中学校数学入門「単元Ⅰ　自然数と２つの演算」の小学校における実践から

須　田　勝　彦
(北海道大学大学院教育学研究科)
佐　藤　敬　行
(宮城県・多賀城東小学校)

は　じ　め　に

北海道大学大学院教育学研究科教育方法グループでは数年前から中学校数学カリキュラムの再構成の課題に取り組んできた。その中で，これまでの数学カリキュラムの不成功の原因を仮説的に抽出するとともに，再構成の方向の検討を行ない，中学校数学の入門課程における３つの単元別テキストの試案を作成した。そこで示された中学校数学のカリキュラム上の問題点は次のとおりである。

「中学校数学の入門期における不成功は次の５点が相互に関連しあって生じていると思われる。(1)「正負の数」から入ること，(2)計算のやり方，答えの出し方を指導の目標にしていること，(3)代数の導入方法が混乱していること，(4)重要な数学的事実を「小学校での既習事項」で済ませていること，(5)「証明」が不当に先に延ばされていること」

再構成の方向に関しては，次の４点からなる目標を述べた。「(1)手足のように便利な道具として文字を使うこと，(2)負の数の導入以前に，非負の数の代数的性質を示すこと，(3)非負の数と半直線の対応，数の幾何的イメージを形成すること，(4)正負及び０の有理数の量的，代数的，幾何的性質を知ること」

そしてその内容を「自然数と２つの演算」「数•量•半直線」及び「負の数とは何か」という，３つの単元別テキストの形に仮説的に具体化した。本報告に関する教育内容論的検討は，須田勝彦「中学校数学カリキュラム再構成への試み―入門期の中学校数学を中心に―第１部理論編」(『教授学の探究』第17号，2000年３月，北大教育学研究科教育方法学研究室発行)，須田勝彦•村守隆男・高橋哲男・石川高行・西崎結・平賀沙織「中学校数学カリキュラム再構成への試み―入門期の中学校数学を中心に―第２部授業案編」(同上)，須田勝彦・平賀沙織・村守隆男・高橋哲男•石川高行「中学校数学カリキュラム再構成への試み―第Ⅲ単元「負の数とは何か」の授業プログラムについて」(『教授学の探究』第18号2001年３月，同上）などを参照されたい。

この提案を受けて，佐藤は2002年１月～２月，卒業間近な小学校６年生の３クラスを対象に単元１及び単元２の実践を試みた。小論はその中の，６年１組で行なわれた単元１の授業に関するビデオテープによる記録の一部と，若干のコメントである。なお，授業記録とコメントの表記については次のようにする。

(1)　ビデオによる授業記録そのものの音声，画像の完全な再現は不可能であるし，著しく冗長である。ビデオを文字化した須田の判断により，教育内容・教材・授業過程の構成に関する研究と無関係な情報は削除する。いわゆるト書きに相当するものは（　）で示す。また，音や画像をそのまま文字化しても，たとえば「ええ」のように納得なのか疑問なのか驚きなのか，区別できないことが多い。その場合は，文字化した者の判断でト書き

に加えることにする。

(2) コメントは，須田によるものを〔コメント―須田：…〕，佐藤によるものを〔コメント―佐藤：…〕の形で表す。内容は，授業でめざしたこと，授業記録の解釈に関する判断，及びそれらに関する意見，あるいは佐藤のコメントに対する須田のコメントなどを記すこととする。

1　自然数とは

算数が嫌いだった人
算数が好きだった人
どちらでもなかった人のための
小学校算数の数学的まとめ
―したがって，中学校数学の準備―

単元Ⅰ　「自然数と２つの演算」
1　もとになる自然数
2　十進法
3　数の加法（たし算）
4　数の乗法（かけ算）
5　分配法則
6　累加と累乗
7　ふたたび十進法

