中学校数学カリキュラム再構成への試み

――第Ⅲ単元「負の数とは何か」の授業プログラムについて――

須田勝彦（北海道大学大学院教育学研究科）
平賀沙織（北海道大学教育学部4年）
村守隆男（北海道大学大学院理学研究科）
高橋哲男（北海道大学大学院教育学研究科博士後期課程）
石川高行（北海道大学大学院教育学研究科博士後期課程）

〈目　　次〉

0．はじめに
1．教育内容・教材構成の概略
2．第Ⅲ単元「負の数とは何か」の構成
3．解説と授業の展開

0　は　じ　め　に

北海道大学教育学部教育方法学研究室の数学教育グループは，先に i）中学校数学のカリキュラム上の問題点の解明を試みるとともに，ii）再構成の方向と最初の2つの単元構成について素案を示した[1]。i）の概要は次のとおりである。

「中学校数学の入門期における不成功は次の5点が相互に関連しあって生じていると思われる。1正負の数から入ること，2計算のやり方，答えの出し方を指導の目標にしていること，3代数の導入方法が混乱していること，4重要な数学的事実を「小学校での既習事項」で済ませていること，5「証明」が不当に先に延ばされていること」

そしてii）では次の4点からなる目標を述べた。「1手足のように便利な道具として文字を使うこと，2負の数の導入以前に，非負の数の代数的性質を示すこと，3非負の数と半直線の対応，数の幾何的イメージを形成すること，4正負の有理数の量的，代数的，幾何的性質を知ること」そして1，2，3に係る内容を2つの単元別テキストの形にまとめた。

本稿では目標4に関する教育内容構成及び教材の構成を提案する。この中でも，手足のように便利な道具として文字を使うこと，負の数を導入した段階における数の代数的性質を明らかにすること，実数の幾何学的イメージが原点を定めた直線に他ならないこと，などが指導されることは言うまでもない。

ただし，「正負の有理数」という対象の設定に関しては，「正負」だけでは0の考察が抜け落ちてしまうことから教育内容としては不正確であり，また「有理数」という限定も「単元II」で実数が定義されてしまった上ではさほど重要な意味を持たないことから，単元名は「負の数とは何か」とした。有理数という限定なしに，負の数という新しい数を考える。そこで自然に正の数や0との関係が問題とされ，また演算がどう拡張されるかが問題となりうるのである。

本研究は上記数学教育グループによる共同研究の成果であるが，分担は次のようになされた。基本的な方針，アイデアは主に須田が提案し，グループの討議の上で仮説的に設定された。それに沿って授業プログラムが作成されたが，教育内容構成，教材の構成に関する最初の提案，及

びグループでの検討を生かした再提案の数知れないサイクルを平賀が担当した。授業プログラムにはすべてのメンバーの様々な提案が集約されているのだが，当然のことながら平賀の判断，工夫に多く依存している。

1　教育内容・教材構成の概略

数学教育における負の数の指導方法について，なんらかの網羅的な調査を行うことは不可能であるし，また無意味なことである。「学校で負数がはじめてとりあげられるときに，原理的にはひじょうにむずかしい一歩がふみだされたということを思い出しておきたい。生徒はそれまでに数や文字を具体的な物の個数と考え，加法などにさいしても個数を扱う演算として目の前に思い浮かべてきたが，負数になると全くちがったものがある。かれは，具体的な物の個数とは直接には何の関係もない，まるで新しい「負数」というものを扱わねばならないし，その演算がもとのような直観的に明らかな意味をもっていないのに，個数と同じように負数にも演算を行わねばならない。ここではじめて，具体的数学から形式的数学への移行に出会うが，この移行を完全に理解するには，高度の抽象の能力が必要である。」[2] 多くの生徒がこの「移行」に失敗し，多くの優れた教員がこれを克服する試みを開拓しつづけてきたと思われる。ほとんど無限の検討すべき素材が存在するのである。小論では，そのような網羅性ははじめから放棄し[3]，このプログラムを作るにあたって直接にアイデアを提供してくれたものに限定し，いかなるアイデア（正または負）の提供を受けたのかをごく簡単に列挙するにとどめたい。

1－1　「符号」ということばについて

先に述べた「正負の数の指導」ということばが教育内容に照らして正確でないという問題と並んで，「符号」ということばも吟味を要するように思われる。例えばある教科書[4] では，１年の最初の単元が「正の数，負の数」，その最初の節が「符号のついた数」であり，次のような説明がなされる。「０℃を基準にして，それより５℃低い温度を「－５℃」と書き「マイナス５℃」と読む。（略）このように＋や－を使うとき，＋を正の符号，－を負の符号という。」

この定義によれば，符号は文字通り符号であって，それを用いて表された数や量が正であるか負であるかには無関係である。しかし，次の節では異なる意味が登場する。「同符号の２数の和は，２数の絶対値の和に共通の符号をつける。」ここでの「符号」の意味は正の数であるか，負の数であるかを表す。

このような説明では，例えば「－(－2)＋(－4) は同符号の２数の和だから，２数の絶対値の和６に共通の符号－をつけて，答えは－6」と考える誤りや，－a が常に負の数であると考えてしまう誤りを防ぐことはできない。符号－と負の数の混同は教科書自身にも見られる。「あなたの年齢より８歳上の年齢と４歳下の年齢を，正の数，負の数を使って表しなさい。」仮に「あなた」が 13 歳であれば，この人たちは 21 歳と９歳であり，負の数など介在しない。「13＋(－4)」ならば一応は正解といえるかも知れないが，加法はまだ定義されていない。そもそも年齢における負の数とは，どのような意味があるのだろうか。このように符号ということばは混乱のもとであり，避けるべきである。

1－2　対称量空間の概念

田村二郎，小島順らによって提唱されている，数は量の倍変換であるという立場からは，負

の数は1次元対称量空間の（正の）倍変換と対称変換（Uに対し−Uを対応させる変換）の合成として定義される[5]。この説明は量を基にした数の説明として一貫性があり，また数を生き生きとしたイメージでとらえることができることから，数学教育に多くの示唆を与える。しかし，量空間の性質をあらかじめ公理として仮定し，それに基づいて数の性質を導くという方法は大学生向けの数学としての意味はあっても，中等数学教育にそのまま適用しうるものではない[6]。

中学生にとって対称量空間の性質はなんら既知なものではなく，その中での加法，乗法の意味とともに一歩一歩獲得していくべきものである。大人向けの数学から「抽象」という概念を排除することは必要なことであるとしても，数学教育から抽象の過程そのものを排除することは不可能であろう。このプランでは，数を1次元対称量空間への作用ではなく，1次元対称量空間そのものの抽象化，という立場を採る。

1−3　移動による負の数の導入について

実数のイメージとして直線がもっともふさわしいものであるとすれば，1次元対称量空間の例としては1次元空間の平行移動群（移動）が適当である。実際これまで極めて多くの教科書等で移動を用いた負の数の導入指導が採用されている。しかし，その用い方は限りなく多様であり，その詳細な検討も必要であるが，後日を期したい。ここでは本プランの特徴を示すに必要な限りで移動を用いている他のプランを検討する。

1−3−1　多くの例の一つとしての移動

先述の教科書においても移動は当然用いられている。だが，温度計，海抜と海の深さ，利益と損失，ゲームの点数，年齢（先述）などの例の一つにすぎない。このように，多くの例を提示しそこから一般化を計るという方法は珍しいものではない。多くの教科書がそうであるし，また数学教育改良運動における負の数の導入もこのパターンが普通といえるだろう[7]。このような指導方法の認識論的基礎は経験主義であり，2つの大きな難点を持っている。一つは，多くの例を出してみてもそこから一般化へ進む保証はないこと，第2に様々なイメージが混在することによって，結局どのようなイメージが有効であるのかがわからないこと，である[8]。

