採用件数の低さとなって現れたと考えられる。両

表7 子どもによる分数記述の論理と表現

	真分数	仮分数	全体*
商分数の論理	10	9	11
R 1:倍表現	6	6	6
R 2:等分表現	5	4	6
R 1, R 2	1	1	1
分割分数の論理	6	5	7
D 1:倍表現**	0	0	0
D 2:等分表現**	4	1	4
D 3:間接表現	3	4	4
D 2, D 3	1	0	1

* ここには、真分数、仮分数の少なくとも一方に対してその論理を適用した子どもの数を示している。

**「倍表現」「等分表現」は、単位分数の表現に関する区別である。

者に対しては、今後、対等の位置を与えることが必要である⁽²⁸⁾。

次に、「倍表現」、「等分表現」の適用件数について見よう。この点について注目されるのは次の2点である。

《商分数の論理》においては、「言葉の約束」として示した「倍表現」($\frac{3}{5}m$: 5つ分で3mになる長さ) 6件に対して、「等分表現」($\frac{3}{5}m$: 3mを5等分した長さ)が6件見られる(いずれも総数)。授業において、この表現が直接に用いられたことはほとんどなかった⁽²⁹⁾。この表現を導く方法としては、(1)「言葉の約束①」の「別の考え」($\frac{1}{3}m$: 1mを3等分した長さ)を真分数、仮分数に適用する、(2)「言葉の約束②」($\frac{2}{3}m$: 3つ分で2mになる長さ)の逆表現として導く、などが考えられる。いずれにしても、このような表現が、子どもによって自力で導かれていることは注目に値する。この表現については、今後、「言葉の約束」に入れることを検討したい。

《分割分数の論理》について見よう。「間接表現」であるD 3($\frac{3}{5}m$: $\frac{1}{5}m$ が3つ分の長さ)が4件見られる。授業において、この表現を「言葉の約束」としたことを考えれば、これは自然な結果である。注目されるのは、ここでも、直接には用いられなかった表現であるD 2($\frac{3}{5}m$: 1mを5等分した長さ3つ分)が4件見られることである。これは、「言葉の約束①」の「別の考え」と「言葉の約束②」の「別の考え」を組み合わせることによって得られる表現であり、分数のタイル表現(練習2)、タイルの分数表現(練習3)などにおいて有効に機能する。これらの内容を学習する際に、子どもが自力で導いたものと考えられる。この表現についても、今後、「言葉の約束」に入れることを検討したい。

(28) この点については、問題2に関する授業分析においても指摘した。

(29) 問題2に関する授業分析において示したように、 $\frac{2}{3}m$ の長さの予想において、1人の子どもが「2mを3等分した長さ」を発表した。また、翌日の授業において同じことを聞いたところ、「2mを3つに分けた1つ分」という回答が得られた。

(2) 4つのグループとその特徴

次に、表6に示された4つのグループに注目しよう。ここでは、まず、先に設定したカテゴリーを用いて、各グループにおいて行われている表現およびその表現を行った子どもの人数を示す(なお、授業において「言葉の約束」として与えた表現については、その点を注記した)。これにもとづいて、各グループにおける分数記述の特徴、傾向について分析、考察を加える。

(A) 「倍」を用いた《商分数の論理》に依拠したグループ(3名)

- | | | | | |
|-----|----------------|-------------------|----|----------|
| (1) | $\frac{1}{7}m$ | U 1 : 7つ分で1mになる長さ | 3名 | (言葉の約束①) |
| (2) | $\frac{3}{5}m$ | R 1 : 5つ分で3mになる長さ | 3名 | (言葉の約束②) |
| (3) | $\frac{9}{2}m$ | R 1 : 2つ分で9mになる長さ | 3名 | |

このグループにおいては、一貫して、「倍」を用いた《商分数の論理》により、“ $\frac{b}{a}m \Leftrightarrow a$ 個分で**bm**になる長さ”という表現が行われている(U 1, R 1)。《分割分数の論理》はまったく用いられていない。

授業においては、一般の真分数について、《商分数の論理》による表現が「言葉の約束②」、《分割分数の論理》による表現が「言葉の約束②」の「別の考え」として位置付けられていた。このような位置付けが不適切であったことについては先に述べた。このグループの子どもたちは、「言葉の約束」として示された《商分数の論理》に忠実に従って、3つの分数を記述したものと見られる。

(B) 主に、「等分」を用いた《商分数の論理》に依拠したグループ(5名)

- | | | | | |
|-----|----------------|------------------------------|----|---------------|
| (1) | $\frac{1}{7}m$ | U 2 : 1mを7等分した長さ | 5名 | (言葉の約束①の別の考え) |
| (2) | $\frac{3}{5}m$ | R 2 : 3mを5等分した長さ | 5名 | |
| | | D 2 : 1mを5等分した3つ分の長さ | 3名 | |
| (3) | $\frac{9}{2}m$ | R 2 : 9mを2等分した長さ | 4名 | |
| | | D 3 : $\frac{1}{2}m$ が9個分の長さ | 1名 | |

