家紋の対称性の研究に基づく群論入門の授業案

高　橋　哲　男
(北海道大学大学院教育学研究科博士後期課程)

目　　次

1　本稿の目的

本稿の目的は、群論の導入指導の内容と方法を、授業案「対称性と群論入門」に基づいて提示することにある。

数学内部における群論の役割の重要性は言うまでもないが、その幅広い応用性は物理学を中心とする他の学問分野にも及んでいる。数学を専攻する学生はもちろんのこと、理工系へ進む学生は、群の概念と群論の基礎をマスターしておくべきであろう。

しかし、群論は、理系の学生にとってのみ必要で、役立つものというわけではない。群は大学で学ばなくとも、加法と乗法という最も基本的な数の演算においてすでに現れている。また、美しい自己対称な図形は、合同変換と群の関連を示してくれる。高等学校数学までの範囲において群という言葉は登場しないが、その例は合同変換と相似変換、正の数･負の数、ベクトル、

行列代数などの場面で幾度も登場しているのである。群論を学ぶことには、数の演算及び図形の変換や対称性の概念について、高い立場から認識を深めるという意義もある。このことは、数学教育上、理系・文系、数学の好き嫌いを問わず重要である。もちろん、群論の初歩をわかりやすく解説したテキストは少なくないが、大多数の文系学生はそのようなテキストを手にすることがない。筆者は、以上のような課題意識から、すべての学生が群論の初歩を理解できるように構成し、また、授業でそのまま使えるよう学習プリントの形にした授業案「対称性と群論入門」を作成した。

本稿第2章では、群論指導のいくつかのテキストを検討する。これらのテキストは群論の初歩からその応用に至るまでを包括的に解説している。ここで焦点を当てるのは、どれほど高度な教育内容を有しているかではない。群の定義の前後にどのような具体例や説明を設けて、群をイメージ豊かに捉えさせようとしているかに絞って検討を加えてゆく。第3章では、群論の導入指導においては図形の対称性概念との有機的関連が不可欠であると主張し、教育内容・教材構成論を展開する。第4章では、「対称性と群論入門」の各設問のねらいと授業の際の注意点について解説する。授業案は、3名の大学1年生を対象として実践にかけられている。その時の学生の反応や取り組み方を併せて紹介し、授業案の改善すべき点についても述べる。また、本稿の末尾には、改訂した「対称性と群論入門」を載せた。

本授業案は、大学の一般教養課程レベルの学生を想定して作成した。実践も大学1年生を対象として行っている。しかし、授業案が学習者に要求する数学的知識は、素朴な対称性概念及び合同変換とその合成程度である。したがって、検証はできていないが、高校生を対象としても実践が可能であろうと思われる。

2　群論の導入指導の方法

この章では、群論の導入指導、特に群の定義のあり方をめぐって、いくつかの方法を比較検討してみる。

2.1　最初に群の定義を示す

大学生向けの群論のテキストでは、最初に群の定義を書き、次に群の例を示すものが多い。例えば、『群論への入門』[1]を見てみよう。このテキストの第1章「はじめに」は、「1.1集合と写像」「1.2同値関係、類別、全射」「1.3写像の積」「1.4演算と作用」という内容になっており、群論を理解するのに必要な集合論の基礎が扱われている。第2章は「群における基礎概念」であり、「2.1群の定義」が次のように書き始められている[2]。

> 空でない集合 G に演算が定義されていて、それが次の i)、ii)、iii)の条件をみたすとき G はこの演算に関して**群**であるという；
>
> i)（結合律）　G の任意の3元 a, b, c に対して
>
> $$(ab)c=a(bc)$$
>
> が成り立つ。
>
> ii)（単位元の存在）　G のある元 e に対して

1) 都筑俊郎『群論への入門』サイエンス社、1977年。
2) 同上書、12頁。強調は原文。

$$ae = ea = a \quad (\forall a \in G)$$

が成り立つ。この e を G の**単位元**とよぶ。

iii)（逆元の存在） G の各元 a に対して

$$ab = ba = e$$

をみたす G の元 b が存在する。この b を a の**逆元**とよぶ。

定義から始まる数学本来のスタイルに沿うこの方法は、それに耐えられる高度な学習者を対象としていることを表明している。しかし、定義はその必要性があって初めてなされるものであるから、教育の場面では、誰かに与えられるのではなく学習者が発見的に生み出すことが望ましい。もちろん、群のような抽象的概念の生産には、概念の拡張や常識的感覚からの飛躍的思考を伴う。定義の必要性の説明は容易でない場合も多い。大切なことは、なぜその定義が必要かを、可能な限り論理的必然性をもった形で説明することである。群の定義に際しては拡張や飛躍はどうしても避けられないが、それは、学習者の同意を得られるなるべく自然な形でなされなければならないのである。数学教育に求められるのは、現実世界のいかなる側面に対応してその数学的概念が存在するのかを伝えることであろう。そして、このことは、高度な学習者を対象としていたとしても例外ではない。

2.2　演算の性質を拡張して群を定義する

もっとも、群論のテキストは、定義から始まるものばかりではない。新たに定義する数学的概念の必要性を説明しようとする取り組みは、多くのテキストでなされている。群を定義する前に群の具体例を示し、そこに現れる諸性質を拡張・一般化して抽象的な群を定義する方法がよく用いられる。そのような具体例として頻出するのは、整数の加法群である。例えば、『初めて学ぶ人のための群論入門』[3] を見てみよう。本書は、第1章が「加群」で第2章が「群」という構成になっている。第1章の初めに、以下のように加群の定義が記されている[4]。

定義　集合 A の任意の2つの元 a, b に対して G の元 $a+b$ が一意に定まり、つぎの4つの条件

(1) $a+b=b+a$ **（可換法則）**

(2) $a+(b+c)=(a+b)+c$ **（結合法則）**

(3) A に 0 と書かれる特定の元が存在して、A の任意の元 a に対して $a+0=a$ がなりたつ。

(4) A の任意の元 a に対して $a+(-a)=0$ をみたす A の元 $-a$ がある。

をみたすとき、A は（和に関して）**加群**（または **Abel 群**）であるという。0 を加群 A の**零元**といい、$-a$ を a の**逆元**という。

この直後に、例として、「整数全体の集合は（和に関して）加群である」と説明されている。そして、第2章の最初で、加群から可換法則を除いたものが一般の群である、と進む構成になっている。

しかし、加群は抽象的な群の一例として適切な素材なのだろうか。一般的な群を定義する際、

3）横田一郎『初めて学ぶ人のための群論入門』現代数学社、1997年。

4）同上書、9頁。強調は原文。「G の元 $a+b$ が一意に定まり」とあるのは「A の元 $a+b$ が一意に定まり」の誤りであろう。

その概念の実在性を確実なものとして保証するようなイメージの役割を、果たし得るのだろうか。

確かに、一部の高度な学習者ならば $n+(-n)=0$ が負の数を定義する式であると十分に理解しているだろう。「整数全体の集合は（和に関して）加群である」と例があげられていたが、もともと負の整数とは正の整数の加法逆元として定義されるものである。そこにはすでに群論の世界が入り込んでいるのである。整数全体の集合に関する加法の諸性質から加群を理解できる学習者は、すでに一般的な群の概念に到達しているといえる。加群と一般の群の抽象のレベルは同一であるといってよく、加群は一般的な群のイメージづくりに何ら貢献しないのである。

対して、多くの学習者は、$n+(-n)=0$ の計算はできても負の数とは何かを定義できないと思われる。そのような学習者にとっては、加群を定義する諸性質はわかりきった加法の性質として目に映るだろう。「これから群という新しい概念を学習するのだ」という感覚を与えられない。加群は、一般の学習者にとっても、群に到達するための近道とはなり得ない。むしろ、「整数の加法については知っているだろう」という観念を捨てるべきなのであって、逆に、群論的立場から整数の加法の性質を再認識させるような、群論指導の順序構造と方法を提示しなければならない。

2.3　多彩な実例を示してから群を定義する

加法群が群導入の際の例として適さない理由は、数の演算一般においても同様に拡張される。だとすれば、何を例とすればよいのだろうか。ここでは、『群論入門』[5] を見てみよう。同書の第1章「具体的な群」のなかには、「数とベクトルの演算」「平行移動と回転の演算」「置換の演算」「演算の法則」という各節が設けられている。実数の加法と乗法の他に、変位（点の位置の変化）、ベクトル、平行移動、回転、置換の演算（結合）についての性質が扱われている。回転は、空間におけるそれも含んでいる。そして、これら多彩な例の提示の後に、次のように群を定義している[6]。

> 前の数節において、数、ベクトル、回転、置換などの演算を考えたが、これらの例に共通なことは、次の事柄が成り立つことである。
>
> A　演算の成立とその一意性（演算の結果が一通りであること）
>
> B　結合法則
>
> C　逆演算の可能
>
> A, B, Cがすべて成り立つような演算の定められてある数のあつまり、ベクトルのあつまり、回転のあつまり、置換のあつまりなどに**群**という名をつける。

同書の特色として、「まえがき」には、「具体的な例を多くあつめて、抽象的な解説による理解の困難を避け」るよう努力を払ったと書かれている。確かに、群の具体例は豊富である。特に、数の演算だけではなく平行移動と回転の合成を取り上げ、幾何学的変換のイメージから群に迫ろうとしている点は評価できる。しかし、例が多すぎるのは、かえって学習者にとって負担になる。同書では、群が定義されるまでに様々な例のなかで、結合法則が確認されたり逆元の概念が説明されたりしている。いくつかの集合の演算に共通性質があることを確認して、群