単元Ⅱ　「数・量・半直線」
1　分離量と連続量
2　分数
3　十進小数
4　メートル法

2002年2月
多賀城市立多賀城東小学校6年＿組
名前 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

ver.0.16

はじめに

これからしばらくの間，小学校６年間に学習してきた算数のまとめをする。ようするに〝復習〟である。したがって，ここで扱うことのほとんどが，内容的にはこれまですでに学習したことがらである。

ただし，方法が異(こと)なる。〝算数〟ではなく〝数学〟の立場から見直す。いわば〝小学校数学〟である。だから，あたりまえすぎると思えることも，奇異に感じることもあるだろう。いずれにせよ注意深く考えてほしい。

ここで学習したことが，やがて向き合う中学校数学の学習に役立つことを願っている。

なお，このプリントでは英文字を多用する。読み方を示しておく。

$\overset{\text{エィ}}{A}(a)$，$\overset{\text{ビィ}}{B}(b)$，$\overset{\text{スィ}}{C}(c)$，$\overset{\text{ディ}}{D}(d)$　$\overset{\text{エル}}{L}(l)$，$\overset{\text{エム}}{M}(m)$，$\overset{\text{エン}}{N}\ \overset{\text{(エヌ)}}{(n)}$

$\overset{\text{オウ}}{O}(o)$，$\overset{\text{ピイ}}{P}(p)$，$\overset{\text{キュウ}}{Q}(q)$，$\overset{\text{アール}}{R}(r)$　$\overset{\text{エックス}}{X}(x)$，$\overset{\text{ワイ}}{Y}(y)$

〔コメント―佐藤：全体を通じて，淡々と，講義風に進める。内容的にはほとんど(累乗，文字使用を除いて) 既習事項なので，くどくならずに，「アタリマエ」という雰囲気で進めることが大事だろう (直観と論理の協力作業)〕

〔コメント―須田：「淡々と，講義風に」というのは，このテキスト自体が要求する授業形態では必ずしもないが，素材が「既習事項」で教育内容が代数入門というこの授業プランにはふさわしい形態かもしれない。〕

〔コメント一佐藤：自然数を「有限集合の大きさを表す数」と定義する。したがって0も自然数に含める。ここは淡々と読み進めていく。ただし，プリントには1，2，9，0しかのっていないので（あとは）板書しながら補足説明するのもよい。「これだけの数字があれば，どんな大きな数でも表すことができる」ことは，子どもたちはわかっているはずだが，それは，次節の「十進法」という位取り記数法のおかげである。そのすごさは本単元の最後にあらためて感じてくれるだろう。〕

単元Ⅰ　「自然数と2つの演算」

1　もとになる自然数（しぜんすう）

人の集まりを表す数，リンゴの集まりを表す数…などに自然数が使われる。

😄　　1（いち）

😄😄　　2（に）

😄😄😄😄😄😄😄😄😄　　9（きゅう）

そして

0（れい）

これだけの数字があれば，どんな大きな数も表すことができる。

2　十進法

人の数がこれだけになったら

😄😄😄😄😄😄😄😄😄😄　　10（じゅう）

10人に，1人ふえたら

😄😄😄😄😄😄😄😄😄😄　😄

10人に，2人ふえたら

😄😄😄😄😄😄😄😄😄😄　😄😄

10人に，10人ふえたら

😄😄😄😄😄😄😄😄😄😄　😄😄😄😄😄😄😄😄😄😄

長いから2列にしよう。

😄😄😄😄😄😄😄😄😄😄
😄😄😄😄😄😄😄😄😄😄

→😄の目や口を書くのをやめたらタイルになる。

タイルで（　　）を表して見よう。

これが10列になったら

😄😄😄😄😄😄😄😄😄😄
😄😄😄😄😄😄😄😄😄😄
😄😄😄😄😄😄😄😄😄😄
😄😄😄😄😄😄😄😄😄😄
😄😄😄😄😄😄😄😄😄😄
😄😄😄😄😄😄😄😄😄😄
😄😄😄😄😄😄😄😄😄😄
😄😄😄😄😄😄😄😄😄😄
😄😄😄😄😄😄😄😄😄😄
😄😄😄😄😄😄😄😄😄😄