これに対して私たちは，典型的な具体例を用いて直ちに一般化に進むこと，そして一般化された概念を用いて他の具体を説明すること，という筋道を採用している[9]。

1−3−2　量にどのように依拠するか

田村，小島らの着想を数学教育に生かした好著として彌永昌吉編著『考えながら読む数学教本』[10]が挙げられる。自然数を量への作用，自然数の和を量の和で定義する，数の和の性質を量の性質から説明するという展開，それを有理数からさらに正の実数及び0を「長さ」に対する倍変換として定義し，半直線と対応づけ，正の実数の概念を得る，という展開は単元Ⅰ及び単元Ⅱのプランづくりにおいて多くを学んだ点である。和と積に関する説明に関しても，そこまでは概ね賛成しうる展開となっている。また，負の数を一貫して移動を基に説明しようとする点にも賛成したい。

負の数の演算は次のような説明となっている。長さに代わって，移動という対称量を導入する。長さに対してと同様に，移動に対しても倍変換が定義されるが，対称量において倍は方向を逆にするマイナス倍をも考えることになる。正と0の時と同様，乗法は倍の合成で定義される。乗法では$(x\times y)\mathrm{U}=x(y\mathrm{U})$が成り立っていたから，それが成り立つように負の数の乗法を定めなければならない。たとえば，$(2\times(-3))\mathrm{U}$は，$2((-3)\mathrm{U})$であり，それが$-(2\times3)\mathrm{U}$だ

から，$2\times(-3)$ は$-(2\times3)$ と定められなければならない。

結局，$2\times(-3)$ が-6 となるのは「約束」である。しかし，乗法が倍の合成で定義され，定義に基づいて考えたら-6 となったのであれば，何もこと改めて約束など必要がないのではないか。乗法を定義した時点でその結果も既に明白なのである。また，そうでなければ定義にはならない。a，b が正の時，$a\times(-b)$は，向きが反対になり，長さが ab 倍の移動だから$-(ab)$なのであって，それを「定める」からではない。このような問題点は加法にも全く同様に見られる。さかのぼって正と 0 の範囲で既に問題なのだが，それほど顕在化はしていない。

1－4 「ブレアール数学」の検討

次に，正負の数をやはり周到な準備の上で導入しようと試みたプランである加藤勝著『ブレアールの数学』[11] を検討したい。

『ブレアールの数学』とは，フランスの数学教育現代化プランの一つとして提案された 10 数冊の教科書（C. Bréard『Mathématiques』）を著者加藤勝が上下 2 冊にまとめたもので，上が日本の中学校，下が高等学校にほぼ対応している。ブレアール数学の特徴について，田島一郎は次のように述べている。「ブレアールの数学にはいろいろ注目すべき特徴があるが，たとえば数・式におけるベクトル，図形における対称性の重視などは私にとってたいへん興味深く感じた点である。前者については，ベクトル計算にもとづき，ベクトルに作用する演算子として相対数（プラス・マイナス）の概念を導入し，以後の展開をきわめて平易にしている。また，後者については，「先天的な概念」とまで述べてこれを基礎概念にとり入れ，これによって証明の簡素化を数多く行っている。」[12]

「現代化」があたかもたんなる失敗の集積であるかのように考えられ，そこに傾けられた多くの創意が無に帰せられようとしている今日，改めてその意義と問題点を検討し，批判的活用の可能性について探ってみたい。相対数（正負の数）の導入は第 8 章であり，導入までに周到な準備がなされていることが見て取れる。相対数導入の基礎となっている教育内容をピックアップしながら，相対数の導入法に簡単な検討を加える。

1－4－1 整数

整数の加法，減法の代数的性質が集合（タイル）を用いて説明される。和はよいとして，減法の代数的性質 (例えば $a-(\alpha-\beta)=(a-\alpha)+\beta$ など) はやや煩瑣である。乗法についても交換，結合，「中立元」，分配法則が説明され，累乗が定義される。

1－4－2 算術的数

線分 U の 3 倍の線分 A を得るとき，3 を「整演算子」と考える。3 の逆演算子を $\frac{1}{3}$ で表す。$\frac{1}{3}$ はアルキメデス的演算子といわれる。数を線分へのオペレーターとする考えは田村，小島らと共通である。アルキメデスの名称は，線分の任意整数等分の存在公理をアルキメデスの公理と呼んでいることに因る。次に「線分 A を他の線分 B に変えさせるすべての演算子は，算術的演算子である」と定義される。これによって非負実数が定義されたるが，「算術的」と呼ぶのは「相対数」との対比である。「線分の和を作る演算子は数の和である」という「和の定義」から，$2+\frac{1}{3}$ が $\frac{7}{3}$ であることが説明される。

オペレーションの合成によって数の積が定義され，線分の長さの性質によって加法交換法則，結合法則，中立元の存在，乗法交換法則，結合法則，中立元，逆元の存在，分数の同値，「基本定理」（倍分の原理），計算規則などが導かれる。分数の除法は乗法の逆で定義（$a\div b$ は $a=bx$

を満たすxを求めること）され，逆数を乗ずることが導かれる。

これらの筋道は基本的には自然な流れであるが，証明等はやや形式的で，せっかくの量的意味づけが生かされきっていない嫌いがある。

1－4－3　向きと平行の概念

有向線分（束縛ベクトル，または単にベクトル）から「向き」の概念が導入される。向きはベクトルだけでなく，弧の向き，円の向き，角の向き，平面の向きなども考えているが，それがどんな有難味をもっているかは明らかでない。直線の方向の説明は「本格的」である。平面の直線の間の平行関係が「同値関係」（このことばもここではじめて）であり，平行関係によって構成される同値類が直線の方向である，という説明である。このような「本格的」な説明は，おそらくは学習者の理解を助けるよりは，数学者の満足感のためでしかないように思われるが，ここに限らず，形式的に流れる部分の弱点は豊富な練習問題によって補われている面もある。例えば次のような問題もある。「水平な直線（D）をひけ。（D）上に点Aからはじめて，次のベクトルを作図せよ。(1) AB：左から右へ向きづけられ，大きさ 6 cm　(2) BC：右から左へ向きづけられ，大きさ 2.5 cm　(3) CD：左から右へ向きづけられ，大きさ 1.2 cm」向きの概念の平易な練習問題であるとともに，後の相対量への布石となっている。

1－4－4　対称

対称の部分も，対称に関する幾何教育としての新しい展開例であるばかりではなく，相対量導入への周到な準備過程にもなっている。特に半回転対称では，点の対称，図形の対称を定義した後，半直線，直線及びベクトルの対称がここの中心テーマになっている（例えば２つの反ベクトルは１つの点に関して対称，など）。

対称性は多くの幾何的諸性質を導くキー概念であることはしばしば触れられるが，正負の数導入の準備という内容を含んだ指導は中等数学教育の構成としてユニークなものであり，参考になるアイデアといえるだろう。

1－4－5　ベクトル

既に定義されている有向線分としてのベクトル（束縛ベクトル）に同じ方向，同じ向き，同じ大きさを持つときに「等しい」と定義し，自由ベクトルを得る。対称性を用いた「等」「反」の基本性質の説明の後「２つの共線ベクトルの比」として「相対数」が定義される。即ち，２つの共線ベクトルの向きが同じとき/反対のとき，相対数の「符号」は＋/－であり，その絶対値は大きさの比である。ベクトルに加法と相対数倍が定義され，分配法則の成立が述べられる。ベクトルの性質に基づいて相対数の加法の交換，結合性が導かれる。

注目すべきことは，分配法則が「ここでは，次のことを認めることにする。〔証明はあとの学年でする。〕」という扱いとなっていることである。負の数の導入にあたって，その代数的性質を導くために２次元ベクトルを導入するというねらいは興味深い。また，負の数と平行四辺形の諸性質，タレスの定理などが内的連関を持っていることを具体的に示すこと自体，数学教育への貢献といえるだろう。ただし，それを単に「公理」としてしまい，説明を放棄することは一種の敗北宣言といわねばなるまい。