5）稲葉栄次『群論入門』培風館、1957年。

6）同上書、24頁。

の一般的定義を引き出そうとしているのである。これでは、定義にたどりつくまでに相当長い道のりをたどらなければならず、何を目的に演算法則を確認しているのかがわからない迷路に入り込んでしまう。置換の合成に関する結合法則などは感覚的に自明ではなく、それを確認する作業などは特に大変である。

具体例は抽象的概念との関わりのなかでこそ具体的であり、抽象的概念の理解を助けるイメージとなる。同書のような構成では、せっかく示された群のいくつかの例がいったい何の具体例であるのかはっきりしない。群を知っている人にのみ、群の例として理解可能であるといえる。

3 「対称性と群論入門」の教育内容・教材構成論

第2章で、群論のテキストの導入指導の場面を検討してきた。抽象的な群を定義するための具体例として数の演算は不適切である。また、それも含めて平行移動や回転、置換など多様な例をあれこれと示すことも、群に接近する上ではかえって遠回りとなることが明らかとなった。もちろん、それらの例は、群の総合的なイメージ形成には欠かせない題材であることは間違いないだろう。問題なのは、それらをどのような場面で、また、どのような順序で提示するかである。『群論への入門』の冒頭にあった群の定義をする前にどういう例を提示することによって、群の定義への飛躍的な階段を連続的で傾斜のなだらかなスロープのごとくに見せられるかを検討する必要がある。

本稿で提示する「対称性と群論入門」の授業案では、図形の対称変換群を例として群を定義する。そして、群の定義前にはそれしか提示しない。定義までは対称変換群のイメージのみを手がかりとするのである。群の例がいくつも示されるよりは、群の定義に直線的に迫ることができると考える。多くのテキストで取り上げられる数の加法群や乗法群は、群の定義後に群の概念理解を補強する最も適切な例として扱うことにしたい。

図形の対称変換群から始める根拠は、F. クラインの「幾何学はある変換群による不変性を追究する学問である」[7] という主張に求められる。北海道大学数学教育研究グループは、この主張を体現化した小学校高学年対象の合同変換の授業プランを作成している[8]。このなかには、自己対称図形にどのような変換を行えば自分自身に重ねられるかを問う、図形の対称性を調べる課題がある。変換群による不変性は対称性の概念と同一視できることから、図形の合同変換群を対称性の研究と結びつけているのである。群の抽象的概念を完全に教えるには至っていないが、群論への第一歩が存在している。

幾何教育はクラインの主張から多くを学んできたが、群論指導は彼にどの程度耳を傾けたのだろうか。対称性と群はこれまで、テキストにおいては不幸な出会いしかしてこなかったように思われる。もちろん、対称性と群の関連は明白であるから、群論のテキストでは、多かれ少なかれ何らかの形で対称性に触れていることだろう。しかし、対称性を群論の最も美しい応用例のひとつに押しとどめるものが、その大多数ではなかっただろうか。

そのような中にあって、例えば『群論への 30 講』[9] は、図形の対称性との関わりから群を定義

---

7) F. クライン「エルランゲン・プログラム」(『現代数学の系譜 7』共立出版、1970 年) 277-278 頁参照。

8) 前田輪音「合同変換の授業プランとその授業記録 ―― 『鏡による図形の移動』の改訂 ―― 」(北海道大学教育学部教育方法学研究室『教授学の探究』第 12 号、1994 年) 参照。

しようとしている点で、評価できよう。同書は、「第１講　シンメトリー」と「第２講　シンメトリーと群」で平面上の図形の対称性について説明している。「対称性とは何かを分析し、抽象し、一般化していくと、そこに‘群’の概念が現われてくる」[10]という記述は、本稿で提示する「対称性と群論入門」の構成原理の重要な鍵になる。

他方、対称性と群の出会いは、群論指導というよりはむしろ対称性の世界への誘いを目的としたテキストにおいても現れる。例えば、『対称性の数理』[11]は、「まえがき」で同書の目的について次のように言う。「初等的な数学の範囲内で、対称性の数理の世界に遊び、そこでの具体的で基本的な対称性についての経験を基礎として、対称性とはどういうものであるかをより普遍的な観点から統一的に理解し、認識を深めるきっかけを提供することが本書の主な目標である」[12]。対称性を「より普遍的な観点から統一的に理解」することは、まさに群を理解することである。第４章までに、１次元空間・２次元空間における対称性概念が、幾何学的対称性を中心にしつつ、物理学における対称性の例も交えて説明される。そして、「第５章　対称性の原理」に至り、「これらの個別的な対称性に、ある一般的な観点から光をあて、これらの対称性を統括し俯瞰しうる、より高い地点へと進むことにしたい」[13]と述べている。「高い地点」とは変換群の概念である。そして、変換群を一般化して群が定義されている。ここに、群と対称性の関連が明らかにされるのである。

同書は、「対称性というのは、変換群に対する、諸々の数学的対象（点、図形、関数等）の不変な性質としてとらえられる」、「変換群の概念こそ対称性の本質を明らかにするものであることが示された。すなわち、対称性とは、変換群に対する普遍性の謂(いい)なのである」[14]と述べている。群論指導の観点から、これらの主張には首肯しうる。ただし、同書の難点をあげれば、もっと早くに群を定義した方が、対称性の理解もスムーズになるのではないかという点であろう。群への到達が遅すぎるのである。もっとも、同書は群論を詳細に解説するのではなく対称性の方に力点を置いているので、これは批判の対象外であるかもしれない。

同様に群論よりも対称性の方に力点を置いたテキストとして、『シンメトリーを求めて』[15]をあげておこう。同書は、まえがきで、「いまや群論は対称性に対する最もふさわしい数学的用語であるばかりでなく、いかなる群もその作用による軌道によって対称性（同値関係）を定義し、また逆に、いかなる対称性（同値関係）も群を定義する、という理由で、群論と対称性は実際に不可分なのである」と述べている。しかし、著者には、群を知らない読者に対して積極的に群を教えようとする意図はなかった。「すべての『代表的』な読者が群論の抽象性を受け入れるわけではな」いので、「すべての群論的考察は、はっきりと明記して一ヵ所に集め、他の議論とは全く別の『わき道』として含めることにした」としているのである[16]。

著者のこのような選択は心情的にはわからぬではないが、対称性と「実際に不可分」である

9）志賀浩二『群論への 30 講』朝倉書店、1989 年。
10）同上書、２頁。
11）新井朝雄『対称性の数理』日本評論社、1993 年。
12）同上書、ⅰ頁。
13）同上書、122 頁。
14）同上書、139-140 頁。
15）J. ローゼン『シンメトリーを求めて』紀伊国屋書店、1977 年。
16）同上書、８頁。

群論を「全く別の『わき道』」に置くことは論理的整合性を欠いていると言えるのではないか。「わき道」である「群論」の節には、「難しいと思う人はとばして次へ進んでよい」との注意がされている。この節はわずか13頁という紙数で、群論の導入としては十分高度な内容を含んでいる。位数が6までの群すべてについて触れられているほか、無限群の例として整数の加法群、有理数の乗法群などがあげられている。これだけ豊富な中身を「わき道」とするのは、実に惜しいことである。「対称性と群論入門」は、ここで扱われた教育内容をすべて含んでいると言ってよい。

以上三書とも、対称性の研究と群論が分かち難く結びついていることを述べていた。「対称性と群論入門」も、この立場から構成されている。すなわち、群論を「わき道」に追いやることを否定し、対称変換群を手がかりにして一般的な群を定義する。対称変換群のもつ美しさは魅力的であり、それ単体で教育内容の主要部分を構成しうる。しかし、その魅力は抽象的な群の理解のなかでこそいっそう輝くのであるから、群の定義までは最短コースをたどることにする。そのことによって、群論が、読み飛ばす必要のない理解可能なものであることを示す。それは、「群論の抽象性を受け入れるわけではな」い「『代表的な』読者」にとって理解可能なだけではない。読者にすらならない、すなわち対称性や群論のテキストを決して手にすることのない者にとっても理解できる概念なのである。

この章の最後に、対称な図形の例として家紋を用いる理由について述べておこう。第一に、その数と種類の多さがあげられる。どんなに家紋の数が膨大であっても群の概念を使ってすべて分類可能であるという認識の獲得は、スケールの観点からいって心地よいはずである。また、種類の豊富さゆえ、単純な幾何学的図形や自然物からは発見しにくい、例えば3次巡回群に対応する家紋などもすぐに用意することが可能である。第二に、正三角形や正方形などの幾何学的図形との対比において、見た目の面白さがあげられる。不幸なことに、多くの高校生や大学生にとって、幾何学的図形は中学校における「証明」を思い起こさせ、できれば見たくないものではなかろうか。家紋であれば、そのような嫌な記憶とは結びつかない。数学の授業に幾何学的図形ではなく家紋が出てくる意外性によって、いったいこれから何を学習するのだろうという期待感を与えることもできるだろう。第三に、葉や雪の結晶などの自然物との対比においてもなお、家紋を選ぶ理由を述べなければならないだろう。数学が世界、あるいは自然の解析と深く関わっていることを伝えようとするとき、自然物の対称性研究に基づいて群論へと展開することは、確かに捨てがたい選択のひとつである。しかし、数学的な意味で厳密に対称である自然物は、実在しないのではないか。群論の抽象性を考えるとき、その指導においては、ほぼ対称な自然物を厳密に対称なものとして抽象するステップが障害になりかねないと考える。動物や植物からあらかじめ厳密な対称性を抽出して作られた家紋を用いることによって、そのステップを減らすことができる。「対称性と群論入門」では、以上の理由により家紋を用いている。