このグループにおいては、主として、「等分」を用いた《商分数の論理》により、“ $\frac{b}{a}m \Leftrightarrow bm$ をa等分した長さ”という表現方法が用いられている(U 2, R 2)。真分数についても、単位分数に対しては、「等分」を用いた《商分数の論理》が適用されている(D 2)。

授業において、この表現は「言葉の約束①」の「別の考え」として示された。このグループの子どもたちは、主としてこの論理に依拠したものと見られる。そして、単位分数だけでなく、真分数、仮分数に対しても、この論理を適用することを試みている。その結果、(2)–R 2, (3)–R 2など、授業においては直接に用いられなかった表現を独力で導いているケースが見られる。ただし、表6において示されているように、失敗しているケースも多い。

(C) 《商分数の論理》、《分割分数の論理》の両方に依拠したグループ（5名）

(1) $\frac{1}{7}$ m	U 1 : 7つ分で1 m になる長さ	4名	(言葉の約束①)
	U 2 : 1 m を 7等分した長さ	5名	(言葉の約束①の別の考え)
	U 3 : $\frac{1}{7}$ m が 1つ分の長さ	2名	
(2) $\frac{3}{5}$ m	R 1 : 5つ分で3 m になる長さ	3名	(言葉の約束②)
	R 2 : 3 m を 5等分した長さ	3名	
	D 2 : 1 m を 5等分した3つ分の長さ	2名	
(3) $\frac{9}{2}$ m	D 3 : $\frac{1}{5}$ m が 3つ分の長さ	3名	(言葉の約束②の別の考え)
	R 1 : 2つ分で9 m になる長さ	3名	
	R 2 : 9 m を 2等分した長さ	2名	
	D 2 : 1 m を 2等分した9つ分の長さ	1名	
	D 3 : $\frac{1}{2}$ m が 9つ分の長さ	3名	

このグループにおいては、3つの分数のいずれについても、《商分数の論理》および《分割分数の論理》を用いた、多様な表現が行われている。「言葉の約束」はもちろんのこと、授業においては直接に用いられなかった表現も数多く記述されている。表6から分かるように、表現の不十分なものや数値の誤りもほとんど見られない⁽³⁰⁾。

(D) 言葉による表現がうまくできないグループ（2名）

このグループに属する子どもは2名である。 $\frac{1}{7}$ m を「7つ分の1こ」、 $\frac{3}{5}$ m を「3 m の5こ分の1つ」、 $\frac{9}{2}$ m を「2の中に9個目盛りがある」とするなど、等分の対象である1 m の欠落、5等分を「5こ分」とする誤り、分母と分子の取り違いなどが目立つ。言葉による表現がうまくできないグループと見られる。

これに対して、図による表現は概ね良好である。1名は、仮分数($\frac{9}{2}$ m)の表現(タイル図)に失敗しているが、単位分数、真分数については正しい図(テープ図)を書いている。もう1名は、3つの分数のすべてについて正しいテープ図を書いている。このグループに属する子どもたちにとっては、記述においても、理解においても、図を用いた方が容易なのであろう。

(30) 唯一の誤りは、まことによる真分数の記述に見られる。表4に示されているように、これは、 $\frac{3}{5}$ m を「3 m を5等分した3つ分」と記述したものである。なお、図についても、この長さを表現するテープ図を書いている。

表3：単位分数 $\frac{1}{7}$ の解答一覧

表記例	単位分数										間接表現 (U3)				
	直線表現					商分数									
	倍表現 (U1)					等分表現 (U2)									
とおる	7つ分	1mになる	長さ	(1つ分の)	(長さ)	1mを	7等分した	長さ	(1つ分の)	(長さ)			$\frac{1}{7}m$ が	1つ分の	長さ
のりこ	7つ分	1mになる	長さ												
きょうすけ	7つ分	1mになる	長さ												
ゆうや						1を	7つに分けた			一つ分					
たつり						7を	1等分した			長さ					
かなえ						1mを	7つに分けた			1つぶん					
りえ						1mを	7こに分けた			1つ分の					
えいすけ						1mを	7こに分けた			1つ分の					
まこと	7こ分	1mになる	長さ			1mを	7とう分したうちの			1つ分					
あやこ	7つ分	1mになる	長さ			1を	7こに分けた			1つ分			$\frac{1}{7}$ が	1つ分	
かずゆき	7つ分	1mになる	長さ			1mを	7等分した			長さ					
たくや	7つ分	1になる	長さ			1mを	7とう分した			1つ分の					
ひろき						1mを	7とう分した			長さ			$\frac{1}{7}m$ が	1つ分の	長さ
みか	7こ分	1m													
しゅん							7つ分の			1こ					

