中学校幾何教育カリキュラムの再構成

──「円の幾何学」単元作成へのノート──

高　橋　哲　男
（北海道大学大学院教育学研究科博士後期課程）

目　　次

1　は　じ　め　に

筆者は先に、中学校幾何教育カリキュラムを構成する諸単元として、以下の八単元を仮設した[1)]。

第一単元　平面幾何学の公理系(1)──角と平行の公理──
第二単元　平面幾何学の公理系(2)──線分と円の公理──
第三単元　合同変換(1)
第四単元　半回転の幾何学
第五単元　鏡映の幾何学
第六単元　合同ホモセティ変換
第七単元　合同変換(2)
第八単元　相似変換

本稿では、これらの諸単元とともに中学校の幾何教育カリキュラムを構成する「円の幾何学」の作成に向けた教育内容の整理をし、教授プログラムの提案を行う。

2　中学校教科書における円の扱い

現在の中学校数学教科書[2)]において、円に関する教育内容は第一学年と第三学年で登場する。

1) 拙稿「中学校幾何教育カリキュラムの再構成──平面幾何学の公理系について──」（『北海道大学大学院教育学研究科紀要』第84号、2001年）。
2) 以下で教科書の内容について言及もしくは教科書から引用する場合は、東京書籍の教科書（藤田宏・前原昭二ほか『新しい数学』東京書籍、1994年）を対象とする。引用の際に頁数は示さない。

第一学年では、「平面図形」の章の「基本の図形」のなかで2頁を使って扱われている。しかし、「中心がOである円を円Oという」と書かれているが円の定義はない。小学校での既習事項として済まされるのだろう。弧と弦の定義は述べられており、弦については、長さが最大の弦が直径であることが学習される。その他の教育内容としては、円が中心を通る直線に関して対称であるということだけである。

第三学年ではまず、「計量と相似」の章で扇形の弧の長さと面積について扱われる。ここでも割かれるのは2頁と半分であり、学習内容は「同じ円の扇形の弧の長さや面積は、中心角に比例する」ことに尽きる。半径 r の円の円周が $2\pi r$ であり面積が πr^2 であることは、理由の説明がなく用いられている。

そして、第三学年の後半の学習内容として、章「円」が設けられている。この章の構成を、第三レベルまでの見出しを取り出して表1に示す。

表1　章「円」の構成

<table>
<tr><td rowspan="5">1　円と直線</td><td rowspan="4">1.1　円と直線</td><td>三角形の外接円</td></tr>
<tr><td>接線</td></tr>
<tr><td>三角形内接円</td></tr>
<tr><td>接線の長さ</td></tr>
<tr><td>1.2　2つの円</td><td>共通な接線</td></tr>
<tr><td rowspan="6">2　円 周 角</td><td rowspan="4">2.1　円周角</td><td>円周角と中心角</td></tr>
<tr><td>円周角と弧</td></tr>
<tr><td>円の内部と外部</td></tr>
<tr><td>円外の点からの接線の作図</td></tr>
<tr><td>2.2　円に内接する四角形</td><td></td></tr>
<tr><td>2.3　接線と弦のつくる角</td><td></td></tr>
</table>

以上のように教科書における円の扱いを見てみると、円に関する断片的な知識が複数の段階で教えられていると批判することができる。たとえば、第三学年で最初に弧と中心角の比例関係が扱われるが、弧と円周角の比例関係はまた別のところで教えられる。また、表1に示されるとおり、「三角形の内接円」と「円外の点からの接線の作図」も切り離されている。これらは密接に関係するものであるから、連続的に教えた方がよいであろう。

3　「円の幾何学」の教育内容・教材構成論

3.1　教育内容の選択について

このように教科書の円に関する教育内容構成を批判することは容易である。しかしながら、円に関するどのようなまとまりを教育内容として提示すべきかを明らかにすることは、難解な課題である。円に関する無数の性質から何を取り出して教えれば、中学生にとっての「円の幾何学」を教えたことになるのか。教科書では、円に内接する四角形の条件が扱われているが、これをここで教えなければならない理由は何かあるだろうか。また、教科書では、「基本の図形」のひとつとして円が扱われた。円が「基本の図形」ならば、教科書で学んだ円についての知識は、さらなる図形の世界の探究に資するものであるはずである。だが、教科書で円の学習を終

えたとき、次に進むべき幾何学への扉は果たして開かれるだろうか。円に内接する四角形の条件が明らかにされたとき、もしも「それで？」という感想しか抱かれないとすれば、そのような条件など最初から教えなくてもよいのではないかと思われる。

教科書へのこれらの問いはむろん、今後「円の幾何学」を作成していく自らへの問いでもある。円についての教育内容の絞り込みをいかなる原理によって行うべきかはまだわからない。わからないが、現在の「円の幾何学」は、仮説的に二つの判断基準をもって教育内容を選択していると指摘することができる。