一般に，数を幾何学的モデルや量的モデルを用いて説明することは必要なことであり，そのような方向のあらゆる試みは数学教育への貴重な貢献であろう。しかし，過度に論理的厳密さを求め，数の満たすべき性質をこれらのモデルに公理として予め要請することは無意味なことであろう。数学者の満足感への迎合といわざるを得ない。数学教育において重視すべきは数学

の基本概念と相互連関に関する学習者の納得であろう。

1－5　乗法指導について

次に乗法指導の内容について検討しよう。数学的展開からいえば，乗法を倍の合成で定義するのが最も簡明と思われる。しかし，今日の中学生の実態から考え，このような簡明な定義は次のような理由で採らないこととした。

何より，非負の乗法を基に負の数に拡張するとき，非負の範囲の乗法について，十分な理解がはたして期待できるのかという問題である。無論このプランに先立つ単元で四則算法について一応の説明はなされているが，数の性質を代数的に整理することが目標であった。乗法について，その演算が現実にどのような場面で生ずるのかという点に関してはあいまいな認識にとどまる生徒が少なからず存在することが予想される。中学校教師から「生徒は方程式の応用問題の立式ができない」「速さの問題を［は・じ・き］[13]で考えようとする生徒がいる」などの事実をしばしば耳にすることからいっても，乗法の生起する典型的場面は中学校数学として，改めて指導を要する事項と考えるべきではないか。倍変換はその点で，抽象のレベルが１段階高く，うわべを通り過ぎる認識となるおそれがあろう。

中学校数学として改めてとりあげるさい，単に小学校での学習を繰り返すのは最も拙劣な方法である。むしろ中学校数学の基礎となる学習として展開すべきである。中学校数学として乗法を考える場面としては，速さ，密度，濃度など基本的物理量を考えるのが適当である。これらは自然認識の結節点であり，また関数概念への出発点[14]でもある。このような理由から，乗法では等速度運動[15]を主なイメージに用いた指導を構成する。

1－6　授業プログラムの構成

中学校数学入門シリーズの第Ⅲ単元「負の数とは何か」は，導入と加減，及び乗除を内容とする２部構成とした。導入と加減のイメージは１次元平行移動群であり，それを生活的なことばで表現するために「無限ジャンボ綱引き　ネガ村 VS. ポジ村　一本松の戦い」という副題をつけた。乗除のイメージは等速直線運動であり，それを示す副題を仮に「とわの過去から永劫の未来への旅」とする。構成の授業プログラムは，中心部分が「鍵」で示される重要問題であり，基本性質を考えることが目標とされる。この問題は生徒たち自身の発見，思索の場であり討論の場である。「練習」にも発見的な課題が含まれているが，定理のような位置をもつ重要性質が考察の対象であり，また具体的に問題を解く手がかりを得る場でもある。基本イメージ以外の他の例で負の数を考えること，及び計算の習熟は適宜，教科書を問題集として使うことによって補うことも必要であろう。

なお，授業プリントのレイアウト等は未検討の部分が多いが，明らかに改ページが必要な部分に関してのみ［改ページ］と記した。

［注］

1　須田勝彦「中学校数学カリキュラム再構成への試み―入門期の中学校数学を中心に　第１部　理論編―」(北海道大学教育学部教育方法学研究室『教授学の探究』第17号，2000年) 及び須田勝彦，村守隆男，高橋哲男，石川高行，西崎結，平賀沙織「中学校数学カリキュラム再構成への試み―入門期の中学校数学を中心に　第２部　授業案編―」(同)

2　F. クライン著，遠山啓監訳『高い立場からみた初等数学』1（原著1924年），1959年，商工出版

3　一般に教育実践や教科書を教育学的検討の対象にするとき，発行された時期や国，出版社などに関する限定がなされた上で網羅的な調査が行われることが多い．しかし研究の結果，教育方法学に何の貢献もなさない，研究のための研究であることも少なくない．私は，教育実践，教科書の研究のさい，意味のある結論をそこから抽出することが何より重要であって，網羅性は求める必要がないと考える．もちろん「意味のある」の定義は多様でありうる．また，仮に誤った見解であろうと，誤りもまた学問研究に対する重要な貢献であるのだから，結論がない研究よりははるかに優れていると考える．

4　教育出版『中学数学1』1997年

5　田村二郎『量と数の理論』1978年，日本評論社

6　拙稿「教育学から見た数学教科書」岩波講座『応用数学』（第2次）月報19，1999年3月参照．

7　たとえばラッグ，クラーク著，新宮恒次郎訳『初等数学の基礎』（原著1918年）1926年，山海堂では第1実例として温度計の目盛，第2実例として距離の目盛上における反対の数，第3実例として経済上の状態を示す数，第4実例として時間の目盛上における反対の数などを挙げている．

8　この点においてブーレー著，小倉金之助他訳『初等代数学』（原著1909年）1919年，山海堂は，負の数の導入に先立って1次元での有向線分の幾何を扱い，そのイメージを負の数指導に利用していることは注目に値しよう．

9　銀林浩「指導要領の思想」（『数学教室』No. 180，1968.9），高村泰雄・丸山博『環境科学教授法の研究』1996年，北海道大学図書刊行会など参照．

10　彌永昌吉編著『考えながら読む数学教本』上，1991年，朝倉書店

11　加藤勝『ブレアールの数学』上，1969年，近代新書

12　田島一郎，同書序文

13　速さ，時間，距離の関係を無意味に暗記する方法で，暗記法としてもなんら有効性をもたない方法．

14　土井捷三・三上勝夫・須田勝彦「運動の解析を基礎とした正比例関数の指導」『北海道大学教育学部紀要第18号』，1971年において等速運動から正比例関数への指導過程の一例を示した．本プランの乗法指導の内容構成に，この成果の一部が用いられている．

15　E. ボレル『代数学』の負の数の導入法も主なイメージとして移動が使われている．乗法の導入は形式的約束で済まされているが，四則計算の直後に「正数及び負数の応用」という章が設けられ，そこでは等速運動が約20ページにもわたって考察されている．本質的に負の数の導入，比例と一次関数，一次方程式は同一の内容を有しているのであり，私たちのプランにおいても，今後方程式，関数を具体化するに従って指導の内容に改めて検討が加えられるだろう．

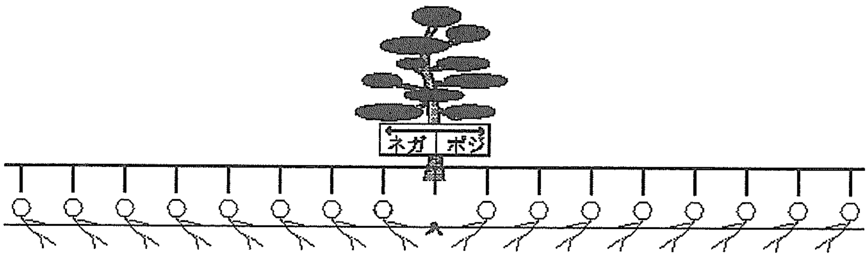
2　第Ⅲ単元「負の数とは何か」の構成

2－1　負の数の導入と加減

1．負の数のイメージ

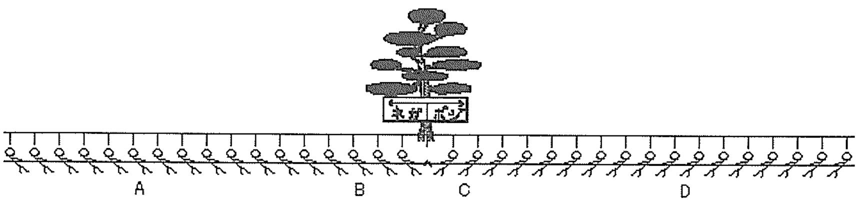
無限ジャンボ綱引き　ネガ村 vs. ポジ村　一本松の戦い

ネガ村とポジ村の間で大昔から続く戦い，無限ジャンボ綱引き。村境に高くそびえる一本の松の木を中心に，綱は無限に続いている。一本松を中心に柵が無限に続いていて1ｍごとにくいがうってあり，参加する人も1ｍごとに無限に並んでいる。そして時間も無制限。さて，どちらに軍配が上がるのか？