表4：真分数 $\frac{3}{5}$ の解答一覧

表記例	真分数												間接表現 (D3)						
	商分数						分割分数												
	直接表現						直接表現												
とおる	5つ分	3mになる	長さ	(1つ分の)	(長さ)	3mを	5等分した	長さ	(1つ分の)	(長さ)	5つ分	1mになる	長さ	3つ分(の)	(長さ)	$\frac{3}{5}m$ が	3つ分の	長さ	
のりこ	5つ分	3mになる	長さ																
きょうすけ	5つ分	3mになる	長さ																
ゆうや						5を	3等分した	長さ				1を	5つに分けた		3つ分				
たつり						3mを	5分した	長さ											
かなえ						3mを	5つに分けた			1つ分									
りえ						3mを	5つに分けた			1つ分			5こに分けた		3つ分				
えいすけ						3mを	5つに分けた			1つ分			1mを	5つに分けた		3つ分			
まこと	5こ分	3mになる	長さ			3mを	5とう分したうちの			3つ分									
あやこ	5つ分	3mになる	長さ			3mを	5等分した	長さ				1を	5つに分けた		3つ分		$\frac{3}{5}m$ が	3つ分	
かずゆき	5つ分	3mになる	長さ			3mを	5等分した	長さ				1mを	5とう分した		3つ分の	長さ			
たくや						1mを	5とう分した	長さ									$\frac{3}{5}m$ が	3つ分の	長さ
ひろき																			
みか						3mの	5こ分の			1つ									
しゅん													5つ分の		3こ				

表5：仮分数 $\frac{9}{2}$ の解答一覧

表記例	仮分数																							
	商分数										分割分数													
	直接表現					間接表現					直接表現					間接表現								
	倍表現(R1)		等分表現(R2)			倍表現(D1)		等分表現(D2)			間接表現(D3)													
	2つ分で	9mになる	長さ	(1つ分の)	(長さ)	9mを	2等分した	長さ	(1つ分の)	(長さ)	2つ分で	1mになる	長さ	9つ分の	(長さ)	1mを	2等分した	長さ	9つ分の	(長さ)	$\frac{1}{2}$ mが	9つ分の	長さ	
とおる	2つ分で	9mになる	長さ																					
のりこ	2つ分で	9mになる	長さ																					
きょうすけ	2つ分で	9mになる	長さ																					
ゆうや						9を	2つに分けた			一つ分														
たつり						2mを	9分した			長さ														
かなえ						2mを	9こに分けた			1つ分の	長さ													
りえ																								
えいすけ						9mを	2つに分けた			一つ分											$\frac{1}{2}$ が	9こあつまると	$\frac{9}{2}$	
まこと	2こ分で	9mになる	長さ																					
あやこ	2つ分で	9mになる	長さ			9mを	2等分した	長さ													$\frac{1}{2}$ が	9こ分		
かづゆき	2つ分で	9mになる	長さ																		$\frac{1}{2}$ mが	9こ分		
たくや	2つ分で	9mになる	長さ			9mを	2とう分した	長さ					1mを	2とう分した	9つ分の	長さ					$\frac{1}{2}$ mが	9こ分の	長さ	
ひろき						9mの	2こ分の			1つ														
みか																								
しゅん						2の中に	9こメモリがある																	

(3) 感想文の分析

ここでは、授業に関する子どもの感想文の分析を通して、授業書の評価を行う。

① 対象と方法

まず、今回の授業において得られた子どもの感想文は表8のように分類できる。

表8 感想文の分類

要領 分類	日時	授業との関係	所要時間 内容指定等*	記述量**
①	11月13日	研究問題まで終了	授業終了時、5分程度	1～2行程度
②	11月24日	第1章「新しい数—分数」が終了	授業とは別に、まとまった時間を取った	2～7行程度
③	11月24日	第1章「新しい数—分数」が終了	「わかりにくかったところ」を特に記述する	1～2行程度
④	12月17日	授業書の内容がすべて終了	授業終了時、5分程度	1～3行程度
⑤	12月18日	授業の内容がすべて終了	授業とは別に、まとまった時間を取った	2～7行程度

* 内容指定を行ったのは③のみである。その他については、「授業についての感想を書いてください」という程度の指示である。

**1行あたり38字による計算。

ここでは、①、②、③において得られた記述を主たる分析対象とする。④⑤については、第1章の授業に関する記述に限定する。

①は、授業の前半部分（主として、長さの測定を通して分数の定義を導入する）が終了した時点において書かれた感想である。これについては、特定の問題に関する感想は少なく、「楽しかった」、「むずかしかった」など、授業に関する全般的な感想を述べたものがほとんどである。従って、これについては、「むずかしい」↔「かんたん」、「楽しい」↔「楽しくない」という視点を設定し、それにもとづく分類と分析を行う。

この他、①には、大学生との関わりについて述べた感想も見られる。これについては、授業時間内におけるものと給食、昼休みなど、授業以外の時間におけるものとに分類できる。ここでは、前者のみを、先に設定した視点との関わりにおいて、とりあげる。

なお、①のうち、特定の問題に関する感想については、次において分析の対象とする。

②については、①とは逆に、特定の問題に関する感想がほとんどである。この他、少数ではあるが、①と同じく、授業に関する全般的な感想を述べたものや、「今はさいしょの時よりわかってきた」など、授業の進行に伴う理解の変化を述べたものなどが見られる。③については、教師の指示に従い、「わかりにくかった」内容が、概ね、授業書の問題に即して、記述されている。④⑤においても、授業の内容に関する記述がほとんどである。ただし、④⑤においては、第2章以降の内容に関する記述も含まれている。これらについては、第1章「新しい数—分数」に