一つは、変換や対称性の考え方が生かされるような内容を選ぶという基準である。「円の幾何学」は、最初に掲げた幾何教育単元の系列では、少なくとも第七単元の合同変換以降に配置されることになるだろう。円の以前に、学習者は、鏡映や回転・併進などの合同変換や対称性について学んでいる。円は、中心を通る任意の直線に関して対称であり、かつ、円の中心を中心とする任意の回転に関して回転対称であるという特異な対称性を持つ図形である。円の性質を明らかにするなかで対称性の素晴らしさがわかるならば、そのような性質は取り上げる価値がある内容をもつといえるだろう。内接円や外接円とそれに関連する諸性質がこれに含まれる。もう一つは、円の一部を移動させても変わることのない性質を教えることになるかという基準である。具体的には、円の定義そのものである半径の相当性と、同一の弧に対する円周角が等しいという定理である。前者については、コンパスの役割を教えることと、公理「線分はその長さを変えることなく任意の位置に動かすことができる」を承認することを同時に満たすように、第二単元「平面幾何学の公理系(2)── 線分と円の公理 ──」のなかで扱っている。後者は円の準定義的定理である。円弧上の点を移動しても円周角の大きさは不動であるという性質は、幾何学の動的・静的なイメージを結びつける一例になる。また、円周角の定理は、後に続く内接四角形の条件や接弦定理を導く基点となるという意味において基本的な定理といえ、教育内容に取り入れるべき項目といえるだろう。

「円の幾何学」では、接線や内接円・外接円、円周角の定理を中心に構成したことによって、教科書で扱われている内容のうち、弧の長さや扇形の面積などの計量に関することと二円の関係に関することが外れている。計量についてはまた別の単元を立てて教えるべきと考えているが、現段階では具体的教授プログラムの提案には至らない。この単元のなかで、π とは何かも教えられることになるだろう。二円の関係については、教科書では、二円の半径と中心間の距離によって二円の位置関係がどう変わるかが扱われている。しかしこの関係は結局、三つの長さが与えられたとき、その長さを三辺とする三角形ができるかどうかと同じことであり、それ以上の面白い性質の発見につながりそうにない。

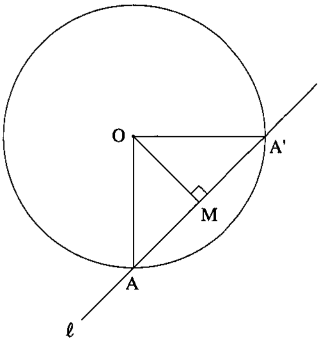
以下では、接線と円周角の定理の教材構成について検討する。

3.2 接線について

接線の基本的性質として、(1)円との交点が1点しかないこと、(2)接点を通る半径と垂直であること、の二つがあげられる。いずれの一方を定義としても、他方を証明しなければならない。佐々木重夫『幾何入門』を参照して、両者の同値性を明らかにしておこう[3]。

(1)⇒(2)

3) 佐々木重夫『幾何入門』岩波書店、1955年、55頁。



接線ℓの接点をAとし、ℓが半径OAに垂直でないとすれば、Oから接線に垂線を下してその足をMとするとき、AとMは異なる点である。AMの延長上にAM＝MA′であるような点A′をとれば、第一合同定理により、△OAM≡△OA′M。よってOA＝OA′ゆえにA′は円周上にある。A′はAと異なる点であるからℓは円Oと二点A,A′を共有することになり、接線であるという仮定に矛盾する。よってℓは半径OAと垂直でなければならない。

(2)⇒(1)

円Oの半径OAの端点Aを通りこれに垂直な直線ℓ上の任意の点をPとするとき定理20によりOP＞OA、従ってℓ上のA以外の点はすべて円O上にない。よってℓは接線である。

ここに「定理20」とは、「直線外の一点とこの直線上の点とを結ぶ線分につき、[1]垂線が最も小さい、[2]垂線と等しい角をなす線分は相等しい、[3]垂線と大きい角をなす線分ほど大きい」のことである。

(1)⇒(2)の証明には背理法が用いられている。この方法による証明は可能ならば回避したい。(2)⇒(1)の証明では、証明すべき命題と比べてどちらが明らかかわからないような「定理20」が用いられている。このような証明も避けた方がよい。

教科書でも証明は概略上と同様である。(1)を接線の定義として(2)を次のように証明している。

円Oの接線をℓ、接点をMとし、ℓ上のM以外の任意の点をPとすれば、Pは円Oの外部にあるからOP＞OM。したがって、OMは、Oからℓまでの最短距離であるといえる。ゆえにOM⊥ℓ。

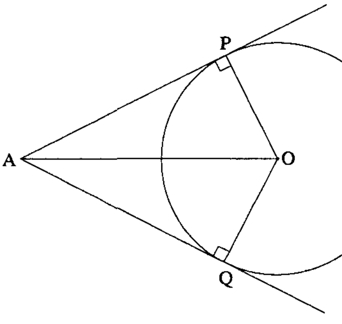
ここでは、「Pは円Oの外部にある」ことを無条件に承認している。しかしこれは、Pを接点ときわめて近い位置にとったときには確信のもてる言明にはならない。また、直線外の一点と直線上の点との距離が最短になるとき、二点を結ぶ線分と直線とが垂直になるという前提を用いた証明になっている。この前提も、新しい命題を証明するための土台とするには心許ないものである。あるいは、これを前提可能とするくらいならば証明されるべき命題も証明なしに承認してよいのではないか、という疑問が生じる。

(1)と(2)の同値性は、上のような証明によらず獲得されるのが望ましい。そこで、本授業案では、接線の定義は(1)を採用し、(2)性質については、円の鏡映対称性に関する直観に基づいた円と接線の関係に関するいくつかの公理の一つとしてまとめる。円と接線の関係を対称性の視点から眺める場合、接線が接点を通る半径に対して垂直かつ鏡映対称になる図がまず思い浮かぶ。しかし、この図は、接線が自分自身と対称になるという特殊ケースであるため、対称性を認識しにくい可能性がある。したがって、「円外の一定点から円に対して二本の接線を引くことができる」をもっとも重要な公理とし、異なる二接線が対称になることから出発する。相異なる二