なお、家紋の画像は、播磨屋氏作成のWebページ「家紋World」[17]のものを利用させていただいた。ここに感謝申し上げたい。

4　授業案の解説と実践の様子

本章では、授業案「対称性と群論入門」の解説を行う。各設問のねらいについて説明すると

17) URLは、「http://www. harimaya. com/kamon/」である（2000年12月現在）。

ともに、2000年1月に行われた授業実践時の学習者の反応を紹介する。この授業は大学のカリキュラム上に位置づくものではないが、そのことは、授業案の教育内容・教材構成論を検証する上ではさほど問題にはならないだろう。学習者は、札幌市近郊の私立大学に在籍する1年生3名である。授業者は、授業案作成者である筆者である。かかった時間数は、90分授業で約4コマ相当であった。

以下の四角枠で囲った部分が、実践時に配布したプリントの一部である。ただし、紙数の都合上、解答欄やそれに相当する空白を削除するなどの修正を行っている部分がある。

4.1 対称性とは何かを問う ── 問題1.1

授業プリントの最初の状況設定や問題提示は極めて重要である。「対称性と群論入門」の第一問は、『シンメトリーを求めて』からヒントを得て作られた。同書の第1章「対称性とは」は、次の問から始まっている[18]。

> 1つの正方形を考えよう。この正方形は空間の中であるきまった位置に、ある向きに置かれ、またきまった大きさをもっているものとする。この正方形をいろいろ動かしたり変形したりする操作のうちに、その結果が初めの状態（位置、形、大きさなど）と区別のつかないような操作がいくつかある。それらはどんなものであろうか？

そして、そのような操作は回転と鏡映しかないことを知らせ、「正方形とそれを動かす操作で結果がもと通りであるようなものは、**対称性**の1例である」[19]と結論づけている。数学用語としての対称性を定義しようとすれば、このようになるだろう。しかし、正方形を自分自身に重ねる変換を見つけさせようとするこの問題は、やや必然性に欠けるといえる。そこで、「対称性と群論入門」では、日常用語としての対称性という言葉の漠然としたイメージを問う問題から始めることにした。そのイメージを厳密にしていくことによって、数学用語としての対称性の定義にたどり着くことをねらっている。

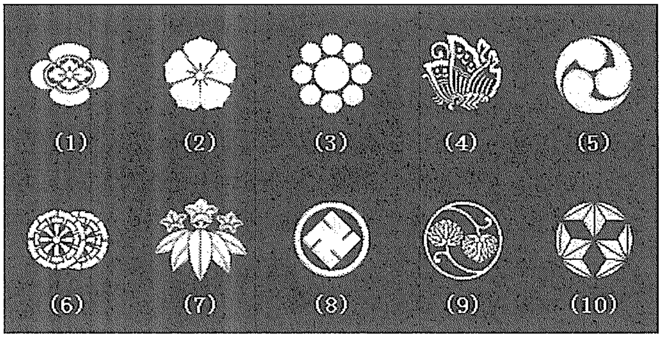
学習者A, B, Cの当初の分類とその根拠となる対称性の定義は、次の通りであった。

	A	B	C
対称性がないもの	4, 5, 6, 8, 9	2, 4, 5, 6, 7, 8, 9	4, 6
対称性があるもの	1, 2, 3, 7, 10	1, 3, 10	1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10

A：中心を通る直線ならどう折っても同じになるもの
B：2つに折って上下左右が一致するもの
C：すべて一定の同じ規則で組み合わせてできているもの

A, Bの2名に、鏡映対称性、特に左右対称性に強くこだわる傾向が見られる。ここで特に注目したいのは、Bの分類である。Bは対称性の概念を3名の中で最も狭くとらえており、対称性がある家紋として3つしかあげていない。しかし、最も狭いにもかかわらず、左右対称性をもつ2, 7には対称性がないと考えていたのである。「2つに折って上下左右が一致するもの」という定義と、1, 3, 10のみを対称性をもつ家紋に分類したことを併せて考えると、Bにとって

18) 前掲J. ローゼン『シンメトリーを求めて』16頁。
19) 同上書、18頁。強調は原文。



日本には、植物や動物、あるいは自然現象をかたどったいろいろな種類の家紋がある。家紋はどれも美しい形をしている。それは、多くの家紋が対称な形をしているからであろう。それでは、「対称な図形」あるいは「対称性がある」とはどういうことであろうか。

問題1.1

(1) 上の(1)から(10)までの家紋を、対称性があるものと対称性がないものに分けよ。

(2) 「対称な図形」あるいは「対称性がある」とはどういうことかを説明せよ。

の対称性のある図形とは「水平線による鏡映、鉛直線による鏡映、半回転のいずれでも自分自身に重なる図形」ではないかと推測できる（10については、3つの黒い菱形を白くした上で水平線に関して折ればほぼ重なる)。鏡映対称性を強く意識しながらも、自然に対称性概念を拡張しているのである。

授業では、ここで、各自の対称性概念をめぐって討論させることが必要である。討論を通じて家紋の分類と対称性の定義を一致させてゆく過程で、対称性の本質を表現する定義を精緻化するのである。実践では、回転対称性を認めるCが討論をリードし、A, Bに対称性概念の再認識を促した。その中でA, Bはしだいに対称性概念を拡張した。C自身も6の上下対称性に気づいた。また、Aは、「中心を通る直線ならどう折っても同じになるもの」という定義では自分の分類と対応しないことを理解し、「鉛直線または水平線で折って同じになる」と定義を改めた。討論を経て、分類は次のように変化した。

	A	B	C
対称性がないもの	4, 5, 8, 9	4, 5, 8, 9	4
対称性があるもの	1, 2, 3, 6, 7, 10	1, 2, 3, 6, 7, 10	1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10

回転対称性に関する溝は最後まで埋まらなかった。しかし、AもBも、回転対称性のある5，8，9の家紋について、「それも対称だというのならば、認めてもよい」という意見を出している。これは非常に喜ばしいことであった。溝があるからこそ定義でそれを埋めるのである。定義は決して絶対的なものではなく皆の合意の上でなされるものであるということが理解され

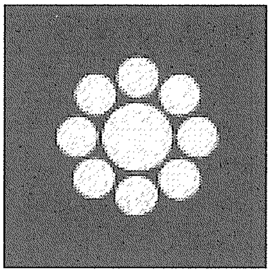
る、適切な場面設定となった。

ただし、この溝は、人間の空間に対する根元的認識に由来すると思われる鉛直・水平方向に関する鏡映への特別視が、いかに強固であるかを痛感させてくれもした。もしも回転対称性を認めるCのような学習者がいなければ、対称性の定義を「回転あるいは鏡映で自分自身に重なること」とすることが難しくなったかもしれない。多くの学習者を対象とした授業であればそのようなことは考えにくいが、その強固な認識へ揺さぶりをかけることも必要であると思われる。そのために、改訂版では、鉛直・水平方向の鏡映軸をもたない、鏡映対称性のある家紋を入れてみたい。

4．2　対称変換群の元を見つける ── 問題1．2

前問題での討論をふまえて、「ある平面図形が対称性をもつとは、その図形を含む平面に対して合同変換（回転・鏡映）を行うことによって、元の図形にぴったり重ねることができることをいう」と、対称性を定義する。そして、この定義では、すべての図形は恒等変換によって自分自身に重ねられることから、問題1．1の(4)の家紋も対称性をもつと考えられることを伝える。しかし、授業ではより対称性の高い図形を扱うことにするとして、次の問題を出す。

問題1.2　右の図形にある変換を行って、元の図形にぴったり重ねたい。どのような変換を行えばよいか。考えられる変換をすべてあげよ。



上の定義の妥当性を、対称性をもつ図形である家紋に戻って確かめる問題である。どういう変換で自分自身に重ねられるかを考えることは、対称変換群を構成する元を探すことである。この問題で、群論と対称性研究への第一歩を踏み出すことになる。

鏡映で重なるのであればその軸を、回転で重なるのであれば中心と回転角を示すことになる。学習者A，B，Cはいずれも、数え忘れと二重数えに気をつけながら、正解することができた。

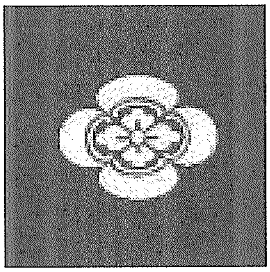
この問題は、自分自身に重ねる変換を探すという点では、次の問題1．3と全く同じである。したがって、問題1．2を省略することも考えられよう。しかし、問題1．3で扱われる家紋を自分自身に重ねる変換は、4個しかない。対称性が定義された直後ではある程度対称性の高い家紋を提示して、その定義を理解し使ってみるための十分な時間を与えることが大切であると考える。16個の変換をすべて見つけ出させることによって、満足感や安心感を与えることができるという意味もある。

4．3　乗積表を構成する ── 問題1．3-1．4

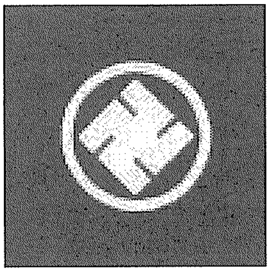
問題1．3と問題1．4は、2問セットになっている。同じ位数4をもつが構造の違う2つの群