関する記述に限定する。なお、③が第1章終了直後の感想であるのに対して、④⑤は、第1章終了時から計算しても、24～25日を経過した後の感想である。これだけの時間を経た後においても、特定の内容に関する授業が感想文に記述されるということは、それだけ、その内容が強く記憶・印象に残っていることを意味するものであろう。

以上により、まず、①～⑤のうち、第1章の個別的な問題(練習, お話, 研究問題を含む)に関する記述を対象とし、それらを問題別に分類し、分析を行う。その際、次の諸点に留意する。

- (1) ②③と④⑤との間に時間的な間隔があることを踏まえ、引用の際、感想文の末尾にこれらの番号を付す。
- (2) 一人の子どもが、一つの問題について、①～⑤の複数の箇所において感想を述べている場合がある。これは、その子どもにとって、それだけ、その問題が、強く記憶・印象に残っていることを示すものであろう。その場合には、感想文の末尾に該当する分類番号をすべて記す。
- (3) 複数の問題について、それらをひとまとめにした表現を用いている場合も見られる。例えば、「はんぱをはかる(問題)」、「大難問」、「タイルの分数」などの用語である。このうち、例えば、「大難問」は、授業において問題を提示する際に授業者が用いた用語であり、具体的には、問題3, 問題4, 研究問題を指す。感想文において、このような用語が用いられている場合には次のように扱う。

その用語の指示している問題が、複数の問題のうち、一つの問題であると判断できる場合には、その問題において感想を引用する。そのような判断ができない場合には、その用語において指示されているすべての問題において、その感想を引用する。従って、この場合、「大難問」については3箇所、「タイルの分数」については、練習2, 問題5, 練習3の3箇所、「はんぱをはかる」問題については問題1, 練習1, 問題4の3箇所において引用することになる。

次に、②のうち、後半部分(主としてタイルを用いて分数の定義の定着を図る)も含んだ、授業全体に関する全般的な感想を述べたものについて、独自の分析を行う。

以上により、授業に関する感想文は、次の3つの観点から整理される。

- (1) 授業の前半部文に関する全般的な感想
- (2) 授業の全体に関する全般的な感想
- (3) 授業書の問題(練習, お話, 研究問題を含む)に関する個別的な感想

一人の子どもによる感想文を例にして、上記の観点の適用例を次に示す。感想文の中に[]によって適用する観点を示した。(3)を適用する場合には、指示していると見られる授業書の問題を示した。

- | |
|--|
| <ol style="list-style-type: none">① 全部むずかしかった [(1)]。いちばんむずかしかったのはさいごのもんだい [(3), 研究問題] とその前のもんだい [(3), 問題4] がいちばんむずかしい。② 最初はもとにする考えがなくてすごくむずかしかったけど [(3), 問題1], 2回目は出てきたからちょっとかんたんだった [(3), 問題2] けど、だいなんもんがむずかしかったです。でも、だいなんもんが中学生まで(に)おぼえればいいけど、すぐ忘れるから、出てきてもわかんないかも知れない。最後のもんだいがむずかしかった [(3), 研究問題]。 |
|--|

テストもむずかしかったけど、楽しかった [(2)]。

- ③ 4問め、分数であらわしてみよう。どうやってですか(がわかりにくかった) [(3), 問題4]。
- ④ 大学生の人と勉強して楽しかった。
- ⑤ いちばん算数の中でむずかしかったのは、一番めと二まいめです [(3), 問題1, 問題2]。あとはさいごのです [問題7]。1まいめはテープの長さがなんメートルかわかりませんでした [(3), 問題1]。二まいめは3つ分で三メートル(「2m」の誤記と思われる)になる長さがわかりませんでした [(3), 問題2]。

この感想文において特徴的なことは、ここであげられている問題が、授業書の第1章に集中していること、それらのほとんどが「むずかしかった」と評価されていること、「むずかしかった」問題に関する授業が「楽しかった」と評価されていること、⑤においても、第1章の問題に関する感想が、再度、記述されていること、などであろう。

なお、最後の点に関連して、例えば、問題1が②と⑤において言及されている。このような場合、先に述べた留意点に従い、問題1の分類において次のように引用する。

最初はもとにする考えがなくてすごくむずかしかった(②)。いちばん算数の中でむずかしかったのは(中略)一番めです。1まいめはテープの長さがなんメートルかわかりませんでした(⑤)。

この感想文においては、問題1が「むずかしかった」点に関連して、2点に渡って内容の異なった記述が行われている。このような場合は上記のように引用する。これに対して、同じ内容の記述が複数の箇所において行われている場合については、引用文は一つにし、その末尾に該当する番号を付す。

② 感想文の分類と分析

②-1 授業の前半部分に関する全般的な感想

まず、先に述べた視点と方法により、感想①の記述を分類すると、次のようになる。

(1) 楽しかった・おもしろかった(4名)

- ◆ 算数の時間はたくさんあったけど、たのしかったです。大学生の人にヒントなどをもらってよかったです。今までで一番たのしい算数でした。
- ◆ 算数でやった分数が3時間もあったから、頭がショートしそうだったけど、楽しかった。
- ◆ 大学生の人といっしょにやっていて、すごくおもしろかった。
- ◆ おもしろかった。