接線を考えることによって、対称性を浮かび上がらせるねらいがある。その定点を徐々に円に近づけ最後には円周上にとったとき、二本の接線が一致して一本になる。このようにすれば、接線が自分自身と対称になることの理解を援助することができ、接線とその接点と通る半径との垂直性も自明のものとして承認することが可能になるだろう。

この公理とあわせて、「円外の一定点から円に対して二本の接線を引くとき、定点から二つの接点までの距離は等しい」も公理とする。この公理は、直角三角形の合同条件を用いて証明することは可能である。

円 O 外の定点を A、二接点を P, Q とする。



△ APO と△ AQO において、∠APO＝∠AQO（＝∠R)、斜辺 AO は共通、OP＝OQ（＝円 O の半径）が成り立つ。直角三角形の合同条件より、△ APO≡△ AQO がいえる。よって、AP＝AQ がいえる。

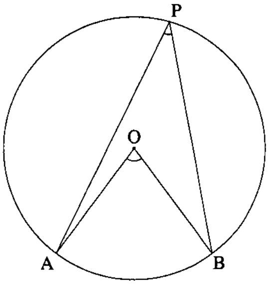
しかし、直角三角形の合同条件は確かに便利ではあるが、これはもともと二等辺三角形の性質から導かれるもので、合同条件としては不要であるともいえる。三角形の一般の合同条件を用いるとすれば、∠AOP＝∠AOQ を示して、半径 OP と OQ の相等とそれぞれの両端の角の相等に帰着させなければならないが、∠AOP＝∠AOQ は、AP＝AQ よりさらに証明困難であろう。円の鏡映対称性からもたらされる AP＝AQ という直観的な納得を補強しうる、適切な論理的説明は見つかりそうにない。したがって、接点までの距離の相等性は証明せずに公理とすることが適切と思われる。

なお、教科書では「接線の長さ」という奇妙な言葉が用いられている。上の図で、線分 AP と線分 AQ の長さを「A から円 O に引いた接線の長さ」というのである。接線の長さに関する定理「円外の 1 点からその円にひいた 2 つの接線の長さは等しい」も述べられている。しかし、接線の定義は円と一点のみを共有する直線である。この定義に基づいて「接線の長さ」を普通に考えれば直線の長さということになり、教科書で意図する概念とは異なる。しかも、教科書のいう接線の長さは、一本の接線に対して確定する概念ではない。平行でない二本の接線の組もしくは円外の一点に対して定義される長さである。このような観点からすると「接線の長さ」は誤解を生み出す元でありまた、不自然な命名であるといえよう。覚えなければならない用語はできるだけ減らした方がよい。「接線の長さは等しい」ではなく、図と「AP＝AQ」があれば十分である[4]。

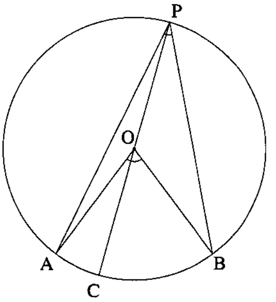
4) 接線の長さという用語がいつから使われるようになったのかはわからないが、佐藤良一郎訳『ボレル幾何学』（山海堂、1925 年）に、「一点から出て同一の円周に切する二つの切線の長さは相等しい」（120 頁）という

3. 3　円周角の定理について

円周角の定理は、円O上に弧ABがあるとき、円上にあって弧AB上にない任意の点Pをとると、Pの位置によらず$\angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB$が成り立つという定理である。



教科書では、半径POを延長した直径PCを引き、二等辺三角形OAPの外角の性質からこの定理を証明しようとする。



$\triangle$ OPAは二等辺三角形なので、$\angle OPA=\angle OAP$。

$\angle AOC$は$\triangle$ OPAの外角なので、$\angle AOC=\angle OPA+\angle OAP=2\angle OPA$。

$\triangle$ OPBに関する同様の議論により、$\angle BOC=2\angle OPB$。

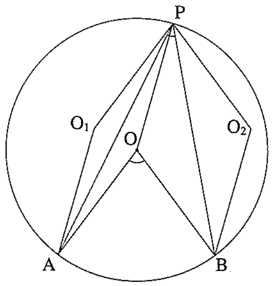
$\angle AOC=2\angle OPA$と$\angle BOC=2\angle OPB$の辺々を加えて、$\angle AOB=2\angle APB$。

よって、$\angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB$。

しかし、ここでは図形の変換を応用した証明を紹介してみよう[5]。

表現を見ることができる。また、國枝雄一・瀧本潔『農用幾何教科書』(興文社、1903年)には、「円外の一点より之へ引ける二切線は相等し」(89頁)とあり、接線そのものと接点までの線分とを状況によって同じ用語で表現していることがわかる。

5) Abromeit, W.:" Ein abbildungsgeometrischer Beweis für den Umfangswinkelsatz ", Math. Natur. Unterricht. 14(1961), p. 33. を、阿部浩一「幾何教育の混迷」(『大阪教育大学紀要』第16巻、V. 教科教育、No. 1、1967年)より重引。



二等辺三角形 OAP を底辺 AP に関して鏡映する。O の像を O_1 とする。

四角形 OAO_1P はひし形になるので、$OA \parallel PO_1$, $\angle OPA = \angle O_1PA$。

同様に、BP に関する鏡映による O の像を O_2 とすると、$OB \parallel PO_2$, $\angle OPB = \angle O_2PB$。

したがって、$\angle APB = \frac{1}{2}\angle O_1PO_2$。

一方、$\angle O_1PO_2$ は $\angle AOB$ を $\overrightarrow{OP}$ によって併進したものと見ることもできるので、$\angle O_1PO_2 = \angle AOB$。