T：（プリントの使い方の注意）（「はじめに」を読む，英文字の解説）

T：（1ページ配布）小学校1年のところからからやります。

C：そんなに前からやるの？

T：あっちいったりこっちいったりします。

T：人の集まりを表す数，リンゴの集まりを表す数，スウといったりカズといったりしますが，

みなさんは？

C：カズ　　T：それでかまいません。「人の集まり，リンゴの集まり…などに自然数が使われる。」自然数ってなにや？　1，2，3，4…のことです。「…」の意味ですか？

C：(聞き取り不能)

T：人っ子ひとりいれば1ですね。二人いれば2，そして数えてみたら9人いれば9，そこでなにもかいてないときは，誰もいないときは0。たとえば，マグネットがいくつありますか。

C：2，1

T：なくなっちゃった。

C：0

T：という話しですね。C：(笑い)

T：1から9，そして0，これだけの数があればどんな数でもあらわせますね。それが十進法というやつの偉大なところです。

T：10は1つの数字じゃありませんよ。1と0の2つの数字の組み合わせですね。じつはみなさん1年生のときはじめて気が付いたかと思います。

T：十人にひとり増えたら？　じゃ，そこ書いて。

C：じゅういち

T：じゅういちって，どう書いた？　いち，いちって書いたでしょう。

C：うん。

T：じゃ，ここは？

C：じゅうに。　　C：いちに。

T：いちに，ね。

T：じゅうにんに，じゅうにんふえたら？

C：に，れい。

T：ああ，すごいね。ぼくはてっきり，110（いちいちじゅう）って書くかとおもった。

C：(笑い)

T：笑わない。ばかにしてるんじゃない。

C：そういうことじゃん。

T：そういうことでしょ。9の次は10だからここにこう書くはずでしょう。りくつっぽくいえばね。

C：それはね。

T：理屈でいえばそうでしょう。だけど，位というものを考えると，お隣さんにいくんでしょう。そしてここ，なんにもなくなるんでしょう。考えてみれば，じゅうにんとじゅうにんをたしたのを20と書くのは，すごい理屈がはいっているんですよ。

〔コメント―佐藤：「20のところは110と書きたくなるね」などと話すこともいいだろう。「9列になったら90（きゅうじゅう），10列になったら100（じゅうじゅう）といいたくなるね」といったら，けげんそうな顔をしている子がけっこういた。プリントの具体例としての「ニコニコマーク」は，人がそれぞれ，人であることによって同一であり，他の人であることによって同一でないことを明示するために，100人分の顔写真などを実物として提示するのもよいだろう。〕

〔コメント—須田：札幌の三輪裕先生が中学校1年で，写真の実物を示した。「人がそれぞれ，人であることによって同一であり，他の人であることによって同一でない」という説明に対する生徒の反応は「中学校に入ったときにふさわしいメッセージのようなものとして受けとめてくれたようだった」というのが三輪先生の報告だった。〕

T：(100の説明の後) いちいちにこにこマークなんか書いてられないから，タイルでかくことにする。タイルで（　）をあらわしてみよう。いくつにする？
C：7
T：ここまできて7なんていわないで。もっと大きな数にしよう。3桁の数で行きましょう。
C：ごじゅう。
T：50は3桁じゃないのね。2桁。(桁の説明) じゃ，234をタイルで表してみよう。
C：どうならべるの？
T：やってみて。
C：ぜったいひっかけだって，これ。(しばらく作業)
T：こまかく一つ一つ100，100，30，30，30，と4を書いた例を示す。
こう書いた人？ (10人) これがパターンその1ですね。その他に？　あかりちゃん，こういう書き方をしてましたか。たとえば23は。
あかり：じゅうのタイルを2こと，1を3
T：じゅうのタイルのことを？
C：じゅうタイル。
T：本，ですよ。次はまい
T：あと，たて，よこどうでもいいですが，2こ，3こ，4このタイルを並べて書いた人は？
C：(12人挙手)
T：この書き方は，4は1のタイルが4だからいいですけど，3は1のタイルが3こという意味ではないですね。2は1のタイルが2こ，という意味ではないですよ。だからこのかき方は間違いです。ここまで話ししたら，かけますね。(作業)
T：(1枚＝10本＝100，の説明)
〔コメント—須田：タイル表示の部分は記録を省略したが，子どもにとってそれほど自明ではないと思われた。〕