(2) かんたんだった(2名)

- ◆ 4, 5, 6時間目、ヒントをもらってすこしかんたんだった。
- ◆ 大学生がヒントをくれてよくわかった。こまっていた時、大学生が教えてくれた。勉強はとてめかんたんだった。

(3) むずかしかった (2名)

- ◆ すごくむずかしかった。ヒントがなければぜんぶわかんなかった。
- ◆ 全部むずかしかった。

(4) むずかしかったけど、楽しかった (2名)

- ◆ みんなとってもむずかしいもんだいだっただけど、とつてもたのしい算数でした。
- ◆ はじめはかんたんだったけど、どんどんむずかしくても楽しかった。

(5) かんたんだったけど、楽しかった (1名)

- ◆ かんたんだった。でも楽しかった。

(6) その他 (6名)

- ◆ (大学生が) 問題をいっしょにしてくれてうれしかった。
- ◆ くどうあき子さんがずうっとぼくたちの所に来て、ヒントをくれて、とてもいいヒントだと思った。
- ◆ 大学生が算数のわからないところのヒントをくれました。
- ◆ 少しヒントを教えてもらってよかった。
- ◆ しゅくだいがなくてよかった。
- ◆ 2日も算数の勉強をして、つかれた。

先に述べたように、以上は、「むずかしい」↔「かんたん」、「楽しい」↔「楽しくない」という視点にもとづく分類である。

「楽しい」と書いた子どもを総計すると、18名中、7名になる。一方、「かんたん」、「むずかしい」とのみ書いた子どもは各2名である。これらの子どもたちも含め、「楽しい」と書いていない子どもが11名いることになる。その子どもたちがどのように感じているのかは不明である。しかしながら、ここでは、「むずかしい、楽しい」、「かんたん、楽しい」の組み合わせが見られる(それぞれ2名、1名)のに対して、「むずかしい、楽しくない」、「かんたん、楽しくない」の組み合わせが見られない点に注目しておきたい。

②-2 授業の全体に関する全般的な感想

- ◆ 一番さいしょの時はむずかしかったけど、今はさいしょの時よりわかってきた (②)。
- ◆ ぼくは算数はあまり好きじゃなかったけど、分数の勉強がすこし好きになりました。でも、むずかしかったです。かんたんだと思ったけど、むずかしかったです。ぜんぜんわかんない問題もありました。けど大学生の人たちにヒントをもらったり、いっしょにしたのしかかったです (②)。
- ◆ 一ばんはじめの二日休んでいて、ちょっとわかりづらかったです。だけど、みんなといっしょにやってできてうれしかったです (②)。
- ◆ はじめはかんたんだったのにむずかしかったけどよくかんがえればかんたんだった (②)。
- ◆ むずかしかったけど、楽しかった (②)。

ここでも、「むずかしかった」けど、「わかってきた」、「楽しかった」、「分数の勉強が好きになった」、「できてうれしかった」などの感想が目立つ。件数は少ないけれども、高度な教育内容を学ぶことに対する積極的、肯定的な評価が行われている。

②-3 授業書の問題（練習，お話，研究問題）に関する個別的な感想

先に述べた視点と方法にもとづき，次に，授業書の問題に関する個別的な感想について，分類と分析を行う。合わせて，その問題について感想を述べた子どもの総数，そのうち，その問題が「わかりにくい」「むずかしい」という感想を述べた子どもの総数を，この順序によって（ / ）に示した。

問題1，練習1：測定1段階による単位分数の導入（8名／7名）

- ◆ はんばでこたえをだすの（がわかりにくかった）(①)。
- ◆ ほくは，一番びっくりしたのは別の考えです。ほくは，別の考えがあるなんて予想もしなかったです (②)。
- ◆ はんばが出て，そのはんばをはかるときがむずかしかった (③)。
- ◆ 1番さいしょにやったのが1番むずかしかった (⑤)。
- ◆ 最初もとにする考えがなくてすごくむずかしかった(②)。いちばん算数の中でむずかしかったのは(中略)一番めです。1まいめはテープの長さがなんメートルかわかりませんでした (⑤)。
- ◆ ほくが1番むずかしかったのは，やっぱり，1番最初の問題です。1番最初は $\frac{1}{3}$ がどういうものか知らないし，言葉も知りません。だから，何をもとにしてもわかりませんので，むずかしかったです (②，⑤)。
- ◆ ほくが，すごくむずかしかったのはさいしょのときです。さいしょのときは，分数はどういうものかぜんぜんわかりませんでした。でも，先生たちのせつめいでわかりました。だから，ほくもはっぴょうができました (⑤)。
- ◆ むずかしかった所は1番さいしょのほうのかつ(「やつ」の誤記か?)です。まだしよきゅうなみだったからです/さいしょの方でむずかしかったのは，こたえかたがわからなかった。テープをはかるのがむずかしかった。こたえるのがむずかしかった/さいしょのほうだったから，ことばのいみがわからなかった。あとではわかってきた (⑤)。