問題1.3　下のそれぞれの図形にある変換を行って、元の図形にぴったり重ねたい。どのような変換を行えばよいか。考えられる変換を、それぞれの図形の場合についてすべてあげよ。

(1)



(2)



問題1.4　次のそれぞれの表（この表を乗積表という）の空欄を埋めよ。空欄には、その左の変換と上の変換の合成変換が入る。合成の順序は、左の変換を先に行い、上の変換を後に行うものとする。

(1)

$\circ$	I	$C(\pi)$	$R(\ell_0)$	$R\left(\ell_{\frac{1}{2}\pi}\right)$
I				
$C(\pi)$				
$R(\ell_0)$				
$R\left(\ell_{\frac{1}{2}\pi}\right)$				

(2)

$\circ$	I	$C\left(\frac{1}{2}\pi\right)$	$C(\pi)$	$C\left(\frac{3}{2}\pi\right)$
I				
$C\left(\frac{1}{2}\pi\right)$				
$C(\pi)$				
$C\left(\frac{3}{2}\pi\right)$				

を示して、対称性が同じあるいは違うとはどういうことかを考察する問題である。

図形の対称性が同じとは、対称変換群の構造が同じということである。その構造は、乗積表を構成することによって視覚的になる。乗積表の空欄を埋めよという問はいささか唐突かもしれないが、変換を続けて行うとどうなるかを考えることはそれほど不自然ではないだろう。位数4の群で取り組むことは、位数1，2，3の群はそれぞれひとつしかないことと、合成変換を求めるのにかかる時間を最小限にすることを考えれば、それ以外の選択肢はありえない。

問題1．4の乗積表に見られる記号について解説すると、$C(\theta)$は家紋の中央を中心とする角θ回転を表す。$R(\ell_\theta)$は直線ℓ_θに関する鏡映を表す。ℓ_θとは、家紋の中央を通り水平線とのなす角がθである直線のことである[20]。これらは本授業案独自の表記法であり、問題1．2を終えた後に教えた。実践の際にもしも角θを用いるのに抵抗があれば、別の簡単な表記法を用いてもよい。そのようにしても、本授業案の進行上不都合な点は何もない。

(1)では左上から右下への対角線上に恒等変換Iが並ぶが、これを直ちに一般化して(2)でも一目散に対角線上にIを書いてしまう間違いが見られた。しかし、他の学習者と答合わせをしたり他の部分を計算していく過程で誤りに気づくことができる。予想を裏切る意外な結果になったという点から、(1)と(2)の提示順序はこのままでよいと考えられる。

この問題は、後に定理「位数4の群は2つあって2つしかない」(問題2．6)を証明したところで、再び参照されることになる。

なお、問題の中で「合成の順序は、左の変換を先に行い、上の変換を後に行うものとする」と書いたが、乗積表の方にもそのことが一目でわかるように工夫をするべきであった。合成変換を求める際に、混乱を少なくすることができると思われる。改訂版においては、「先」「後」の文字によって合成の順序を明示することにしたい。

20) より厳密にいえば、家紋の中央に原点を取った普通の座標平面上で考えると、ℓ_θは$0\leq\theta<\pi$で定義され、

$$\ell_\theta:\begin{cases} y=x\tan\theta & (0\leq\theta<\frac{1}{2}\pi,\ \frac{1}{2}\pi<\theta<\pi) \\ x=0 & (\theta=\frac{1}{2}\pi) \end{cases}$$

で表される直線のことである。

4.4 群を定義する

実践の際は、次のような説明とともに群を定義した。

変換しても元の図形にぴったり重ねることができる変換の集合 G と、それらの変換の合成 $\circ$ については、次の性質がある。

(1) 任意の2つの変換の合成変換は、必ず G に含まれている。

(2) 変換の合成については、結合法則 $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$ が成り立つ。

(3) どの変換に対しても、右から合成しても左から合成しても変化を与えない変換（すなわち恒等変換）が G に含まれている。

(4) 乗積表のどの行にも、また、どの列にも、たった1度だけ恒等変換が現れる。つまり、どの変換に対しても、右から合成しても左から合成しても恒等変換になるような変換（すなわち逆変換）が、それぞれ1つずつ存在する。

G を変換の集合に限らない一般の集合に、また、$\circ$ を変換の合成に限らない一般の演算に拡張して、(1) から (4) の性質をもつ集合を、群とよぶ。

定義　集合 G が演算 $\circ$ に関して群をなすとは、G が次の性質を満たすことをいう。

(1) $a\in G, b\in G \Rightarrow a\circ b\in G$

(2) $a\in G, b\in G, c\in G \Rightarrow (a\circ b)\circ c = a\circ(b\circ c)$

(3) G にある要素 e が含まれていて、G のすべての要素 a に対して、$a\circ e=e\circ a=a$ 。このような e を**単位元**とよぶ。

(4) G に含まれる任意の要素 a に対して、それぞれ、G の要素 a^{-1} が存在して、$a\circ a^{-1}=a^{-1}\circ a=e$ 。a^{-1} を a の**逆元**とよぶ。

対称変換群の満たす4つの性質を取り出してから、変換の集合を一般の集合に、変換の合成を一般の演算に拡張して群を定義したのである。端的に言うと、このような説明で群を定義することは失敗であった。対称変換群の拡張・一般化として群を定義するのが最善の方法であることは間違いないが、それを文章で長々と説明するのは誤りである。教える側が拡張・一般化の先にある豊富な収穫をどれだけ知っていても、それは先を知らない学習者の学習動機を満たすものにはならない。学習者の側に拡張「しなければならない」理由は何もないのである。数学教育の場では、ある概念の拡張や一般化はそれが必要であると考えた学習者自らによって行われなければならない。

しかしながら、学習者が対称変換群の乗積表をいくら眺めても、そこから抽象的な群を発見してその概念を定義することはできないだろう。そこで、改訂版では、群の定義と、「前ページの(1)と(2)はそれぞれ、上の群の定義を満たしているだろうか」という問題を提示するだけにしたい。この問題によって、学習者は、群の定義が家紋の対称性研究によって得られた変換群を包摂することを知ることができるだろう。一般化によって群が定義されたことを、授業者の説明を聞くことなく理解することが可能であると思われる。

実践の際には、いくつか注意が必要である。まず、結合法則の確認についてであるが、決して、いくつかの具体例で確かめるだけではいけない。一般に変換は合成に関して結合法則を満

たすことを理解させるのが重要である。その認識が形成されてから、乗積表を用いながら実際に確かめてみて安心するのはよいだろう。次に、演算の閉鎖性についても、乗積表が確かにそうなっていることを見るだけでは不十分である。「自分自身にぴったり重ねる変換を合成したのだから、それが自分自身にぴったり重なる変換であるのは当たり前である。そのような合成変換が G に含まれるのは、G はもともと自分自身にぴったり重ねる変換をすべて集めてつくった集合なのだから当たり前である」という認識がほしい。その上で対称変換群の乗積表を見ると、群一般で成り立つ性質が当然のように成り立っている。乗積表は、ここでも安定剤の役割を果たすのである。そして、演算の閉鎖性は、恒等変換を変換と認める、すなわち単位元の必要性を教えてくれる。ある変換とその逆変換との合成は恒等変換になる。もしも恒等変換を群の元として認めなければ演算の閉鎖性が保たれないという事実を示して、恒等変換や単位元の理解を補強しておきたい。

4. 5　群の定義を使う —— 問題2. 1

定義は、使ってみることを通して、その必要性がより強固になる。問題2. 1は、対称変換群の拡張として定義された一般的な群の定義を用いて解く問題である。

問題2.1　群の乗積表を見ると、どの行（列）を見ても、同じ要素が2度以上出てくることはない。例えば、

$\circ$	e	a	b	c		x	
e	e	a	b	c		x	
a	a		x	x			
b	b			x			
c	c						
x	x						

「a」の行や「c」の列に、ある元 x が2度以上出てくることはない。これはなぜか。群の定義を使って証明せよ。

学習者は、この問題を見ても、最初は「何をすればいいのかまったくわからない」という状態になる。しかし、定理の内容は学習者にとって理解可能であるし、問題1. 4からはこの命題が真でありそうだと感じることができる。簡単に解けそうでいてほどよい難しさがある問題は、取り組みたいと思わせる力と解決後の達成感を備えているという点から見て、良問の条件をクリアしているといえる。

まずヒントとして「群の定義のすべてを使わないと解けない」ことを強調する。次に「背理法を使う」と言うと、手を動かし始める学生が出る。最後に、

$a \circ b = x$ かつ $a \circ c = x$ とすると、$a \circ b = a \circ c$

まで板書する。ここまでくると、全員ではないが解ける学生が出てくる。解けた学生に証明を

書かせて、説明させればよい。証明は、次のようになる。

$a \circ b=x$ かつ $a \circ c=x$ とすると、$a \circ b=a \circ c$。

群の定義(4)より、a の逆元 a^{-1} が存在する。群の定義(1)より、a^{-1} との演算ができるので両辺に左から a^{-1} を結合して、

$$a^{-1}\circ (a \circ b)=a^{-1}\circ (a \circ c)$$

群の定義(2)より

$$(a^{-1}\circ a) \circ b= (a^{-1}\circ a) \circ c$$

群の定義(4)より、$a^{-1}\circ a=e$ なので

$$e \circ b=e \circ c$$

群の定義(3)より

$$b=c$$

これはおかしいので、$a \circ b \neq a \circ c$。

群の定義を構成する4条件をすべて使わせることによって、「後から使わないような無駄な定義はしない」や「定義はそれが必要であるからするものである」といった、数学において大切な考え方を間接的に教えることにもなっている。