2　加法の素過程

3　数の加法（かほう）（たし算）

3.1　加法（たし算）とは？

ものの集まりが２つある。{😄😄😄😄😄😄}（　　）人　{😄😄😄}（　　）人

この，２つのものの集まりをあわせたら，{😄😄😄😄😄😄😄😄😄}（　　）人

これを式に書くと

加法の結果を和（わ）という。

3.2　もとになる加法

０から９までの数字があればどんな数も表せた。だから，０から９までの加法がわかれば，どんな自然数の加法もできる。まず，加法九九の表を作ろう。

$1+1=$　　　$1+2=$　　　$1+3=$　　　……

$2+1=$　　　$2+2=$

⋮

⋮

$9+1=$　　　……　　　$9+9=$

やさしいけど，大切な加法

$2+0=$　　　{😄😄}＋{　　}＝{😄😄}

$7+0=$　　　$0+4=$　　　$0+9=$　　　$0+0=$

A がどんな自然数でも

$A+0=A$　　　$0+A=A$

3.3　もうどんな加法もできる

＋　　　＝

【練習】

2

〔コメント―佐藤：乗法九九は馴染み深いが，加法九九はこれまで意識してこなかっただろう。本プランでは，加法と乗法は量的な意味は違うがほとんど同一の性質を持っていることを意識的に対比させながら強調していく。最初に扱うのが「０から９までの加法・乗法がわかれば，どんな自然数の加法・乗法もできる」ということ。「やさしいけど，大切な加法」も読みながら空欄を埋めていく。まとめとして文字が使われる。難しいとは思えないが，一応「A とは，例えば２や７や９や０のこと，そのほか自然数ならなんでもいい。「どんな自然数でもいい」ということを式で表現するために，あえて文字を使うのだ」などの解説をしてもよい。文字は今後多用していく。「使いながら慣れていく」ことが大事だと思う。〕

（２ページ配布）

T：(加法の説明とともに，減法，乗法，除法ということば，和差積商ということばを説明)
T：式でかくと？
C：６たす３は９
T：ぼくはこれに対していつも不満をいってましたね。何ですか。
C：ひと
T：そうですね。なくてもいいんだけど，単位をつけたほうがいいですね。
T：掛け算と同じように，たしざんも，１桁同士のたしざんがあればいいんです。足し算の九九をいってください。
C：(１＋４＝５から１＋９＝10までをいう。)
T：この…の中にはそれまでが含まれてるんですね。
T：今度はたてに行ってください。
C：９＋１まで
T：９＋１から横に呼んでください。
T：２＋０は？　　C：２
これはどういう意味ですか。(図に書く)
C：(２＋０から０＋０まで答える)
T：なんもないのと，なんにもないのをたしても，しょせん，なんもない。
C：(笑い)
T：Aがどんな数でも，A＋０は？
C：０　　C：A　　T：０＋Aは？　　C：A
C：(小声で，「わかんない」)

〔コメント一須田：「わかんない」はひとりの子どものつぶやきである。代数法則を文字で表すことがはじめてなのだから当然の反応であろう。この時点でわかったつもりの子どもも含めて，先の佐藤のコメントにあるように「使いながら慣れていく」ことが大事である。〕

T：(２ページ最後の問題) Aは，どんな数でもいいんですよ。258でもいいですよ。もうどんな数でもできます。何がいいですか。
C：３＋４
T：それはもうやったんです。今はもっとでかい数。
C：213＋324
T：じゃ，これでやってください。　　C：537
T：練習１は，298＋367にします。こたえは？　　C：665
T：まえの問題との違いは？　　C：繰り上がりがある。
T：そうですね。みなさんはけっして１の位に15とは書かなかった。「十になったらお隣さん」の原理を使ったんですね。みなさんは，２年段階で，どんな大きな数でもたしざんができることを学習したんです。