問題1について感想を述べた子どものほとんどが，「むずかしかった」と述べている。「いちばんむずかしかった」，「すごくむずかしかった」という表現も見られる。「もとにする考えがなくて」，「こたえかたがわからなかった」など，理由に関する記述も見られる。特に注目されるのは，⑤の感想において，「むずかしかった」として問題1をあげた子どもが5名いることである。この感想は，分数の定義（授業書の第1章）に始まり，性質，大小関係（第2，3，4章）を経て，加法・減法（第5，6章）までの学習が終了した時点において，書かれたものである。この間，1ヶ月以上の時間が経過している。そのような時点において，「むずかしかった」問題として感想に記述されるということは，それだけ，問題1の「むずかしさ」が，記憶，印象に残っていることを示すものであろう。

お話：分数と小数（0名／0名）

問題2：商分数と分割分数の区別と統一 (1) (5名／3名)

- ◆ ほくは，一番びっくりしたのは別の考えです。ほくは，別の考えがあるなんて予想もしなかったです (②)。

- ◆ 2回目は(もとにする考え)出てきたから、ちょっとかんたんだった(②)。いちばん算数の中でむずかしかったのは、(中略)二まいめです。二まいめは3つ分で三メートル(「二メートル」の誤記であろう)になる長さがわかりませんでした(⑤)。
- ◆ $2\frac{2}{3}m$ ($\frac{2}{3}m$ の誤記と思われる)はどのような長さだと思いますかのところ(がわかりにくかった)(③)。
- ◆ いままでなかで楽しかったのは $\frac{2}{3}m$ の問題のときです。なんでかというと大学の人たちからこれでいいのとかヒントをくれてうれしかった(から)です(③)。
- ◆ 分子と分母のところ(が)どっちかわからなくて、おぼえられなくて、むずかしかった(③)。「別の考え」に関する感想は問題1にも分類している。これは、分数について、2通りの定義が可能であることに対する感想であろう。問題2においては、問題1で行った単位分数の定義を一般の真分数に拡張したわけであるが、ここでは、「もとにする考え」があったから、問題1に較べて「ちょっとかんたんだった」という感想が述べられている。

問題3：商分数と分割分数の区別と統一 (2) (総計：13名/11名)

(1) $2\frac{2}{3}m$ は3つ分で何mになるでしょう(5名/5名)

- ◆ $2\frac{2}{3}m$ は3つ分で何mになるでしょう(が)むずかしかった(③)。
- ◆ $2\frac{2}{3}m$ は3つ分で何mになるでしょうの問題で、大学生の人に $\frac{2}{3}$ を聞いてもよく分らなかった(③)。
- ◆ $2\frac{2}{3}$ は3つ分で何mになるでしょう。がどうなって、なるかがわすれそう(③)。
- ◆ 問題3で、「 $2\frac{2}{3}m$ は3つ分で何mになるでしょう」がむずかしかった(③)。
- ◆ No3の3つ分の意味をとりちがえました(はじめ)。だって3つ分というので、3つに分けるのかと思ったのです(③)。

(2) $2\frac{2}{3}m$ は□つ分で□mになる長さです。だから、 $2\frac{2}{3}m = \frac{\square}{\square}m$ 。(3名/3名)

- ◆ $2\frac{2}{3}m = \frac{?}{?}m$ はなんだろうと言うのもでた。これはむずかしかった。だけど、ヒントがあつてわかつた(②)。
- ◆ $2\frac{2}{3}m$ は、何分の何mかがわかりにくい(③)。
- ◆ 問題3；分母の数より分子の数の方が高くなるから(わかりにくかった)(③)。

(3) どちらかに特定できないもの(5名/3名)

- ◆ さいごのもんだいとその前のもんだいがいちばんむずかしい(①)。
- ◆ 大難問がむずかしかった。いろいろな問題があつてむずかしかった(①, ④)。
- ◆ 4, 5, 6時間目、ヒントをもらつてすこしかんたんだった(①)。
- ◆ 大なん問も出た。でも、ちょっとかんたんだった(②)。
- ◆ いちばんさいしょの大なん問がすごくむずかしかったです(①, ④, ⑤)。

18名中、13名が、この問題について感想を述べている。しかも、そのうち11名が「むずかしかった」と述べている。ほとんどが①②③であるが、④⑤において述べたものも2名見られる。

授業書においては、問題2において、真分数について2通りの定義を導いた後、その十分な定着を図らないまま、問題3において、それを、帯分数・仮分数に拡張することを求めている。問題3の「むずかしさ」の最も大きな原因はこの点にあると考えられる。その他、(1)については、帯分数の記法の意味、分配法則などの内容が関連していること、(2)については、上記の引用にあるように、はじめて、「分母の数より分子の数の方が高くなる」ことなどがあげられる。

また、授業過程の分析においても示されているように、問題2の授業において、「3つ分」という言葉が「3倍」と「3等分」という2つの意味に混同して用いられた。これはこの問題の理解を妨げる要因となった。

しかしながら、授業記録において示されているように、これらの「むずかしさ」は、楽しい授業となる可能性を内包しているのであり、授業書からこの問題を削除する理由にはならない。今後、「分」に関する無用な混乱についてはそれを招く原因を除去する、問題2に続いて、真分数の定義を定着させるための練習問題を追加する、などの改善を図ることが必要である。