したがって、$\angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB$。

二等辺三角形の性質を使う点は教科書と同じであるが、二等辺三角形を底辺に関して鏡映することによってひし形の性質が使えるようにするところにポイントがある。鏡映や併進も登場し、これまでの学習内容の応用としての意味をもっている。この証明は、中心 O が円周角 APB の内部にあるか外部にあるかあるいは角の辺上にあるかに依存しないのであるが、外部にある場合に上と同じ証明をすると線が多少複雑になり、先ほどと同じ程度の簡潔性は得られない。そこで、図 1 のような教具を用意するとよいだろう。

これは、アルミ製のパイプに糸を通して連結させたものである。OA, OB, OP が円の半径であり、どれも 10 cm の長さにしてある。それらの鏡映像である O_1A, O_1P, O_2B, O_2P も 10 cm である。

図 2 のように中心角 $\angle AOB$ を固定した上で円周角の頂点 P を動かすと、四角形 OAO_1P, OBO_2P も変化する。しかしいずれの四角形もひし形であり続ける。これにより、点 P の位置によらず円周角が等しいことがわかる。点 P が連続的に移動する様子を見せることによって、中心 O が図 3 のように円周角の辺上にある場合や図 4 のように円周角の外部にある場合にも最

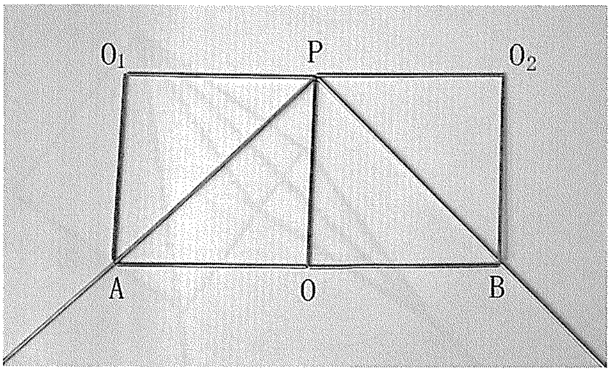


図 1　円周角の定理のイメージ教具

初の証明が適用可能であるという理解を、助けることができると思われる。

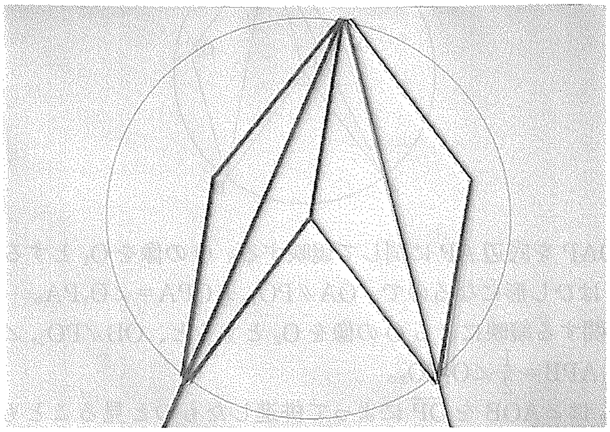


図2　中心Oが円周角の内部にある図

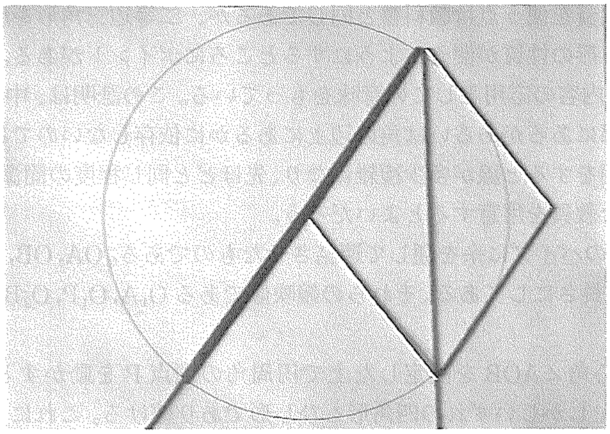


図3　中心Oが円周角の辺上にある図

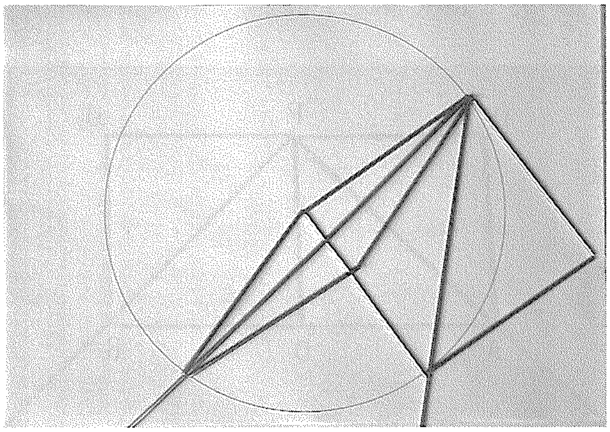


図4　中心Oが円周角の外部にある図

4 「円の幾何学」の解説と授業の展開

問題1は、ある定点から円に対して引ける接線の本数を問う問題である。円の定義は、第二単元ですでに説明している。この問題では、円外の定点から二本の接線が引けることを公理とする。定点を円に近づけ最終的には円周上に定点をとったとき、二本の接線は一致して一本になる。またこのとき、接線は、その接点を通る半径に垂直になることも確認しておきたい。接線を引くことができない点 P_5 を円内にとってある。これは、数学において必要な、あらゆる場合を尽くして考えるという習慣を身につけてもらうことを狙ったものである。