勝負は互角と思われたとき，Ａさん，Ｂさん，Ｃさん，Ｄさんは図１の位置にいた。

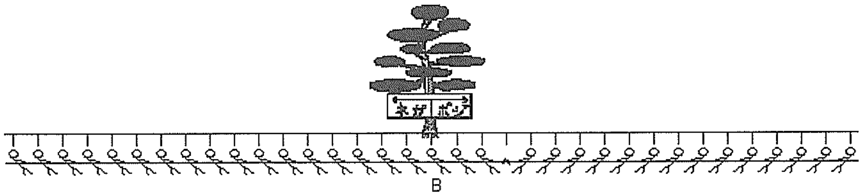
図１



1

問　Bさんが図2の位置にいるとき，Aさん，Cさん，Dさんはどこにいるだろうか。

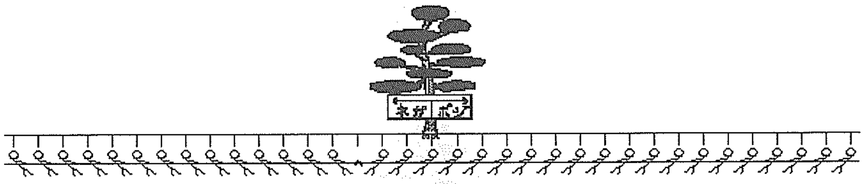
図2



[図1から図2で，綱はポジ村側に3m動いた。]

問　図3でAさん，Cさん，Dさんはどこにいるだろうか。

図3



[図1から図3で，綱はネガ村側に3m動いた。]

[改ページ]

2

図１からの変化を新しい記号で表そう。

　ポジ村側への３ｍの移動を　（＋3）

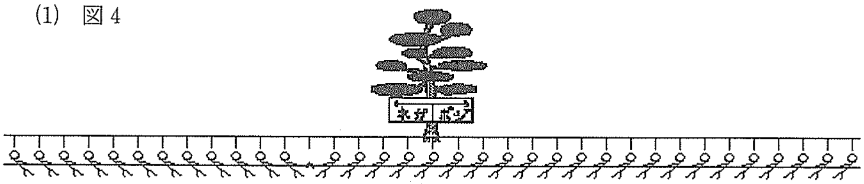
　ネガ村側への３ｍの移動を　（－3）

と書くことにする。

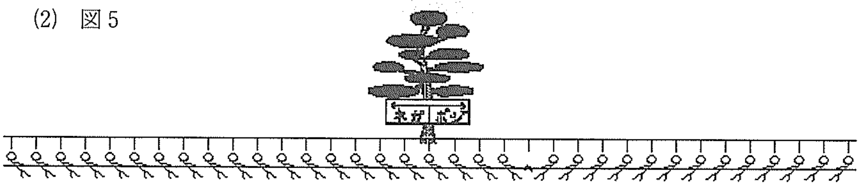
何と読むだろう。

練習１　図１からの移動を表してみよう。

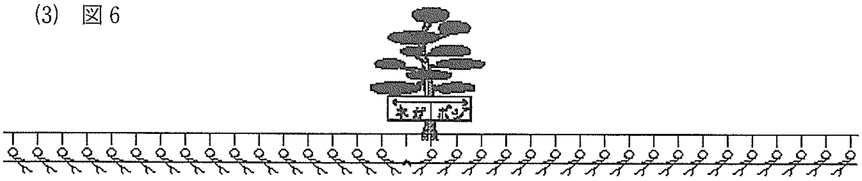
(1)　図４



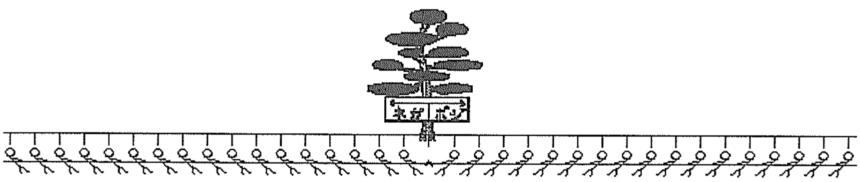
(2)　図５



(3)　図６



1　図１からの移動を表してみよう。



［改ページ］

ポジ村の方へ０ｍ移動した　という考え方では　（＋0），
ネガ村の方へ０ｍ移動した　という考え方では　（−0），
動かなかった　という考え方では　(0)
などと表せる。
どの考え方でもいいが，これも移動と考え（0）と書くことにしよう。

練習２
図７

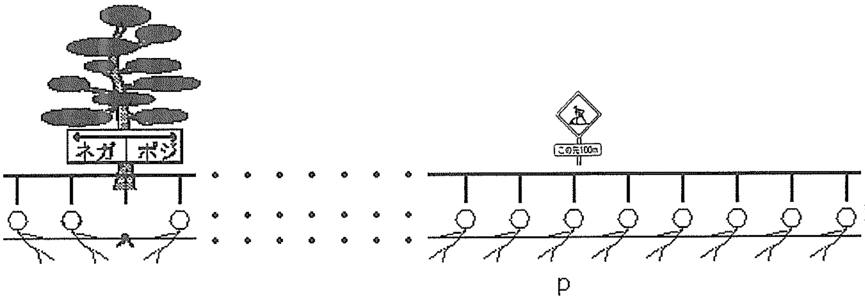
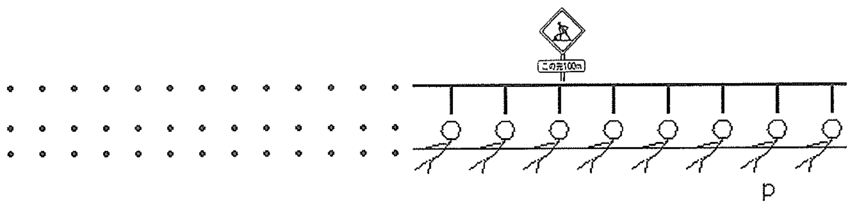


図８



(1)　図７から図８の移動はどう表せるだろう。
(2)　図８でリボンはどこにあるだろう。

２．移動の合成

2　夏の暑い日は，暑さに強いネガ村が優勢だ。

昼間の移動は（−3），さらに夜の移動は（−4）だった。
この日の移動は全体としてどう表せるだろうか。

［改ページ］

この日は　移動 (-3) に続いて移動 (-4) をしていることになる。
この日の移動は結果として (-7) になった。

新しい加法

2つの移動が続いておきたとき結果は1つの移動となる。これを移動の合成という。
移動 a と移動 b の合成を $a+b$ と表すことにしよう。

練習3　(1)〜(8)はどんな移動だろう。

(1)　$(+3)+(+5)$　　(2)　$(-3)+(-2)$
(3)　$(+7)+(-5)$　　(4)　$(+7)+(-10)$
(5)　$(+10)+(-12)$　　(6)　$(+25)+(-13)$
(7)　$(-34)+(+18)$　　(8)　$(+45)+(+57)$

3　どんな移動だろう。

$(0)+(+3)$　　$(-5)+(0)$　　$a+(0)$　　$(0)+(0)$

結合法則

朝の移動が a，昼の移動が b，夜の移動が c の日を考えよう。
朝と昼の移動をまとめて見ると $a+b$
続いて夜の移動 c なので
この日の移動は全体として $(a+b)+c$ と表せる。
また，朝の移動 a
昼と夜の移動をまとめて見ると $b+c$ だから
この日の移動は全体として $a+(b+c)$ とも表せる。

移動の加法でも結合法則 $(a+b)+c=a+(b+c)$ が成り立つ。

練習4

(1)　$((-2)+(+7))+(+5)$　　(2)　$(+3)+((+7)+(+8))$
(3)　$((+5)+(-7))+(-3)$　　(4)　$(-9)+((-1)+(-7))$
(5)　$(+5)+((+15)+(-7))$