ところで、証明の最後にある「$b=c$ はおかしい」ということは、必ずしも自明ではない。本授業案では、集合論の基礎である「1つの集合の元は互いに相異なる」ということを説明してはいない。しかし、「$b=c$ はおかしい」という認識はきわめて自然であった。これは、集合をつくるという行為に内在する根元的認識ではなかろうか。集合とは、「違うもの」を集めて「同じもの」の集まりにしたものである。したがって、集合 $\{a, a, b\}$ は考えないか考えても集合 $\{a, b\}$ と同じと見なすことが集合論の基礎にある。あるいは、「$b=c$ はおかしい」という意識が自然に起こったのは、「対称性と群論入門」が対称変換群から入ったことが影響しているとも考えられる。本授業案の問題1. 2, 1. 3では家紋を自分自身に重ねる変換を探させた。学習者は、最初から、「違うもの」を元として集めて群を構成していたのである。このことが、集合の中には同じ元がないという認識形成を促したのかもしれない。

いずれにしても、学習者は、「$b=c$ はおかしい」という直観に基づいて、「1つの集合の元は互いに相異なる」という集合論の大前提を発見した。その上で改めて、背理法の論理に基づいて証明を完結させたのである。

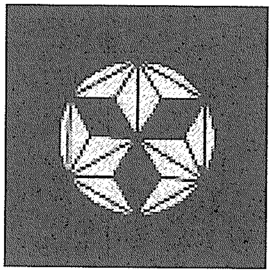
4. 6　定理を使う ―― 問題2. 2

問題2. 2は、再び家紋の対称性に基づきながら、位数6の非巡回群の構造を決定する問題である。

この問題を解くに当たり、問題2. 1で証明した定理を使うことができる。実践では、学習者は、ある行や列の結果をすべて求めてから、定理を裏切ることがないことを確かめていた。問題になっている家紋の対称変換群が定理を裏切らないことによって、群をより実在感のあるものにすることができた。抽象的になされた定義は、具体的なものとの関連を意識されながら、より深く認識されるのである。

また、この対称変換群は、「対称性と群論入門」において初めて登場する非可換群である。実践では、可換群であると決めつけ、乗積表の半分だけを求めて残りは転記するという誤りが見られた。しかし、他の学習者の解答と照合することにより修正された。この問題後に、非可換

問題2.2　下の図形の対称変換群を求めよう。



$$e = I, \quad c_1 = C\left(\tfrac{2}{3}\pi\right), \quad c_2 = C\left(\tfrac{4}{3}\pi\right),$$
$$r_1 = R\left(\ell_{\frac{1}{2}\pi}\right), \quad r_2 = R\left(\ell_{\frac{1}{6}\pi}\right), \quad r_3 = R\left(\ell_{\frac{5}{6}\pi}\right)$$

として、乗積表を書け。

$\circ$		後					
		e	c_1	c_2	r_1	r_2	r_3
先	e						
	c_1						
	c_2						
	r_1						
	r_2						
	r_3						

群との対比によって可換群を定義した。同時に、集合 $\{e, c_1, c_2\}$ も群をなすことを説明してから、部分群の定義も行った。

4.7　位数4までの群を構成する —— 問題2.3-2.6

問題2.3　位数1の群はいくつあるか。乗積表を書いて調べよ。
問題2.4　位数2の群はいくつあるか。乗積表を書いて調べよ。
問題2.5　位数3の群はいくつあるか。乗積表を書いて調べよ。また、位数3の群で表現される、対称性をもつ図形を描け。
問題2.6　位数4の群はいくつあるか。乗積表を書いて調べよ。

問題2.3から問題2.6までの「位数 i の群はいくつあるか」という唐突な感じのする問題は、「いくつか」という以上のことを問うている。

「いくつか」を問うことが可能な対象は離散的なものである。したがって、これらの問題では群の構造を決定してその外延を確定することが要求される。そのためには、学習者は群の定義に立ち戻らざるを得ない。これらの問題は、表面上は「いくつあるか」を聞くだけでありなが

ら、学習者に「群とは何か」を自然と考えさせる力をもっているのである。

実は、問題2. 3の段階ではいまだ群とは何かが理解されておらず、群と群の元との関係についての混乱が見られる。問題2. 3で出される答は、「e 1個」である。「e 1個からなる集合$\{e\}$に、$e \circ e=e$という演算を定義したもの1個」と正確に答えてほしいところであるが、それは無理であろう。学習者にとっては文字通り「e 1個」である。それでも、位数の意味や群の条件のひとつである単位元の存在について理解したことは、伺い知ることができる。

問題2. 4では、

$\circ$	e	a
e	e	a
a	a	e

と乗積表を書いた上で、「4個」と答えた。群とはある構造をもった集合であることがいまだ理解されていなかったのである。この4という数は、位数である2を二乗して得られたものであろう。群の数え方がわかっていなかったため、とりあえず答になりそうな数を求めてみたと想像できる。思うに、学習者にとって、群の元(げん)とはそこから群を生じさせるところの「群の元(もと)」のような存在であって、群とは位数nの場合は乗積表のn^2個の空欄に書き込まれたもののことではないだろうか。このような誤解をできるだけ早く解消するために、改訂版では、「いくつあるか」という問いかけを「いくつのパターンがあるか」に変えたい。「パターン」の語感から、ある種の構造をもったものを数えるのであることが、イメージしやすくなるのではないかと考える。

実践では、群とは群の定義を満たすある構造をもった集合であることを改めて説明し、位数2の群は1個しかないことを確認した。この時点で、n^2個の空欄ではなく、乗積表全体が群そのものを表現していることが認識されたと思われる。

何を数えればよいかがほぼ理解されたところで、次に、数えるに値する群とは何かを考えることになる。問題2. 6「位数4の群はいくつあるか」では、学習者は、場合分けを慎重に行いながら、全員が4個という答を出した。この問題の解答には相当の時間を費やすことになる。教える側としては、単位元でもaでもないという意味でのbとcの対等性に気づいて「$a \circ a=b$のとき」と「$a \circ a=c$のとき」の一方の場合分けをしないことを求めてしまいがちである。しかし、実践の結果から考えると、学習者がそれに気づく望みは薄いと思われる。このような問題状況で「いくつあるか」を問われたら、ひとつでも多く見つけようとするのが普通の心理だろう。時間を気にして解答中に教えてしまうのは、最悪の実践である。教える側の辛抱が求められる問題なのである。

4つのうち3つが実は同じ構造をもっていることを丁寧に説明して、同型の概念を獲得させる。位数4の群は2つしかないということから、図形の対称性を表現する変換群を拡張して定義された一般的・抽象的な群と、「1つ」と数えることの許される個別の群との関係を理解させるのが、一連の問題のねらいである。単に「いくつか」を問う問題から、これだけ多くのことを獲得できる。「群とは何か」が改めてわかるばかりではなく、数学は何を同じものあるいは違うものと見てその対象とするのかについても教えている。

このあたりでは、答案の書き方も上達してくる。学習者Bは、問題2.5について、「$a \circ a$ は b か e。しかしここで e とするとそのとなりは b となり矛盾する。よって $a \circ a$ は b となりその他は自動的に決まる」と書いて、その隣に乗積表を完成させている。問題2.1で証明した定理を使うことができている。

なお、問題2.6では計算用に白紙を提供した。しかし、場合分けをしながら乗積表を構成するのは、ただでも時間のかかる作業である。下に示すような乗積表の一部だけをたくさん印刷した紙を配布して、問題の本質に関わらない困難さ・繁雑さを軽減するべきであっただろう。

$\circ$	e	a	b	c
e				
a				
b				
c				

この問題を解く段階では、位数4の群を構成することが上の乗積表を完成することに等しいという認識は、すでに獲得されている。したがって、上の表を示しても、学習者の思考を制限する悪しき誘導的ヒントにはならないと考える。また、位数1の群を調べる問題2.3で、

$\circ$	e
e	e

$\circ$	a
a	a

$\circ$	b
b	b

・・・

がどれも同じであることや、位数2の群を調べる問題2.4で、単位元 e でない元を a としても b としてもよいことを説明した。位数4の群の元に与える文字が必ず e, a, b, c でなければならないという誤解の心配はない。

4.8 巡回群の性質を知る ── 問題2.7-2.11

問題2.3から問題2.6が与えられた位数の群を構成する問題であったのに対して、問題2.7から問題2.11は、あらかじめ構成された群に関する諸定理を証明する問題である。この過程で、図形の対称性概念に基づいて定義された群が、しだいにその基盤であった対称性との関わりを失い、より抽象度の高い群として独立してくるのである。

問題2.7は、位数4の群の一方と同型な群の例として提示した。この後で巡回群と生成元の定義をした。問題2.8から問題2.11は、巡回群に関する定理である。これらの定理の証明は代数学的世界の中で行われ、学習者はおそらく家紋の対称性の世界に戻ることはなかっただろう。巡回群の定義が家紋の対称性とは無関係に抽象的になされたため、対称変換群のイメージは無用となったのである。