問題2は、三角形が与えられたときに内心を求める問題である。二つの内角の二等分線の交点が求める内心になる。内心が内角の二等分線上にあることは、問題2の上の図と公理1から導くことができる。

点Aから内接円に対して引いた二接線の接点をP,Qとすれば、公理1(2)より、AP＝AQ。
また、公理1(4)より、∠APO＝∠AQO（＝∠R)。
そして、円の半径は等しいので、OP＝OQ。
二辺とその間の角が等しい三角形の合同条件により、△APO≡△AQO。
よって、∠OAP＝∠OAQ。

この説明では、三角形に内心が存在することを暗黙の前提としているが、これは可能な前提であろう。直線AB,AC双方に接する円をいくつも描けば、その中にBCとも接する円が一つあることは納得できると思われる。この前提を承認すれば、三つの内角の二等分線が一点で交わることも自明の定理となる。

「1.2 円と弦と弧」では最初に弦・弧・中心角を定義する。「弧AB＞弦AB」と、弦ABの垂直二等分線が円の中心を通ることを確認しておく。後者は、二等辺三角形の性質（底辺の垂直二等分線は頂点を通る）と同じである。

問題3は、弦と中心角の最大値、最小値を求める問題である。(1)は直径である。(2)は扱いが難しい。弦の定義は、「円と直線が二点A,Bで交わるときの線分AB」であった。「二点A,B」という場合は異なる二点A,Bと考えるのが普通であろう。そうすると「一番短い弦」は「存在しない」が正解となる。しかし、弦AAや弧AAをまったく考えてはいけないわけではない。零角は存在するのに、もしも弧AAを認めなければ零角になる中心角が存在しないことになる。このあたりは子どもの討論にまかせて、弦AAを考えればそれが最短の弦であり、考えなければ最短の弦は存在しないとまとめたい。(3)は、弧ACを劣弧に限定すれば、ACを直径とする中心角（平角）が最大となる。ただし、優弧を考えてもかまわないので、その場合は(2)と同様に最大の中心角が存在するかしないかは議論になるだろう。(4)も同様である。

問題4は、円の一部から中心と半径を求めて円を復元する問題である。円の中心は任意の弦の垂直二等分線上にある。したがって、平行でない二つの弦をとり、それぞれの垂直二等分線の交点を中心とすればよい。二つの弦は必ずしも同一の弧上にとらなくてもよい。ある弧上の一点から別の弧上の点へ引いた線分も弦である。円周上の任意の二点を選んでよいというところに、円の対称性が現れている。この問題の第一の学習ポイントはここにある。そして、第二の学習ポイントは、任意の三点があれば二つの弦を引くことができ、円を復元することが可能であるという認識を形成することである。点と見間違いそうな短い弧を残しているのは、「弦が二つあればよい」という認識を「点が三つあればよい」まで進めるためである。そうすること

によって、三角形の外接円が存在することとその作図方法も理解することができる。

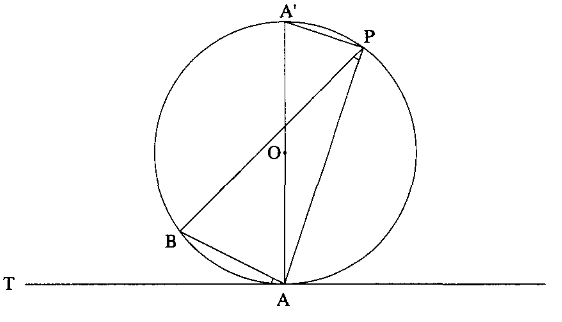
「1. 3　円周角の定理」では最初に、弧と中心角の関係、弦の中心角の関係について確認しておく。弧の長さと中心角の大きさは比例する。弦の長さと中心角の大きさは比例しない。日常では、単なる単調増加あるいは単調減少の現象のことを比例という、数学的には誤った表現が用いられることがしばしばある。弦の長さと中心角の大きさについても、比例すると考える子どもがいるかもしれない。そこで、弧と中心角の比例するという関係との比較のなかで、弦と中心角の関係が比例ではないことを理解させる。図は∠AOB＝∠BOC になっている。中心角が二倍になったときに弦も二倍になっているかどうかを確かめさせるようにしたい。

次の頁の問題5からは円周角の定理の証明に入る。ここでは先に解説したように、線分 AP, BP に関する鏡映を行い、ひし形の性質を最大限に利用して証明する。問題6の(1)(2)でも、先ほどの教具の表現するイメージに頼りながら同様の証明を行う。

問題7は、円周角の定理の逆である。この問題では、実は、点Qを直線 AB に関して P と同じ側にとらなければ定理が成り立たなくなる。しかし、この条件を問題文中に示すことは作為的であろう。もしも直線 AB に関して P と反対側に点 Q をとって定理が成り立たないことに気のつく子どもがいれば、幸いである。そのときにはじめて、プリントの間違いに気づかせて問題文に条件を追加すればよいだろう。そのような子どもがいなかった場合には、次頁で定理をまとめる際に注意すればよい。証明は、線分 AQ あるいは AQ を延長した直線が円と交わる点を Q′とし、∠AQB と∠AQ′B の大小比較にもっていく。この比較には、三角形の外角の性質が用いられる。そして、円周角の定理による∠AQ′B＝∠APB を介在させて、∠AQB と∠APB を比較する。