移動の加法では結合法則が成り立つから
$(a+b)+c$ や $a+(b+c)$ は $a+b+c$ と書いてもよい。

4　**移動の加法では交換法則が成り立つだろうか。**

[改ページ]

移動の加法でも交換法則 $a+b=b+a$ が成り立つ。

練習5

(1) $(-2)+(+3)+(-5)$

(2) $(-4)+(+9)+(-16)$

(3) $(+7)+(-6)+(+12)+(-5)$

(4) $(-10)+(+13)+(+17)+(-20)$

(5) $(-2.4)+(-3)+(+8)+(-2.6)$

(6) $(-8)+(+3)+(-3)+(+6)+(+3)$

(7) $(-11)+(+4)+(+5)+(-8)+(+6)+(+22)+(-7)$

3．移動の累加

量についてと同じように，移動 a についても $a+a+a+a+a=5\times a$ と書くことにしよう。

問　次の和を累加の形で書いてみよう。また，どんな移動かいってみよう。

(1) $(+3)+(+3)+(+3)+(+3)$

(2) $(-3)+(-3)+(-3)+(-3)$

4．反移動の合成

反移動

雨の日も戦いは続く。

雨の中ポジ村ががんばって，この日の朝から正午までの移動は（+5）だった。

しかし，午後に雨が止み日が照ってくるとネガ村が盛り返し，朝と同じ位置に戻った。

午後の移動はどう表せるだろう。

$a+a'=(0)$ となる移動 a' を移動 a の反移動という。

練習6　反移動をいってみよう。

$(+4)$	(-7)	$(+29)$
(-138)	(-0.86)	$\left(-\frac{2}{3}\right)$
$(+7.153)$	(0)	

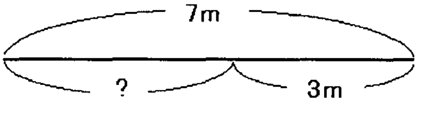
移動 a' は移動 a と大きさが等しく向きは反対になる。
a の反移動 a' を $-a$ と表すことにしよう。

練習7　どんな移動だろう。

(1)　$-(+34)$
(2)　$-(-9)$
(3)　$-(-273)$
(4)　$-(-(-2))$
(5)　$-(-(+2))$
(6)　$-(-(-(-2)))$
(7)　$-(-(-(-(-(-3)))))$
(8)　$-(-a)$
(9)　$-(-(-a))$
(10)　$-(-(-(-a)))$

減法（ひき算）と反移動

自然数の範囲で $7-3=4$ のような減法ができた。



5　移動の減法はどのように考えられるだろう。

5−1　昨日は午前中の移動が（+7），午後の移動が（−3）だった。
昨日一日の移動を表してみよう。

5−2　今日のポジ村の目標は（+7）で，朝から今までの移動は（+3）だ。
目標まであとどれだけの移動が必要だろう。

これからは減法は反移動の合成（加法）と考えよう。

練習8　減法を反移動の合成（加法）に書き直して答えを出そう。

(1) $8-2$

(2) $25-9$

(3) $3-5$

(4) $7-2$

(5) $12-6$

(6) $3.1-4.8$

(7) $\frac{2}{9}-\frac{4}{9}$

練習9　加法だけの式に直して計算しよう。

(1) $(-7)-(-2)$

(2) $(+8)-(+2)$

(3) $(+25)-(+9)$

(4) $(-3)-(-10)+(-7)$

(5) $(+8)+(-9)-(-3)$

(6) $(+10)-(+4)+(-1)-(-5)$

(7) $(-11)+(-4)-(+1)-(+10)+(+4)$

(8) $(-4)-(-15)-(+6)+(-2)-(+3)$

(9) $(-1.3)+(+0.9)-(-8.1)+(+8.3)$

(10) $\left(-\frac{2}{3}\right)+(+1)-(-7)-\left(+\frac{1}{3}\right)$

代数和

練習 9 の(1) $(-7)-(-2)$ を加法だけの式にすると

$$(-7)+(+2)$$

加法だけの式では次のように加法の記号＋をはぶき移動だけを並べて書くことができる。

$$(-7)(+2)$$

移動の（　）もはぶいて書こう。

$$-7+2$$

この書き方を代数和という。

練習 9 の(2)は代数和の形で書くと $+8-2$ となるが，最初の＋をはぶいて $8-2$ と書いてもよい。

練習 9 の(3)〜(7)を代数和の形で書いてみよう。

練習 8 のような減法の式は，代数和とみることができる。

練習 10

(1) $8+23-8$　　(2) $-9+78-11-20$

(3) $-2-2-2$　　(4) $\frac{1}{3}-\frac{2}{3}+\frac{5}{3}$

(5) $3a-5a$　　(6) $-7a+4a$

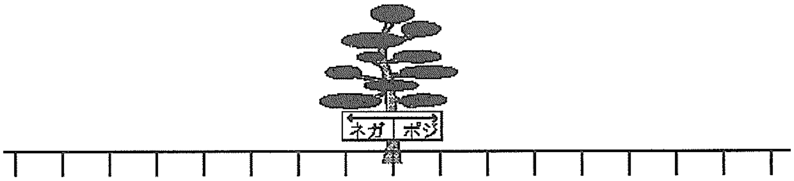
(7) $18a-4b-7a+5b$

5．数直線と負の数

雨の日も風の日も戦い続けてきたネガ村・ポジ村だが，お祭りの間だけ休戦することになった。戦いを再開する時にそれぞれ自分がいた位置とリボンの位置がわかるようにくいに目印をつけていくことにした。どんな時にも各自の位置がわかるようにしたい。いい考えはないだろうか。

[改ページ]

一本松からの移動をもとにくいに名前をつけていくことになった。
図にくいの名前を書き入れよう。



一本松につく名前は……？

このような直線上の位置と数の対応を数直線という。
　0の点を原点といいOと表す。
　0より右側にある数を　正の数
　0より左側にある数を　負の数　という。
これからは正の数，0，負の数をあわせて実数という。

実数の大小関係

半直線上の二点A，Bの座標を a，b とする。$a<b$ のときはBがAの右にあった。

O　　　　A　　B
0　　　　a　　b

負の数も含めて考えるときも，BがAの右にあれば $a<b$ としよう。

練習11　大小関係を表そう。

(1)　$+6$，$+12$　　(2)　$+2$，-9　　(3)　0，$+4$　　(4)　0，-7
(5)　-3，-37　　(6)　$+3.7$，$+3.9$　　(7)　-2，-2.4

絶対値

点Aの座標を a とする。線分OAの長さを a の絶対値といい，$|a|$ と表す。

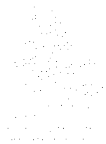
A　　　　O
a　　　　0

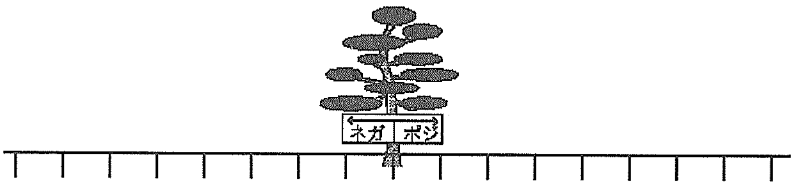
練習12　絶対値をいってみよう。

$|+3|$　　$|-29|$　　$|-3|$　　$|-5.9|$　　$\left|+\frac{2}{7}\right|$　　$|0|$

6-1　$a+b$ が正になるのは a，b がどんなときだろう。
6-2　$a+b$ が負になるのは a，b がどんなときだろう。
6-3　$a+b$ が0になるのは a，b がどんなときだろう。

戦いはあまりに永く続きすぎた。
人びとは疲れ果て，ひとり，またひとり，と綱から離れていった。
いつしか綱引きは終わり，あとには一本松と無限に続く柵だけが残った。





負の数，非負の数の乗除

とわの過去から永劫の未来への旅

1．等速直線運動

問題A　この車は〔4〕秒間に〔20〕m進んだ。〔10〕秒間では何m進むか計算で答えを出そう。

問題B　この車は〔2〕秒間に〔40〕m進んだ。では〔5〕秒間には何m進むだろうか。

[改ページ]