問題2.11の解答では、例えば a^4 が生成元かどうかを調べる際、

$$a^1=(a^4)^p,\ a^2=(a^4)^q,\ a^3=(a^4)^r,\ a^4=(a^4)^s,\ a^5=(a^4)^t$$

なる p, q, r, s, t を求めていこうとすると大変である。

問題2.7　集合 $G=\{1,i,-1,-i\}$ を考える。i は、$i^2=-1$ をみたす虚数単位である。G の演算 $\circ$ を普通の乗法 $\times$ とすると、G は群をなす。乗積表を書いて確かめよ。

$\times$	1	i	-1	$-i$
1				
i				
-1				
$-i$				

問題2.8　4次巡回群(2)の生成元の1つは a であるが、この群にはもう1つ生成元がある。これを求めよ。

問題2.9　n 次巡回群 $\{e(=a^n),a^1,a^2,\cdots,a^{n-1}\}$ は可換群である。これを証明せよ。

問題2.10　位数3の群は、巡回群である。これを証明せよ。

問題2.11　5次巡回群 $\{e(=a^5),a^1,a^2,a^3,a^4\}$ の乗積表をつくれ。また、5次巡回群の生成元をすべて求めよ。

$(a^4)^1$, $(a^4)^2$, $(a^4)^3$, $(a^4)^4$, $(a^4)^5$

を順に計算して、$(a^4)^5=e$ で他が a^1,a^2,a^3,a^4 に一対一対応していることを確認した方が簡単である。

実践を通して改善すべきと感じられた点は、まず、問題2.7は不必要であった。これは巡回群の例ではあるが、そもそも虚数単位 i とは何かを説明しなければ、具体的イメージの伴わない計算規則の暗記の確認に過ぎず、感動の起こらない問題になるからである。i の性質について十分に理解されている場合か、そうでなくても、これを期に複素平面について改めて学習するのであれば、練習問題のひとつとして紹介するのも悪くはないだろう。本授業案ではそこまで想定していないので、削除することとしたい。

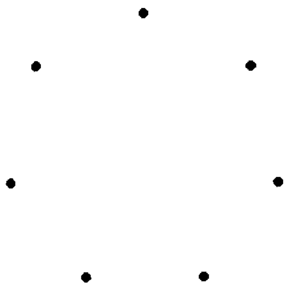
また、問題2.10には「生成元をすべて求めよ」という問を追加し、問題2.9と順序を入れ替えたい。巡回群は、位数はもちろんのことであるが、生成元と一体となって定義される。したがって、巡回群を理解するためには、生成元を求める問題を配置することが適切である。そこで、「定義は使わせてその意味を理解させる」という指導原理からも、問題2.10を巡回群の定義により近い位置へ移動させた方がよいと考える。

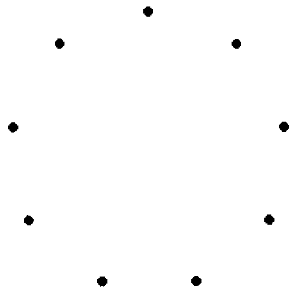
4.9　群と幾何学的イメージを結びつける ── 問題2.12

巡回群についてのいくつかの性質を代数的手法で明らかにした後に、改めて巡回群と幾何学的イメージとの連絡が図られるのが、問題2.12である。

星形多角形を描くことによって巡回群の性質を一目瞭然にすると同時に、正多角形を対称性と群論の立場から見つめ直すことをねらっている。巡回群の幾何学的イメージは、正多角形の辺上をぐるっとひと回りすることであろう。しかし、問題2.11で証明したように、正五角形は生成元以外のすべての元が生成元になる。その事実は、正多角形の対角線上を星形を描くよう

問題2.12　7次巡回群 $\{e(=a^7), a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6\}$ 及び、9次巡回群 $\{e(=a^9), a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, a^8\}$ のすべての生成元を求めよ。





単位元以外のすべての元が生成元になるのは、どんな場合だろうか。

に規則正しく回っても、出発した頂点に戻れることに対応する。また、n 次巡回群と正 n 角形の一対一対応がつくことは、巡回群が無限に存在することの証明になっている。

この問題は、実践終了後に学習者の感想を聞いた際、特に面白かった問題にあげられた。それ以前には純粋に抽象代数の世界において巡回群を理解しており、それが抽象的な群の具体物としての幾何学的イメージと結びつけられた意外性を感じたことが、面白さを湧き出させたと考えられる。

実践では、n 次巡回群で生成元になる元はどれか、また、n がどんな数のときに単位元以外のすべての元が生成元になるかが、「約数」と「素数」という用語を使って、学習者から正しく説明された。

4. 10　群と代数学的イメージを結びつける —— 問題 2. 13

問題2.13　以下のそれぞれの集合は、与えられた演算に関して群をなすかなさないか。証明せよ。

(1) 演算 $\times$ に関して、正の整数の集合（この集合を Z^+ と書く）。
(2) 演算 $\times$ に関して、正の有理数の集合（ Q^+ ）。
(3) 演算 $+$ に関して、0 以上の整数の集合（ Z_0^+ ）。
(4) 演算 $+$ に関して、整数の集合（ Z ）。

問題 2. 13 では、群と数、群と演算の関係が明らかになる。$(-n)+n=n+(-n)=0$ という計算はできても、それが負の数を定義する関係であることを普段から意識している学生はほとんどいないと思われる。群をなすかなさないかを問う問題 2. 13 は、抽象化された群を学んだ高い立場から数の演算についての認識を再構成することをねらった問題である。多くの群論のテ

キストが群の例として数の演算をあげていることからもわかるように、再構成された数の演算の認識は抽象化された群へと還元され、その理解を確実なものとする役割を担うのである。「最初は難しいと思ったけれど、実は群なんて昔から知っていたのだ」と思わせることが、群論の導入指導の授業案である「対称性と群論入門」の目指すところである。

ただし、証明はできたが、答案の書き方では未熟な面が見られた。$(Z^{+}, \times)$ が群をなさないことの証明の中で、学習者は、「Z^{+}の任意の要素 a に対して $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = 1$ になる様な a^{-1}は$\dfrac{1}{a}$である。これは Z^{+}に含まれない。よって群にはならない」と書いた。未熟なというのは、(1)逆元の存在を確かめる文脈の中で逆元である a^{-1}を用いている点と、(2)「任意の」を使ったことにより、群概念の理解を根本から疑われかねない誤解を招きやすい表現になっている点である。任意の元に対応する共通の「逆元」が存在することと、それぞれの元にそれぞれ対応する逆元が存在することは違うと説明して、命題を否定するには反例を1つ示せばよいことを教えた。

4. 11　無限対称変換群を扱う ── 問題 2. 14

加法群・乗法群について扱ったことによって、群が無限群に広がった。問題 2. 14（改訂版の方を参照）では、平面上の無限対称変換群の例である平行移動群について扱う。すべての変換をどのように表すかについて最初は戸惑うが、最終的に、整数という言葉を使えばよいことに気づくことができた。

4. 12　より広い群の世界の一端を知る

問題 2. 14 より後の部分は授業案のエピローグである。実践で配布したプリントは改訂版のものと大差がないので、ここでは割愛する。自分自身に重ねる変換に中心拡大を含めることによる対称性概念の拡張＝フラクタルと、平面の変換群から空間の変換群への拡張＝正多面体群にふれる。数の演算や平面上の併進群のような無限群については説明したが、群の世界はそれ以上に広がっていることを見せるのである。そして、単純な図形でありながら併進群よりも多くの対称性をもつ図形である円を描いて「対称性と群論入門」は終わりである。

5　終 わ り に

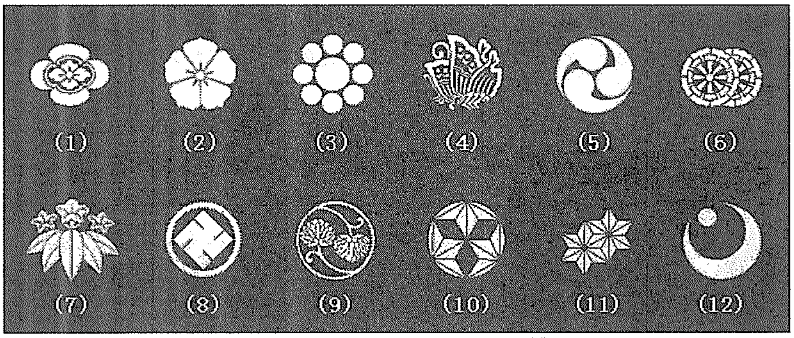
筆者が初めて群論を学んだのは、須田勝彦氏の「算数の数学」によってであった。これは、もともと、北海道大学の一般教育演習の授業で用いられたＢ４版用紙で約 50 枚に及ぶプリント集であるが、数学教育研究グループのゼミでも演習用テキストとしてここ数年の間に２、３度使われてきた。集合・論理・写像から始まって、実数を定義するところまでが内容になっている。そのうち群が直接的に扱われているのは２枚であるが、その中に、「ある図形を不変にする変換の集合は群をつくる。これを、その図形の対称変換群という」という記述や、「位数４の群の構造を決定せよ。またそれを対称変換群として持つ図形を示せ」という問題がある。筆者は、群論を学んだ当初から、それが対称性の概念と結びついていることを知る幸運を得た。「算数の数学」がなければ「対称性と群論入門」もできなかった。ゼミで「算数の数学」を学習しながら交わした議論が「対称性と群論入門」の作成にあたって大変示唆に富んだものであったことも、いうまでもない。