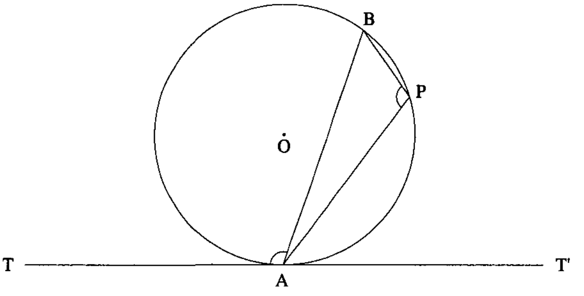
問題8、問題9、問題10は接弦定理の証明である。問題8は、∠APB が半円に対する円周角であることから、∠APB が直角であることがわかる。

問題9では、今証明した問題8を使って証明する。



中心 O に関する A の対称点を A′ とすれば、∠APA′＝∠TAA′ が成り立つ。また、弧 A′B に関する円周角の定理より、∠A′PB＝∠A′AB が成り立つ。そこで、これらの第一式から第二式の辺々を引けばよい。

問題10も、問題9を直ちに使えばよい。



点Aに関するTの対称点をT′とすれば、∠ABP＝∠T′APである。一方、∠ABP＋∠BAP＋∠APB＝平角（三角形の内角の和）であり、また、∠T′AP＋∠BAP＋∠TAB＝平角である。したがって、∠APB＝∠TABが成り立つ。

問題11は、円に内接する四角形の条件に関する証明問題である。四角形ABCDの対角線AC, BDを引き、円周角の定理を利用して証明する方法もあるが、接弦定理を用いる証明もある。対角線ACを引けば、∠ABC＝∠SACかつ∠ADC＝∠TAC。右辺同士の和が平角になるので、左辺同士の和も平角になる。

このように、接弦定理と内接四角形の条件の証明問題では、直前に証明した定理を使って新しい定理を証明するという流れをとっている。獲得した幾何学的認識を再び幾何学の世界を開拓する道具として利用することによって、数学の楽しさや定理を証明することの意義も付随的に理解されるであろう。

5 おわりに

本研究は、北海道大学教育学部教育方法学研究室数学教育研究グループの共同研究の一環である。特に教授プログラムの作成に当たっては、高橋の原案をもとに、グループの須田勝彦（北海道大学大学院教育学研究科）、村守隆男（北海道大学大学院理学研究科）、石川高行（北海道大学大学院教育学研究科博士後期課程）とともに何度も議論を重ねながら修正を加えつつ、教育内容・教材構成の論理についても検討してきた。本稿では、2001年後半にグループで取り組んできた「円の幾何学」単元について、高橋がまとめた。

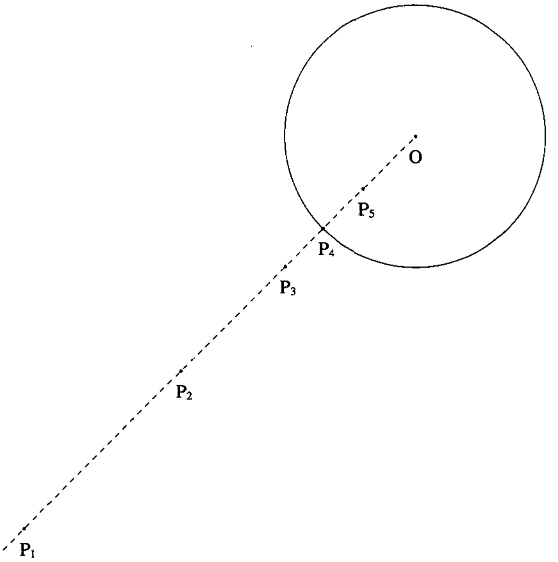
1　円の幾何学

1.1　円と直線

点Oを中心とする円のことを、円Oと簡単にいうことがある。

円と直線の交点が一点しかないとき、この直線を円の接線という。交点を接点という。

問題1. 円Oがある。



(1)　点 P_1 を通る、円Oの接線を引いてみよう。何本引けるだろう。

(2)　点 P_2 を通る、円Oの接線を引いてみよう。何本引けるだろう。

(3)　点 P_3 を通る、円Oの接線を引いてみよう。何本引けるだろう。

(4)　点 P_4 を通る、円Oの接線を引いてみよう。何本引けるだろう。

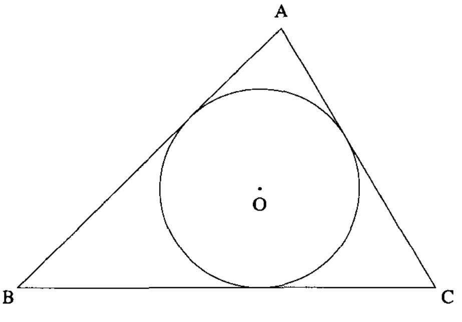
(5)　点 P_5 を通る、円Oの接線を引いてみよう。何本引けるだろう。

1

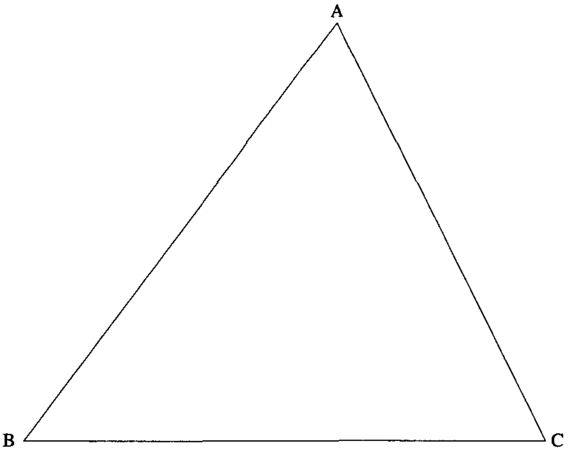
公理 1

(1) 円外の点から円へ、二本の接線を引くことができる。
(2) 円の二接線の交点からそれぞれの接点までの距離は等しい。
(3) 円周上のある点を通る接線は、一本しかない。
(4) 接線は、その接点を通る半径に垂直である。