1

Aは等速運動（速さの変わらない運動）をしていたから計算で距離を求めることができた。

はるかかなたから電車が柵に沿ってポジ村の方へ走ってきた。電車が一本松を通ったのは0時0分0秒だった。その後の時刻 x とその時の電車の位置 y を調べて下の表を作った。

この電車は等速運動をしているだろうか。

x(秒)	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6	6.5	7	7.5	8
y(m)	0	+2.5	+5	+7.5	+10	+12.5	+15	+17.5	+20	+22.5	+25	+27.5	+30	+32.5	+35	+37.5	+40

時刻の変化を2秒おきにしたときの表を作ってみよう。

x（秒）					
y（m）					

どの2秒間をみても（　　　）mの移動をしている。

時刻の変化を1秒おきにしたときはどうだろう。

x（秒）									
y（m）									

どの1秒間をみても（　　　）mの移動をしている。

等速運動では時間を一定にとると移動も一定になる。

17秒のときの電車の位置を求めてみよう。

1　松を通る前の時刻と位置も表に書き入れてみよう。

x(秒)	…								0	1	2	3	4	5	6	7	…
y(m)	…								0	+5	+10	+15	+20	+25	+30	+35	…

[改ページ]

負の数は時間や時刻を表すのにも使える。

x(秒)	…	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	+1	+2	+3	+4	+5	+6	+7	…
y(m)	…	−35	−30	−25	−20	−15	−10	−5	0	+5	+10	+15	+20	+25	+30	+35	…

2　−17 秒のときの電車の位置を求めてみよう。

練習 1　この電車の位置を求めよう。

(1)　−8 秒のとき　(2)　−20 秒のとき　(3)　＋32 秒のとき

(4)　−5000 秒のとき　(5)　−749 秒のとき　(6)　−0.6 秒のとき

(7)　＋0.01 秒のとき

3

2．いろいろな運動

表のあらわす運動を【　】の中から選んでみよう。

【徒歩　　ジョギング　　自転車　　自動車　　列車　　一本松　　マラソン】

(ア)

x(秒)	…	−5	−4	−3	−2	−1	0	+1	+2	+3	+4	+5	…
y(m)	…	−20	−16	−12	−8	−4	0	+4	+8	+12	+16	+20	…

(イ)

x(秒)	…	−5	−4	−3	−2	−1	0	+1	+2	+3	+4	+5	…
y(m)	…	−6.9	−5.6	−4.2	−2.8	−1.4	0	+1.3	+2.6	+3.9	+5.1	+6.3	…

(ウ)

x(秒)	…	−5	−4	−3	−2	−1	0	+1	+2	+3	+4	+5	…
y(m)	…	−6.5	−5.2	−3.9	−2.6	−1.3	0	+1.3	+2.6	+3.9	+5.2	+6.5	…

(エ)

x(秒)	…	−5	−4	−3	−2	−1	0	+1	+2	+3	+4	+5	…
y(m)	…	−115	−92	−69	−46	−23	0	+23	+46	+69	+92	+115	…

(オ)

x(秒)	…	−5	−4	−3	−2	−1	0	+1	+2	+3	+4	+5	…
y(m)	…	−60	−48	−36	−24	−12	0	+12	+24	+36	+48	+60	…

(カ)

x(秒)	…	−5	−4	−3	−2	−1	0	+1	+2	+3	+4	+5	…
y(m)	…	−12.5	−10	−7.5	−5	−2.5	0	+2.5	+5	+7.5	+10	+12.5	…

(キ)

x(秒)	…	−5	−4	−3	−2	−1	0	+1	+2	+3	+4	+5	…
y(m)	…	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	…

(ク)

x(秒)	…	−5	−4	−3	−2	−1	0	+1	+2	+3	+4	+5	…
y(m)	…	−18.5	−17	−14	−10	−5	0	+5	+10	+14	+17	+18.5	…

3 下の表の運動はどんな運動だろう。

x(秒)	…	−5	−4	−3	−2	−1	0	+1	+2	+3	+4	+5	…
y(m)	…	+15	+12	+9	+6	+3	0	−3	−6	−9	−12	−15	…

3．等速運動の速度

+1 秒間あたりの移動を等速運動の速度という。1 秒間の移動が a m の運動の速度は

a m/秒　と表せる。

「速さ」と「速度」は日常ではほぼ同じ意味に使われているが，自然科学の世界ではこの二つは同じではない。「速さ」と違い「速度」は向きを区別する。

4−1 +17 秒のときの位置を求めてみよう。

4−2 −17 秒のときの位置を求めてみよう。

練習 2　位置を求めよう。

(1) −8 秒のとき　(2) −20 秒のとき　(3) +32 秒のとき
(4) −5000 秒のとき　(5) −749 秒のとき　(6) −0.6 秒のとき
(7) +0.01 秒のとき

練習 3　次の等速運動はどれも 0 時 0 分 0 秒のとき一本松を通る。
[　] の時刻での位置を求めよう。

(1) 速度+6 m/秒 [−9 秒]　(2) 速度+7 m/秒 [+23 秒]
(3) 速度−55 m/秒 [−852 秒]　(4) 速度−7 m/秒 [+23 秒]
(5) 速度−7 m/秒 [−23 秒]　(6) 速度+7 m/秒 [−23 秒]
(7) 速度−23 m/秒 [+7 秒]　(8) 速度$-\frac{7}{6}$ m/秒 [$+\frac{1}{4}$ 秒]
(9) 速度−0.9 m/秒 [−64 秒]　(10) 速度+1 m/秒 [−441 秒]
(11) 速度−1 m/秒 [−98 秒]　(12) 速度+73 m/秒 [−1 秒]
(13) 速度 0 m/秒 [−562 秒]　(14) 速度−38 m/秒 [0 秒]
(15) 速度 0 m/秒 [0 秒]　(16) 速度−3 m/秒 [$-\frac{1}{3}$ 秒]
(17) 速度$-\frac{2}{7}$ m/秒 [$-\frac{7}{2}$ 秒]　(18) 速度−0.879 m/秒 [+1 秒]

4．速度を求める

5　いろいろな等速運動を調べて下の表を作った。速度を求めよう。

(A)

x(秒)	…	−21	−14	−7	0	+7	+14	+21	…
y(m)	…	+33	+22	+11	0	−11	−22	−33	…

(B)

x(秒)	…	−9	−6	−3	0	+3	+6	+9	…
y(m)	…	−69	−46	−23	0	+23	+46	+69	…

(C)

x(秒)	…	−3	−2	−1	0	+1	+2	+3	…
y(m)	…	−3	−2	−1	0	+1	+2	+3	…

(D)

x(秒)	…	−3	−2	−1	0	+1	+2	+3	…
y(m)	…	+3	+2	+1	0	−1	−2	−3	…

[改ページ]