本授業案については、北海道地区数学教育協議会の高校サークルにおいて、教育内容・教材

構成の理論編と、実践記録を中心とした考察の部分に分けて2度報告し、サークル会員の皆様からご検討・ご意見をいただいた。深く感謝申し上げたい。最後に、実践の主旨を理解し時間を割いて授業を受けてくれた大学生の皆さんと、膨大な数の家紋を収集・整理し対称性の美しさと面白さを見せて下さった「家紋 World」の播磨屋さんに改めてお礼を申し上げたい。

※次頁以降は、実践結果の考察を元に改訂した「対称性と群論入門」の全ページである。ただし、版権の問題により一部の図を削除している。

1　対称性とは何か



日本には、植物や動物、あるいは自然現象をかたどったいろいろな種類の家紋がある。家紋はどれも美しい形をしている。それは、多くの家紋が対称な形をしているからだろう。それでは、「対称な図形」あるいは「対称性がある」とはどういうことだろうか。

問題1.1

(1) 上の (1) から (12) までの家紋[1)]を、対称性があるものと対称性がないものに分けよ。

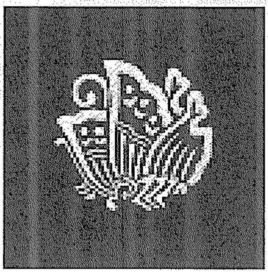
対称性があるもの	
対称性がないもの	

(2) どういう基準で分けたか。あなたにとって、「対称な図形」あるいは「対称性がある」とはどういうことかを説明せよ。

[1)] (1) 木瓜、(2) 桔梗、(3) 九曜、(4) 中かげ揚羽蝶、(5) 右三つ巴、(6) 重ね花形源氏車、(7) 竜胆、(8) 丸に角立卍、(9) 二つ蔓葵丸、(10) 三つ割麻の葉、(11) 持合い麻の葉、(12) 月星。

この授業では、対称性を次のように定義しよう。

定義　ある平面図形が対称性をもつとは、その図形を含む平面に対して合同変換（回転・鏡映）を行うことによって、元の図形にぴったり重ねることができることをいう。

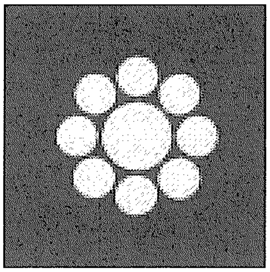


左の家紋は何の対称性をももっていないように見える。しかし、恒等変換を行って自分自身にぴったりと重ねることができる。

したがって、「どのような家紋でも対称性をもつ」ということになる。

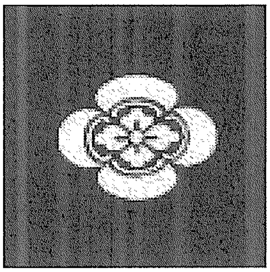
だが、このような家紋は数学で扱うには少々面白くない。もう少し対称性の高い家紋を扱っていこう。

問題1.2　右の家紋を変換して、自分自身にぴったり重ねたい。どのような変換を行えばよいだろうか。考えられる変換をすべてあげよ。

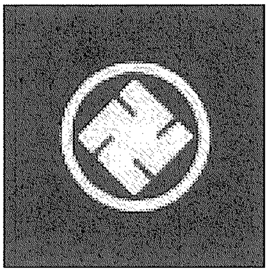


問題1.3　下のそれぞれの家紋を変換して、自分自身にぴったり重ねたい。どのような変換を行えばよいだろうか。

(1)



(2)



(　　　　　　)　(　　　　　　)

3

どちらの家紋についても、自分自身にぴったり重ねる変換が4つあった。それでは、これら2つの対称性は同じといってよいのだろうか。

問題1.4　次のそれぞれの表（この表を**乗積表**という）の空欄を埋めよ。空欄には、その左の変換と上の変換の合成変換が入る。合成の順序は、左の変換を先に行い、上の変換を後に行うものとする。

(1)

$\circ$		後			
		I	$C(\pi)$	$R(\ell_0)$	$R\left(\ell_{\frac{1}{2}\pi}\right)$
先	I				
	$C(\pi)$				
	$R(\ell_0)$				
	$R\left(\ell_{\frac{1}{2}\pi}\right)$				

(2)

$\circ$		後			
		I	$C\left(\frac{1}{2}\pi\right)$	$C(\pi)$	$C\left(\frac{3}{2}\pi\right)$
先	I				
	$C\left(\frac{1}{2}\pi\right)$				
	$C(\pi)$				
	$C\left(\frac{3}{2}\pi\right)$				

2　群とは何か

定義　集合 G が演算 $\circ$ に関して群をなすとは、G が次の4つの性質を満たすことをいう。

(i) $a \in G, b \in G \Rightarrow a \circ b \in G$

(ii) $a \in G, b \in G, c \in G \Rightarrow (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$

(iii) G にある元[2] e が含まれていて、G のすべての元 a に対して、

$$a \circ e = e \circ a = a$$

が成り立つ。このような e を**単位元**とよぶ。

(iv) G に含まれる任意の元 a に対して、それぞれ、G の元 a^{-1} が存在して、

$$a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$$

が成り立つ。このような a^{-1} を a の**逆元**とよぶ。

問題2.1　前ページの(1)と(2)はそれぞれ、上の群の定義を満たしているだろうか。

(1)

(2)

[2]集合の要素のことを、**元**（げん）とよぶことがある。

定義　群の元の数が有限個であるとき、この群を**有限群**といい、群に含まれる元の数を、群の**位数**とよぶ。有限群ではない群を、**無限群**とよぶ。

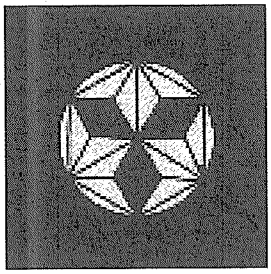
この授業では、しばらくの間、有限群のみを考えることにする。

問題2.2　群の乗積表を見ると、どの行（列）を見ても、同じ元が2度以上出てくることはない。例えば、

$\circ$	e	a	b	c		x	
e	e	a	b	c		x	
a	a		x	x			
b	b			x			
c	c						
x	x						

「a」の行や「c」の列に、ある元 x が2度以上出てくることはない。これはなぜか。群の定義を使って証明せよ。

問題2.3　下の家紋の対称変換群を求めよう。



上の家紋を自分自身にぴったり重ねるような変換は、

$$I(=C(0)), C\left(\frac{2}{3}\pi\right), C\left(\frac{4}{3}\pi\right), R\left(\ell_{\frac{1}{2}\pi}\right), R\left(\ell_{\frac{1}{6}\pi}\right), R\left(\ell_{\frac{5}{6}\pi}\right)$$

である。簡単にするために、

$$e = I, \qquad c_1 = C\left(\tfrac{2}{3}\pi\right), \quad c_2 = C\left(\tfrac{4}{3}\pi\right),$$
$$r_1 = R\left(\ell_{\frac{1}{2}\pi}\right), \quad r_2 = R\left(\ell_{\frac{1}{6}\pi}\right), \quad r_3 = R\left(\ell_{\frac{5}{6}\pi}\right)$$

として、乗積表を書け。

$\circ$		後					
		e	c_1	c_2	r_1	r_2	r_3
先	e						
	c_1						
	c_2						
	r_1						
	r_2						
	r_3						

$\circ$		後					
		e	c_1	c_2	r_1	r_2	r_3
先	e	e	c_1	c_2	r_1	r_2	r_3
	c_1	c_1	c_2	e	r_2	r_3	r_1
	c_2	c_2	e	c_1	r_3	r_1	r_2
	r_1	r_1	r_3	r_2	e	c_2	c_1
	r_2	r_2	r_1	r_3	c_1	e	c_2
	r_3	r_3	r_2	r_1	c_2	c_1	e

上の群では、乗積表の右上と左下が対称にはなっていない。

定義　乗積表の右上と左下が対称になっている、すなわち、任意の2つの元 a, b について $a \circ b = b \circ a$ が成り立つ群を、**可換群**とよぶ。

また、上の群では、3つの元 e, c_1, c_2 からなる集合も群になっている。

定義　群 G の部分集合 H が G と同じ演算 $\circ$ に関して群になっているとき、H を G の**部分群**とよぶ。

数学では「G は G の部分集合である」という言い方は正しいと考えるので、G は G の部分群である。

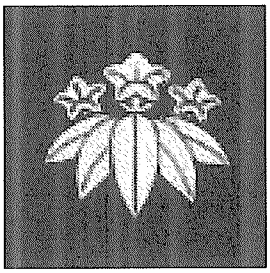
問題2.4　位数1の群にはいくつのパターンがあるか。乗積表を書いて調べよ。

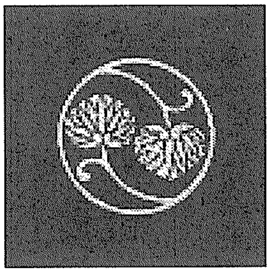
位数1の群は、任意の群の部分群である。

問題2.5　位数2の群にはいくつのパターンがあるか。乗積表を書いて調べよ。

8

下の2種類の家紋の対称性は、位数2の群で表現される。





問題2.6　位数3の群にはいくつのパターンがあるか。乗積表を書いて調べよ。また、位数3の群で表現される、対称性をもつ図形を描け。

9

問題2.7　位数4の群にはいくつのパターンがあるか。群の元を e(単位元), a, b, c として乗積表を書いて調べよ。

$\circ$	e	a	b	c
e				
a				
b				
c				

$\circ$	e	a	b	c
e				
a				
b				
c				

$\circ$	e	a	b	c
e				
a				
b				
c				

$\circ$	e	a	b	c
e				
a				
b				
c				

$\circ$	e	a	b	c
e				
a				
b				
c				

$\circ$	e	a	b	c
e				
a				
b				
c				

$\circ$	e	a	b	c
e				
a				
b				
c				

$\circ$	e	a	b	c
e				
a				
b				
c				

e の定義により

$\circ$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a			
b	b			
c	c			

$a \circ a = b$ とすると

$\circ$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

(2-1)