三角形の三辺が同じ円に接するとき、この円を内接円という。内接円の中心を内心という。



問題 2． △ ABC の内接円を描いてみよう。

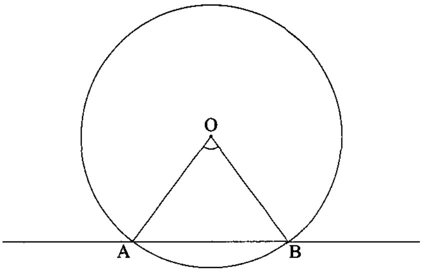


2

三角形の内角の二等分線は一点で交わる。

1.2　円と弦と弧

円と直線が二点 A, B で交わるとき、



線分 AB を円の弦という。

円 O 上の点 A から点 B までの部分を弧という。特に断りがなければ、短い方を考えることが多い。

∠AOB を、弧 AB に対する中心角という。

弧 AB の長さと弦 AB の長さを比べると、弧 AB____弦 AB が成り立つ。

弦 AB の垂直二等分線は、__________________。

問題3. 上の図で、点 A から始まる弦 AC をたくさん描いてみよう。

(1)　一番長い弦を見つけてみよう。

(2)　一番短い弦を見つけてみよう。

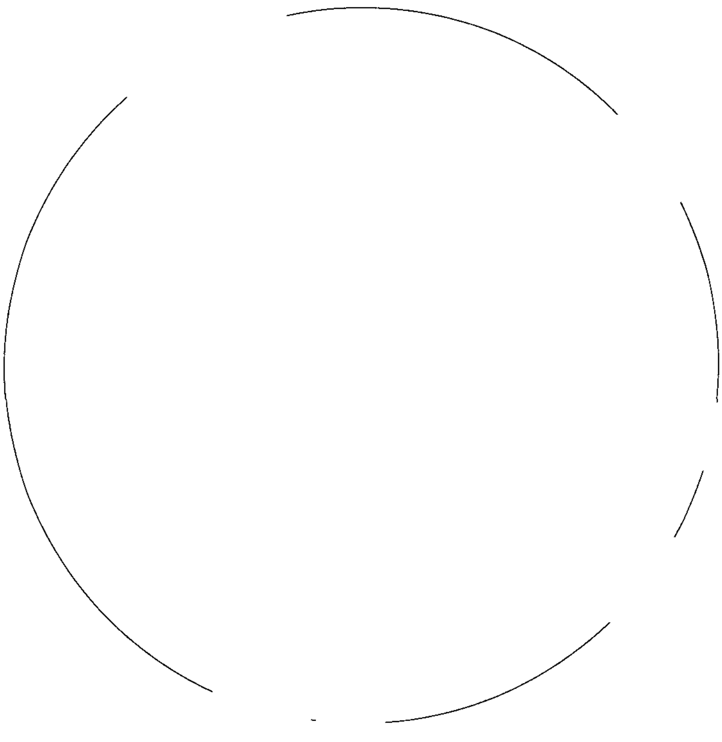
(3)　中心角∠AOC を一番大きくしてみよう。

(4)　中心角∠AOC を一番小さくしてみよう。

3

円の中心を通る弦を、直径という。

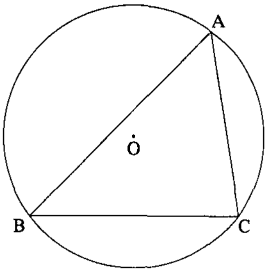
問題4． 円の一部が残っている。中心と半径を求めて、円を復元しよう。



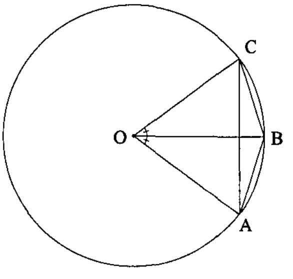
4

三角形の三つの頂点を同時に通る円を、外接円という。外接円の中心を外心という。

三角形の三辺の垂直二等分線は一点で交わる。



1.3　円周角の定理



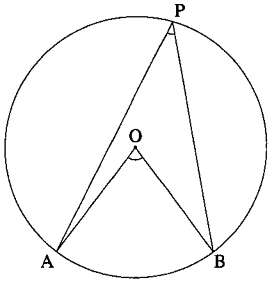
同じ円で、弦や弧の長さを変えると中心角の大きさは変わる。中心角の大きさを変えると弦や弧の長さは変わる。

弧の長さと中心角の大きさは＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

弦の長さと中心角の大きさは＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

5

円周上に弧 AB と点 P がある。P は弧 AB 上にはないとする。このとき∠APB を、弧 AB に対する円周角という。

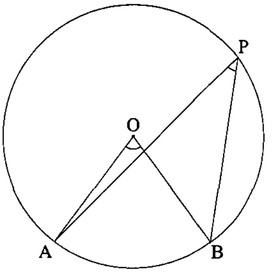


問題 5. 上の図で、 $\angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB$ を証明しよう。

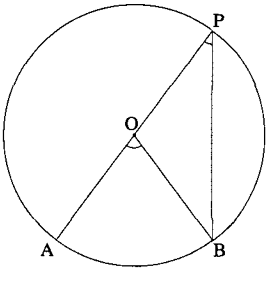
6

問題6． 下の図で、　$\angle \mathrm{APB}=\frac{1}{2}\angle \mathrm{AOB}$　を証明しよう。

(1)