問題4：測定2段階による真分数の導入（11名／8名）

- ◆ 4, 5, 6時間目、ヒントをもらってすこしかんたんだった (①)。
- ◆ はんばでこたえをだすの (がわかりにくかった) (①)。
- ◆ さいごのもんだいとその前のもんだいがいちばんむずかしい (①)。
- ◆ 大なんもんがすごくむずかしかった (①, ④)。
- ◆ いろいろな大なん問があつてたいへんだった (①, ④)。
- ◆ 大なん問も出た。でも、ちょっとかんたんだった (②)。
- ◆ わたしは、はんばが出たとき、どうやればいいかわかんなかったけど、2つに折ってみたらはんばの数が出てきた (②)。
- ◆ 4問め、2回はんばが出たとき。どうやったらはんばがはかれるか (がわかりにくかった) (③)。
- ◆ はんばが出て、そのはんばをはかるときがむずかしかった (③)。
- ◆ 2回はんばがでたのが、わかりにくかった。こたえのだししかた。はんばをどうするか (③)。
- ◆ 4問め、分数であらわしてみよう。どうやってだすか (がわかりにくかった) (③)。

「ヒントをもらってすこしかんたんだった」、「ちょっとかんたんだった」などについては、むずかしかったのか否か、判断が分かれるところであろう。上記の8名には、このような感想は含めていない。「わかりにくかった」、「むずかしかった」と明記している感想だけを数えた結果である。それでも、18名中、8名の指摘であるから、約半数の子どもが「むずかしさ」を指摘していることになる。授業過程の分析結果からは意外な結果と見ることもできる。しかしながら、この「むずかしさ」についても消極的に評価する必要はない。逆に、「楽しさ」を保障する条件と見るべきであろう。

研究問題：互除操作の繰り返しは有限か？無限か？（5名／4名）

- ◆ さいごのもんだい (中略) がいちばんむずかしい (①)。
- ◆ 最後の問題が中学生のですごいむずかしかったです (①)。
- ◆ 大なんもんがすごくむずかしかった (①, ④)。
- ◆ 大難問がむずかしかった。いろいろな問題があつてむずかしかった (①, ④)。
- ◆ だいなんもんが中学生まで (に) おぼえればいけど、すぐ忘れるから、出てきてもわかんないかも知れない (②)。

「中学生」という言葉が見られるのは、この問題の授業の際に、授業者が解答を保留し、「中学校で学習するので、その時に、また考えてください」としたことによる。もちろん、それまで記憶に止めておかなければならない性質の問題ではなく、「すぐに忘れ」ても特に支障はない。

練習2：分数のタイル表現（3名／1名）

- ◆ れんしゅうの2の③ ($2\frac{7}{4}$ をタイルによって表現する問題)はわからなかったけど、みじかくいうと 4×2 で8で、 $8+7$ で15で、短くいうと $\frac{15}{4}$ になった。ほくははじめてわかった(②)。
- ◆ $2\frac{7}{4}$ がむずかしかった(②)。
- ◆ タイルの分数もした(②)。

問題5：同分母・真分数の加法（1名／0名）

- ◆ タイルの分数もした(②)。

練習3：タイルの分数表現（1名／0名）

- ◆ タイルの分数もした(②)。

後半部分においては、タイルを用いて分数を学習する。テープからタイルへと教材が変わることについては特に述べられていない。分数部分が仮分数になっている帯分数表記が「むずかしかった」、帯分数を仮分数に変形してはじめて理解できた、という感想が見られる。

問題6：分子が0の分数（3名／2名）

- ◆ 大学生のお兄さんやお姉さんが来たときは、ヒントをもらったりしてやったから、わかったけど、自分でやったら6問めのところが少しわからなかった(②)。
- ◆ こういう問題がわかりにくい。まず、 $2\frac{0}{5}$ と2はどちらが大きいでしょう。で、わかりにくいです(③)。
- ◆ 問題6の「 $2\frac{0}{5}$ と2はどちらが大きいでしょうか」で、ほくは最初はしげや君(予想： $2\frac{0}{5}$ のほうがちょっと大きい)だったけど、よく見ると、2はぬかして、 $\frac{0}{5}$ に5つ分のますはあるけど0を入れても意味がない。だから、こうじ君のがあってると思った(②, ③)。

授業では全員が正解していた。「少しわからなかった」、「わかりにくい」という感想が見られるが、全体から見ると件数は少ない。

問題7： $\frac{0}{0}$ m (「不定」), $\frac{3}{0}$ m (「不能」) (総計：11名／9名)

(1) $\frac{0}{0}$ m (「不定」) に関するもの (7名／6名)