$a \times b=1$ となるとき a は b の逆数，b は a の逆数という。
除法は逆数の乗法である。

$$y \div x = y \times \frac{1}{x}$$

6　a，b が実数をあらわすとき，乗法の交換法則は成り立つだろうか。

[改ページ]

a，b が実数をあらわすとき，乗法の交換法則 $ab=ba$ が成り立つ。

5．結合法則

速度 a のとき，時間 b での移動は ab になる。
時間を c 倍したときの移動を考えてみよう。

速度 a，時間 bc だから，移動は $a(bc)$ とあらわせる。
また，どの b 秒間の移動も ab だから
時間を c 倍すると移動も c 倍になり $(ab)c$。

a，b が実数をあらわすとき，乗法の結合法則 $a(bc)=(ab)c$ が成り立つ。

6．分配法則

下の表はある等速運動をあらわしている。
表の空欄をうめてみよう。

x(秒)	…	b	…	-1	0	$+1$	$+2$	…	c	…
y(m)	…		…		0	a		…		…

時刻 $(b+c)$ のときの位置は [　　　　　　] とあらわせる。
また，
b 秒間での移動は ab，c 秒間での移動は ac だから
$(b+c)$ 秒間での移動は，移動を合成して $ab+ac$ になる。
だから $(b+c)$ 秒間での位置は $ab+ac$ ともあらわせる。

a，b，c が実数をあらわすとき，分配法則 $a(b+c)=ab+ac$ が成り立つ。

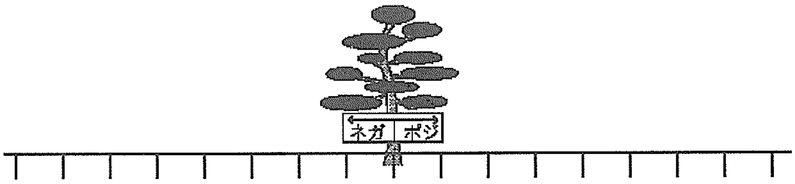
これで実数のどんな計算もできるようになった。

緑の美しい５月のある日，ネガ村・ポジ村合同マラソン大会が開催された。

ルールはただ一つ，「一定速度で走りましょう」。速い人は速いなりに，遅い人は遅いなりに。

号砲が鳴り，皆，一本松から思い思いの向きに走り出した。

やがて誰も見えなくなり，一本松と無限に続く柵だけが残った。



3　解説と授業の展開

3－1　一次元空間の移動と負の数，非負の数（1ページ～4ページ）

負の数，非負の数導入の前提として，一次元空間の移動を理解させる。「無限に続く綱全体が移動する」という一次元空間の移動は認識しにくいため，束縛ベクトル（向きと線分の長さに合わせて始点も考えたもの）から自由ベクトル（向きと線分の長さのみを見たもの）への移行を通して理解させる。問で与えられた束縛ベクトル（始点と終点で示されたBさんの位置の変化）は，他の3つの点（A，C，Dさん）の位置の変化を考える際に「ポジ村側に3mの移動」という自由ベクトルのレベルで理解されることになる。綱を引いている人はみなBさんと同じ向きに同じ距離だけ移動していることからA，C，Dさんの図2での位置を考えるからである。「綱全体がポジ村側に3m移動した」と考えることですべての人（点）の移動は始点が違っても同一の移動とみなすことをおさえる。

一次元空間の移動に二つの向きがあることから負の数，非負の数を導入する。図2と図3は大きさが等しい移動だが綱引きの勝負では向きにより意味が異なる。そこで＋・－を使った記法で区別する。

練習1は新しい記法で移動を表す練習問題である。一次元空間（綱全体）の移動は一点の移動を見ればわかることからリボンの位置に着目すれば良いことに気付かせる。

🗝1では0量（0移動）を導入する。生徒からは「動いていないから移動ではない」「表せない」などの意見が出るだろう。「動いていないから (0)」という意見も出てくるだろう。次ページの解説でこれも移動と考えること，(＋0)，(－0)，(0) が同じことをおさえる。後に加法の計算の過程で (＋0) や (－0) が出てくることを考えても，これらが (0) と同じことを理解することは大切である。

なお，🗝の問題は「問」や「練習」とは違った意味を持つ重要な問題となっている。テキストでまだ説明されていないことを問うもので，生徒自身に考えさせたり案を出し合わせて答えを見つけていく問題である。正解は1つとは限らないことも多い。生徒どうしの学びあいを期待する部分である。

練習2での目標は基準点の一本松とリボンの位置関係によらなくても一点(Pさん)の位置の変化から自由ベクトルを抽象できることである。

3－2　移動の合成による加法の定義（4ページ～5ページ）

🗝2の目標は，負の数も含めた数の範囲に加法を拡張することである。負の数以前に習った数では「全体」を表すのは加法であったことから，負の数も含めた数の範囲でも同じように加法が定義できないだろうか，と生徒は自然に拡張して考えるだろう。「全体」の移動はたし算で (－3)＋(－4) と表せるという意見，全体で (－7) になるという意見が生徒から出されるだろう。この二つは同じものなので等号で結べるということもおさえる。

練習3での目的は，綱の移動から移動の合成の結果を考えることによって加法の計算ができるようになることである。教科書にあるような「同符号の2数の和は，2数の絶対値の和に共通の符号をつける。」などという「計算方法」を教えるまでもなく，加法の結果は綱引きのイメージから明らかになる。

🗝3は加法単位元の導入。どんな移動 a も (0) との合成は a になることをおさえる。

3－3　加法の結合法則・交換法則（5ページ～6ページ）

結合法則を移動の合成から説明している。

練習4は結合法則を使って正の数どうし，負の数どうしをまとめて計算する練習問題である。

加法は本来2つの数に定義されているものだが，結合法則が成り立つから3つ以上の数の加法が考えられるということを教える。

🔑4では，負の数も含めた数の範囲でも加法の交換法則が成り立つことを生徒に納得させるのが目標である。綱引きのイメージで（「朝（+5）夜（−3）でも朝（−3）夜（+5）でも一日としてみると同じだけ移動しているから」など）説明できる。授業では交換法則とは何だったかを想起させることから始まり，生徒たちが各自具体例を用いて成り立つことを発表し，結果をまとめる。

練習5は3つ以上の数のたし算の練習である。結合法則・交換法則を使って計算させる。

3－4　累加（6ページ）

a が負の数のときも累加の形を使えることをおさえる。

3－5　減法を加法にもどす（6ページ～9ページ）

綱引きのイメージから加法逆元（a に対して $a+a'=0$ となる a'）を導入する。

練習6も綱引きをイメージしながらもとに戻す移動を考えさせる。進んだのと同じ距離だけ戻るのだから大きさが同じで向きが逆になることを理解させる。(0) の反移動は定義から (0) となることもおさえる。

次に－の記号の意味を拡張する。ここまで「ネガ村側」という意味を表していた－の記号は，ここからは「反対の向き」の移動を表すのにも使うことになる。

練習7では－の数によって符号が決まることに気付かせる。(8)は a だけで移動を表しているので答えは a になることに注意したい。

「減法（ひき算）と反移動」では，負の数を含んだ数の範囲では今までの加減はすべて加法になることを理解させる。🔑5-1，5-2では移動の減法が反移動の加法になることを確認する。負の数を含んだ数の範囲では減法はすべて反移動の加法と考えられること，これで今までの加減は加法のみになることを理解させる。

練習8では今までやってきた減法も移動の加法になおせること，非負の数の範囲ではできなかった(3) $3-5$ のような計算が，負の数があればできることに気付かせる。

練習9の(2)(3)は代数和の形で書くと練習8(1)(2)の式になる。小学校から今までやっていた減法は代数和だったことに気付かせる。

練習10(5)(6)(7)は文字を含んだ加法である。単元Ⅰで累加を学んでいるからそう複雑ではない一次式の計算もできるだろう。

3－6　数直線と実数（9ページ～11ページ）

一本松からの移動をもとに生徒に数直線を構成させるのがここでの目標である。単元Ⅱで半直線だった数直線がここで直線に拡張される。

9ページの質問は生徒に議論させいろいろな案を出させる。「くいに自分の名前をはる」「すべてのくいに違った模様をつける」などが出るかもしれないが，無限に続く柵では自分の名前

がどこにあるか見つけるのは大変だし，模様の場合も同じである。「一本松からの位置をもとにしてくいに印をつける」という案は数の大小で位置がわかって最も便利だということを納得させる。

「実数の大小関係」では，負の数も含めた実数の大小関係を定義する。

「絶対値」では，移動の長さから負の数の絶対値を考える。

🔑6では，符号と絶対値によって加法の結果が決まることを，生徒自身に説明させることで納得させる。教科書のように，「従うべき手順」ではなく，加法定義から導かれる定理として扱う。