(2)



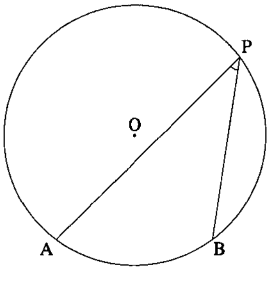
7

定理１（円周角の定理）

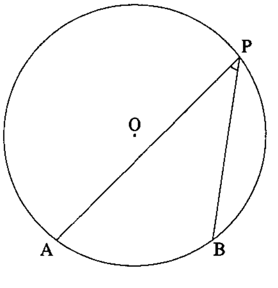
(1) 円周角は中心角の半分の大きさである。
(2) 同じ弧に対する円周角はすべて等しい。

問題７． 図のように、円Ｏと円周角∠APBがある。

(1) 円の外部に点Ｑをとってみよう。　∠APB＜∠AQB　を証明しよう。



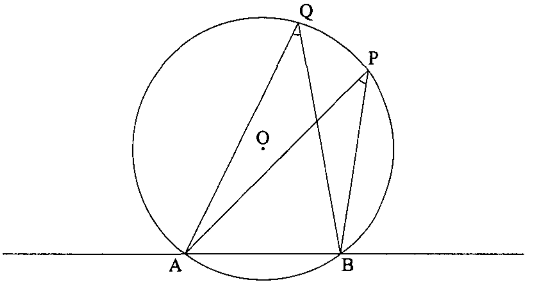
(2) 円の内部に点Ｑをとってみよう。　∠APB＞∠AQB　を証明しよう。



8

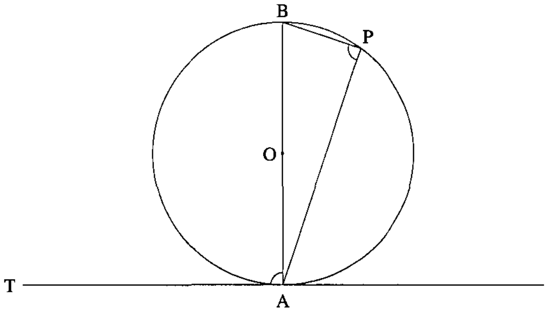
定理 2（円周角の定理の逆）

四点 A, B, P, Q がある。P, Q は直線 AB に関して同じ側にあるとする。
∠APB＝∠AQB ならば、A, B, P, Q は同じ円周上にある。



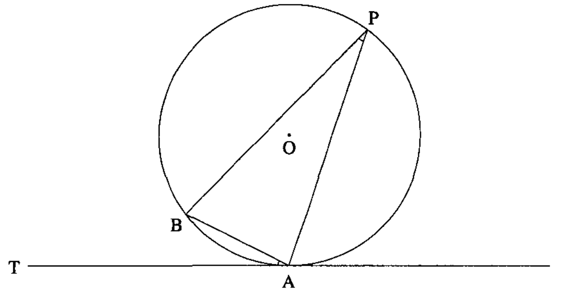
1. 4　接弦定理

問題 8. 図のように、弦 AB と接線 AT がある。弦 AB が直径のとき、∠APB＝∠TAB　を証明しよう。

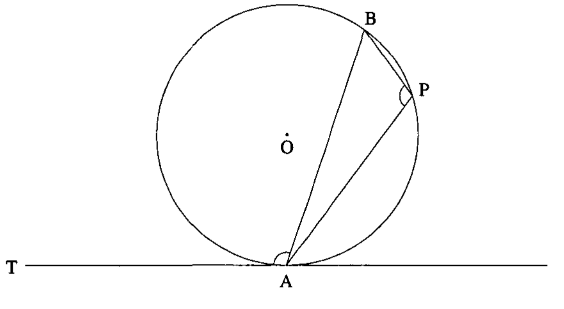


9

問題9． 図のように、弦 AB と接線 AT がある。　∠APB＝∠TAB を証明しよう。

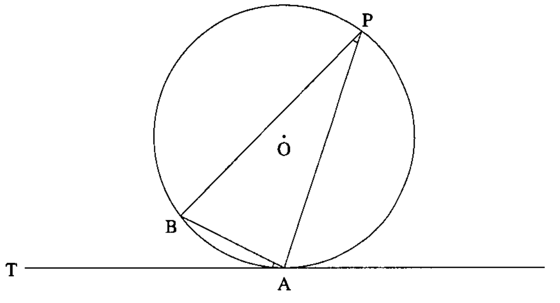


問題10． 図のように、弦 AB と接線 AT がある。　∠APB＝∠TAB を証明しよう。



10

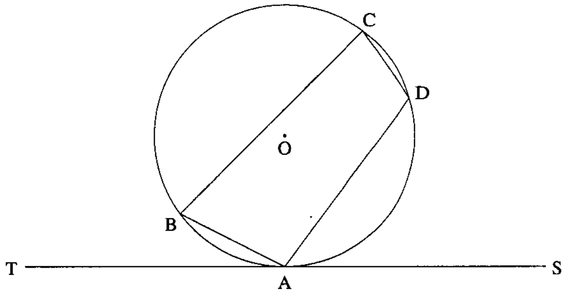
問題8、**問題9**、**問題10**で証明した定理をあわせて、接弦定理という。



定理3（接弦定理）

円と弦ABと接線ATがある。∠TABと、その内部にある弧ABの円周角∠APBの大きさは等しい。

問題11. 円に内接する四角形ABCDがある。　内角∠B＋内角∠D＝平角を証明しよう。



11

定理４

円に内接する四角形では、向かい合う角の和が平角になる。

12