- ◆ $\frac{0}{0}$ は何でもいい(がわかりにくかった)(③)。
- ◆ 0分の0mはさいしょから0mだと思っていた(もんだいをだされたとき)。でも、本当はそうだった。おとなの考えだと「不定」というむずかしい言葉だ。でもまだ不定という言葉はあまりよくわからない。さいしょはかんたんだと思っていたが、あとでむずかしくなってきた。1つの問題にいっぱい答えがあるなんて、すごい発見だと思った(②)。
- ◆ おかの先生がだした問題がむずかしかったし、ややこしかったです。 $\frac{0}{0}$ mって最初はむずかしかった(②)。
- ◆ おかの先生が出した問題が少しむずかしかったけど、がんばってやったらできました。でも、自分で考えたら分からなかったけど、みんなでやったらできました(②)。
- ◆ 一番ムズカシカッタのは、 $\frac{0}{0}$ です。どうしたらできるの?という感じでした。 $\frac{0}{0}$ は $\frac{1}{0}$ より小さいんだから0だとわかってから、どんどんかんたんにできました。それまでは、まああわかっていたんだけど、 $\frac{0}{0}$ をわかってからわかりました(⑤)。
- ◆ 一番むずかしかったことは、 $\frac{0}{0}$ のところでした。 $\frac{0}{0}$ は、どんな大きさなのかわからなかつ

たからです (⑤)。

- ◆ 最後に $\frac{0}{0}$ はどのような長さでしょうと言うのもありました。意外とかんたんでした (②)。

(2) $\frac{3}{0}$ m (「不能」) に関するもの (3名/2名)

- ◆ 今日は $\frac{3}{0}$ なんて $\frac{1}{0}$ が3つ分でこたえがぜったいこれだとおもったけど、よくかんがえると3mでもなくて0mでもなくてほんとうのこたえはないがこたえでびっくりしました (②)。

- ◆ きょうのもんだいがむずかしかったです。大学生の人がヒントをくれました。たのしかったです。 $\frac{3}{0}$ mは0ということがわかりました (②)。

- ◆ 分母が0のとき、0個分で3mになるのがわかりにくかった (③)。

(3) どちらかに特定できないもの (1名/1名)

- ◆ 最後のもんだいがむずかしかった (②)。

半数に当たる9名が問題7の「むずかしさ」を指摘している。「 $\frac{0}{0}$ は $\frac{1}{0}$ より小さいんだから0だとわかった」など、正しく理解していないことを示す記述も見られる。一方で、「1つの問題にいっぱい答えがあるなんて、すごい発見だと思った」、「ほんとうのこたえはないがこたえでびっくりしました」、「自分で考えたら分からなかったけど、みんなでやったらできました」などの感想も見られる。「むずかしい」問題ではあるけれども、授業において考えるだけの意味は十分にあることを示すものであろう。

以上の集計をまとめると表9のようになる。

表9 授業書の問題別による感想の分類

	問題1 練習1	お話	問題2	問題3	問題4	研究 問題	練習2	問題5	練習3	問題6	問題7
感想において 言及された数	8	0	5	13	11	5	3	1	1	3	11
そのうち、「む ずかしかった」という感想の数	7	0	3	11	8	4	1	0	0	2	9

感想文において言及された数が多い順に問題をあげると、問題3 (13名)、問題4 (11名)、問題7 (11名)、問題1、練習1 (8名)となる。「むずかしかった」問題としてあげられた件数について見ると、順に、問題3 (11名)、問題7 (9名)、問題4 (8名)、問題1、練習1 (7名)となる。いずれにおいても同じ問題があげられており、順序もほとんど同じである。また、これらの問題は、それについて言及した子どものうち、70~87%の割合において、「むずかしい」と評価されている。

3. お わ り に

以上の分析により、この授業書が、小学校4学年の教育内容となる可能性が示された。同時に、授業書の問題点と改訂の方向が具体的に明らかになった。それらをもとに改訂を加え、さらに検証を重ねることが今後の課題となる。

《付 記》

本論文は、北海道大学教育方法学研究室数学教育研究グループによる共同研究の成果である。本論文の作成にあたり、同グループにおいては、何度も報告の機会を設けて頂き、貴重な指摘や意見を頂いた。特に、須田勝彦(北海道大学大学院教育学研究科)、佐藤敬行(多賀城市立多賀城東小学校)、氏家英夫(白樺学園高等学校)、高橋哲男(北海道大学大学院教育学研究科博士後期課程)、石川高行(北海道大学大学院教育学研究科博士後期課程)の各氏には記して謝意を表したい。

今回の授業結果を踏まえ、佐藤敬行氏によって、授業書のさらなる改訂、実験授業の実施が進められている。これらについては、今後、検討を行い、別の機会に報告したい。

本論文のもとになった実験授業は、立石由美先生と立石学級の18人の子どもたちによって行われた。新潟県数学教育協議会のサークル、関東地区数学教育協議会秋の合宿研究会(1998年11月)においても、授業書の内容や授業の結果について、報告、討議の機会を設けて頂いた。高野道夫(新潟大学教育人間科学部数学教室)、菅岡強司(上越教育大学学校教育研究センター)の各氏からも、貴重なコメントを頂いた。記して謝意を表したい。

今回の実験授業は、岡野が担当している授業科目「教育実践研究演習」(1998年度第Ⅱ期)と連動して行われた。この「演習」に参加した学生諸君による授業記録、分析の成果は本論文を作成する際の一つの出発点となった。また、学生諸君の感想により、今回のような実験授業が教員養成教育において持つ意味が具体的に示された。授業者の立石由美先生からは、授業を実施しての感想を詳しくお聞きすることができた。これらについても別の機会に報告したい。