無限ジャンボ綱引きというイメージの世界はここで終わる。実数の概念が負の数にまで拡張され，数直線が得られた。

3－7　等速直線運動の感覚的把握（1ページ）

不等速運動（B）との対比により等速運動（A）を感覚的に把握させる。おもちゃの電車等を使って運動を見せる。Aは電池で動く電車，Bは坂道を走るミニカーなど。実際に時間をはかって，Aは〔4〕秒間に〔20〕m進むこと，Bは〔2〕秒間に〔40〕m進むことを確認する。問題中の数値は例であり，〔　〕をつけてある。事情に応じて適切な値を入れることができるようにするためである。

生徒に答えを出させた後に，実際に車を動かして確かめてみる。

「Aの距離は計算で求められたのにBは求められなかったのはなぜだろう。」と問う。

3－8　等速直線運動から乗法を定義する（2ページ）

等速運動の最も基礎的な認識「Δxが一定ならばΔyも一定」を導く。

表の運動は等速運動をしているか，なぜそう思うか，を問う。問うことによってこれから表を分析していくことが生徒にとって意味のあることになる。表をうめる作業の目的を見失わないように，作業の手順をはっきりさせておくことが大切である。2秒おきの表は，まず最初に2秒おきという指示に従い時刻の欄をうめ，次に時刻の変化分の欄をうめる。次に0秒，2秒，……の位置を欄に記入させる。これは最初に示された表から読み取ることである。そして最後に位置の変化はどうなっているかが問題だということをはっきりさせたうえで位置の変化分の欄をうめさせる。

「17秒のときの電車の位置を求めてみよう。」の質問で乗法の定義がなされる。「Δxが一定ならばΔyも一定」という性質と，位置は移動で決まることから，「17秒のときの位置」は乗法の式であらわせることを確認する。どの1秒間の移動も＋5mだから，17秒での移動は$(+5)\times 17$とあらわせる。また，等速運動のイメージから＋85mの移動をしている。よって$(+5)\times 17=+85$と等号で結ぶことができ，17秒での位置は＋85mとなる。

3－9　負の数の意味の一般化（2ページ）

「松を通る前の時刻と位置も表に書き入れてみよう。」

これまでは移動と位置を表すのにだけ使っていた負の数を時間と時刻にも使う。－の記号の「向きが反対」という一般的な意味を理解させる。移動と位置，時間と時刻の関係をおさえる。時間＝時刻の変化と考える。「負の時間」は時間をさかのぼることになる。

4ページの負の時刻と位置もうめた表には，時間・時刻の正負を考えるので正の時刻に＋の符号をつけてある。

3－10　乗法の定義から負の数の乗法を導く（3ページ～5ページ）

「－17秒のときの電車の位置を求めてみよう。」

時間が負のときでも位置はかけ算で表せることを生徒からひきだす。(＋5)×(－17) と表せることを確認する。また，等速運動のイメージから－17秒での位置は－85 m であることから，(＋5)×(－17)＝－85 と等号で結べることを確認する。

練習1では等速運動のイメージから正×負，正×正の計算をする。1秒間より短い時間でも連続的に移動しているという認識をできるようにするため(6)－0.6秒のとき(7)＋0.01秒のときを入れてある。

「いろいろな運動」では表を読み取り表のあらわす運動をイメージできるようにするのが目標である。ここで確認するのは，速さや速度は等速運動のときだけ考えられ，不等速運動の速さは同じようには求められないこと，現実の運動はほとんど不等速運動であるということである。

🔑3は速度が負の運動である。実際に生徒におもちゃの自動車などを動かして表の運動を再現させる。速度には向きもあること，速度の大きさだけを見たのが速さであることを説明する。

🔑4-1は負×正のかけ算。(－3)×(＋17) の式であらわせることを生徒に出させる。運動のようすからそのときの位置は－51 m だから，(－3)×(＋17)＝－51 と等号で結べることを確認する。

🔑4-2は負×負のかけ算。(－3)×(－17) の式であらわせ，運動のようすからそのときの位置は＋51 m だから，(－3)×(－17)＝＋51 と等号で結べることを確認する。

練習2では等速運動のイメージから負×負，負×正の計算をする。

練習1，2で，負の数を含んだ数の範囲での乗法の計算はすべてできることになる。等速運動のイメージから位置を求めることで，絶対値のかけ算の結果と符号が正×正＝正，負×負＝負，正×負＝負，負×正＝負となることから計算の結果が決まることが理解される。

3－11　除法を逆数の乗法に（6ページ～7ページ）

🔑5「速度を求める」の目的は(1)除法を負の数に拡張すること(2)除法は逆数の積と同じことを理解させること(3)等速運動ではどの $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ も同じことを確かめること(4) $\dfrac{y}{x}=a$ $(x \neq 0)$ を導くことである。

授業では次のような流れで進める。

(A)では負÷正，正÷負を扱うことになる。

速度は＋1秒あたりの移動だから（＋7秒のとき－11 m を見て）

　速度 a を求める式は　　　　　　$a=(-11)\div(+7)$

このあと計算が進まない。

　速度 a で＋7秒間の移動が－11 m だから　　$a\times(+7)=-11$

　　＋1秒間の移動がわかれば速度がわかるから　$a\times(+1)$ を求めればよい。

　時間を＋1秒にするためには逆数の $\left(+\dfrac{1}{7}\right)$ をかければよい。

時間を $\left(+\frac{1}{7}\right)$ 倍すると移動も $\left(+\frac{1}{7}\right)$ 倍になるから

$$a\times(+1)=(-11)\times\left(+\frac{1}{7}\right)$$

よって $$a=(-11)\times\left(+\frac{1}{7}\right)$$

次に－7秒のとき＋11 m などを見て正÷負の立式をさせる。

上と同様に計算方法を明らかにしていく。

速度は＋1秒あたりの移動だから（－7秒のとき＋11 m を見て）

速度 a を求める式は　$a=(+11)\div(-7)$

速度 a で－7秒間の移動が＋11 m だから　$a\times(-7)=+11$

＋1秒間の移動がわかれば速度がわかるから　$a\times(+1)$ を求めればよい。

時間を＋1秒にするためには逆数をかければよいのだが，ここで (-7) の逆数を生徒に問うと $\left(-\frac{1}{7}\right)$ （(-7) にかけて $(+1)$ となるもの）と $\left(\frac{1}{-7}\right)$（単元IIで n の逆数を $\frac{1}{n}$ と書いたのを負の数にも拡張して考えて）の二通りが出されるだろう。ここで $\left(\frac{1}{-7}\right)$ は (-7) の逆数だから $\left(-\frac{1}{7}\right)$ と同じであることを確認しておく。x の逆数は $\frac{1}{x}$ と表すことを実数の範囲にまで拡張する。

表の他の時刻と位置のところでもそれぞれ速度を求めさせたり，時刻＋7秒から＋14秒に変化したときなどの速度も求めさせ，等速運動ではどの $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ も同じことを確かめる。また，時刻0秒からの時間 (Δx) が時刻 x に，0 m の位置からの移動 (Δy) が位置 y になっていることから，$\frac{y}{x}=a$（a は速度）となることを導く。

(B)では正÷正，負÷負を扱う。(A)と同様に計算方法を明らかにしていき，すべての実数の除法は逆数の乗法であることを確認する。

3－12　乗法の交換法則・結合法則（7ページ～8ページ）

等速運動の速度と時間と移動の関係に基づいて，また，ここまでの計算方法と正の数で交換法則が成り立つことから $ab=ba$ が成り立つことを生徒に納得させる。自分の言葉で説明させる。

3－13　分配法則（8ページ）

等速運動の様子から負の数も含めた範囲の数で分配法則が成り立つことを理解させる。

ここまでで，負の数も含めた数の範囲では加減乗除の四則が加法と乗法の二則になり，加法と乗法でそれぞれ結合法則・交換法則が成り立つこと，そして分配法則が成り立つことが理解された。これでもう実数のどんな計算もできる，ということを確認し「負の数とは何か」が終わる。