$a \circ a = e$ とすると

$\circ$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c		
c	c	b		

$a \circ a = c$ とすると

$\circ$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	c	e	b
b	b	e	c	a
c	c	b	a	e

(2-2)

$b \circ b = e$ とすると

$\circ$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

(1)

$b \circ b = a$ とすると

$\circ$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	a	e
c	c	b	e	a

(2-3)

ここで、(2-1)(2-2)(2-3) はすべて同じ群である。なぜなら、例えば、(2-2) を、c が3番目の元、b が4番目の元になるように表を並び替えると (2-2)' になり、ここであらためて、b を c 、c を b と呼び替えれば、(2-2)" になる。

$\circ$	e	a	c	b
e	e	a	c	b
a	a	c	b	e
c	c	b	e	a
b	b	e	a	c

(2-2)'

$\circ$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

(2-2)"

(2-2)" は (2-1) と同じである。同様にして、(2-3) は (2-1) と同じである。

位数が同じで、乗積表の構造が同じ群を同型という。

11

結局、位数4の群は右の2つしかない。

$\circ$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

(1)

$\circ$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

(2)

それぞれの群は3ページの群を一般化したものであり、2ページの家紋にそれぞれ対応している。

定義　n を負でない整数として、ある群に属するある元 a を n 個結合したものを a^n と表す。すなわち、

$$a^2 = a \circ a, \quad a^3 = a \circ a \circ a, \quad a^4 = a \circ a \circ a \circ a \quad \cdots$$

特別な場合として、$a^0 = e, a^1 = a$ とする。また、

$$a^{-n} = (a^{-1})^n$$

とする。

位数4の群(2)の「a」の行を見ると、

$$b = a^2, \quad c = b \circ a = a^2 \circ a = a^3, \quad e = c \circ a = a^3 \circ a = a^4$$

となっていて、すべての元が a の累乗で表現されている。

定義　位数 n の群 G に属するすべての元が、G に属するある元 a を用いて $a^1, a^2, \cdots, a^{n-1}, a^n$ で表され、$a^n = e$ であるとき、G を n **次巡回群**といい、a を G の**生成元**という。

問題2.8　4次巡回群(2)の生成元の1つは a である。他にも生成元がないか調べよ。

問題2.9　位数3の群は、巡回群である。これを証明せよ。また、生成元をすべて求めよ。

問題2.10　n 次巡回群 $\{e(=a^n), a^1, a^2, \cdots, a^{n-1}\}$ は可換群である。これを証明せよ。

13

問題2.11　5次巡回群 $\{e(=a^5), a^1, a^2, a^3, a^4\}$ の乗積表をつくれ。また、5次巡回群の生成元をすべて求めよ。

$\circ$					

5次巡回群の生成元は、＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

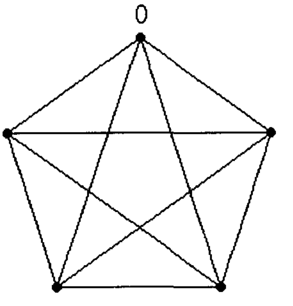
5次巡回群では、単位元以外のすべての元が生成元である。このことは、次の幾何学的事実と対応する。

正五角形のある頂点 0 から出発して1つ隣の頂点に次々に向かう。5回目にすべての頂点を巡回して頂点 0 に戻るので、a^1 は生成元である。

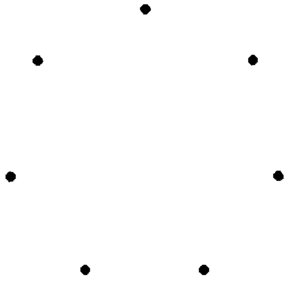
正五角形のある頂点 0 から出発して2つ隣の頂点に次々に向かう。5回目にすべての頂点を巡回して頂点 0 に戻るので、a^2 は生成元である。

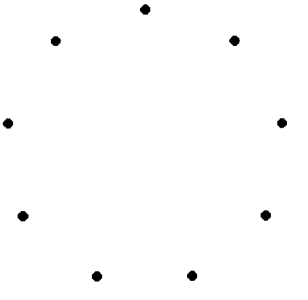
…ので、a^3 は生成元である。

…ので、a^4 は生成元である。



問題2.12 7次巡回群 $\{e(=a^7), a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6\}$ 及び、9次巡回群 $\{e(=a^9), a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, a^8\}$ のすべての生成元を求めよ。





$\left(\qquad\qquad\qquad \right)$ $\left(\qquad\qquad\qquad \right)$

単位元以外のすべての元が生成元になるのは、どんな場合だろうか。

$\left(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \right)$

15

一般に、n 次巡回群 $\{e(=a^n), a^1, a^2, \cdots, a^{n-1}\}$ の生成元は、$1 \leq m < n$ として、n と m の最大公約数が 1 になるような a^m である。

ここからは、無限群を考える。

問題2.13 以下のそれぞれの集合は、与えられた演算に関して群をなすかなさないか。証明せよ。

(1) 演算 $\times$ に関して、正の整数[3)]の集合（この集合を Z^+ と書く）。

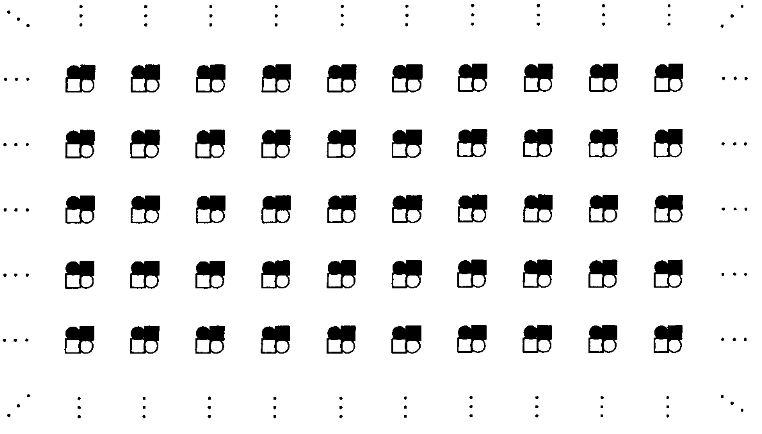
(2) 演算 $\times$ に関して、正の有理数[4)]の集合（ Q^+ ）。

(3) 演算 $+$ に関して、0 以上の整数の集合（ Z_0^+ ）。

(4) 演算 $+$ に関して、整数の集合（ Z ）。

3)整数とは、$\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots$ である。
4)有理数とは、a を整数、b を 0 ではない整数とするとき $\frac{a}{b}$ と表すことのできる数である。

問題2.14　下にあるのは、同一平面上でどこまでも同じ模様が続いている図形の一部であるとする。この平面いっぱいに広がった図形の対称性を表す群は、どんな群だろうか。乗積表を書いてみよう。



前ページの図形の対称性は、2つの方向への併進の任意の有限回の合成変換すべてからなる変換群で表現される。このような変換群を、**2次元格子群**とよぶ。

下のような図形は、併進の他に回転や鏡映でも重なる。このような図形の対称性を表現する変換群を、**2次元結晶群**とよぶ。2次元結晶群は全部で17通りあって、17通りしかないことが知られている。

M.C.エッシャーの絵を紹介する。

C.H.マックギラフィ『エッシャー《シンメトリーの世界》』
サイエンス社、1980年、などを参照。

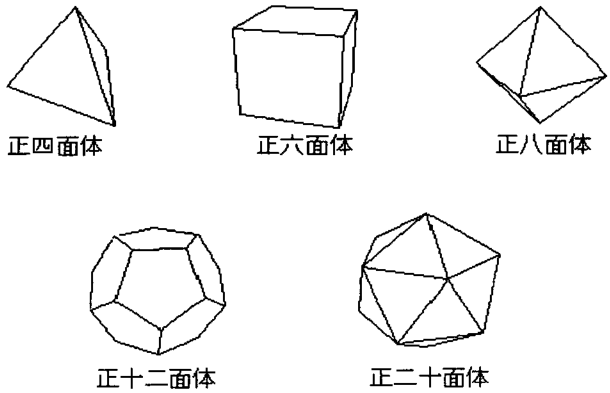
どんな変換で自分自身に重なるだろう？

下のような図形を、同じ規則で平面全体に無限に広がる図形の一部であると考えてみよう。そうすると、全体としての図形は中心拡大によっても自分自身に重ねることができる。

自己相似図形の例を紹介する。

渕上季代絵『CG・かたち・フラクタル』
サイエンス社、1992年、などを参照。

そして、平面から空間へと目を向けると、さらなる対称性と群論の世界が広がってくる。



しかし、今までの図形のなかで最も単純で、最も多くの元をもつ対称変換群で表される図形は……。

対称性と群論入門 — おわり