3　加法の代数的性質

3.4　加法の交換法則

加法はものの集まりをあわせた結果だから，
236＋142　も　142＋236　も同じ数になる。

（　　　　）＋（　　　　）　も　（　　　　）＋（　　　　）も同じ数になる。

どんな数であっても，
$A+B=B+A$
これを，**加法の交換法則**という。

加法の交換法則を使って，加法がまちがいないか，確かめることがある。
537＋386＝923　　　　386＋537＝923　　　　OK

【練習】１の加法を，交換法則を使ってたしてみよう。

3.5　加法の結合法則

３つ以上の加法も考えることがきる。
$(A+B)+C$　　　　$A+(B+C)$

加法はものの集まりをあわせた結果だから，どちらも同じ答えになる。
これを，**加法の結合法則**という。
加法の結合法則を使って，$A+B+C+D+E$ のようなたくさんの数の加法を考えることができる。

3

T：（３ページ配布）（例を説明後，（　）＋（　）＝（　）＋（　）を板書）好きなのいってください。
C（結城）：200＋300＝300＋200
C：368＋136＝136＋368
T：はい，このふたりの真似をしないで，みなさん書いてください。（考える）
いれてはいけないペアがありますね。
C：おんなじの。

〔コメント―須田：加法交換法則を示すときに，子どもに任意の数を言わせ，その数で確めている。この方法は効果的だから，０の性質のところでも使うべきだった。加法交換法則の例示で，「入れてはいけないペアがありますね」という問に直ちに反応した子どもがいた。理解の深

さを示しているが，「入れてはいけない」わけではない。〕

T：そうですね。ちがう数を入れてください。これを加法の交換法則といいます。
T：(結合法則の部分を読む) 好きな数を3ついってください
C：5，3，8
T：こっちは，(5＋3)＋8，こっちは5＋(3＋8) ですね。こっちは16ですね。こっちも16ですね。この集まりとこの集まりをあわせたのに，この集まりを加えたんですね。こっちは…だからおんなじなんですね。
ここに何が入りますか。(等号で結ぶ) (法則の説明)

4　自然数の乗法と代数的性質

4　数の乗法（かけ算）

4.1　乗法（かけ算）とは？

(かけ算のことを乗法という。同様にひき算を減法，わり算を除法という。それぞれの結果を積，差，商という。)

同じ数の「ものの集まり」がいくつかある。
i）{　}　{　}　{　}
ii）{　}　{　}　{　}　{　}　{　}
(*A*) 一つの「ものの集まり」あたり，いくつの「もの」(ケーキ，傘) があるか，
(*B*) その集まりがいくつあるか，
がわかれば全体の個数（*C*）が決まる。
i）$A=4$，$B=3 \to C=$（　　）
ii）$A=3$，$B=5 \to C=$（　　）

4.2　乗法の交換法則

i）をたてに並べて {　}
{　}
{　}
左はじのケーキは　{　}
左から2番目のケーキは　{　}
左はじから3番目のケーキは {　}
右はじのケーキは　{　}
と考えると　A(1あたり)=3，B(いくつ文)＝4　となる。
同じケーキの集まりをちがう見方で見ているだけなのだから，4×3 と 3×4 は同じ数だ。
タイルで考えると

（　）×（　）も（　）×（　）も同じ数になる。

A，*B* がどんな数でも
$A\times B=B\times A$
これを**乗法の交換法則**という。

4

〔コメント―佐藤：同じ大きさ（A）の集合がいくつか（B）あるとき，それらの合併集合の

大きさ（C）を求めるものとして自然数の乗法を定義する。乗法の交換法則は，もとの集合を作り変えることによって確認する。（ⅰ）において，最初のケーキ全体の個数は４×３（12ではない）であるが，作り変えた後の個数は３×４となる。〕

T：（４ページ配布）いよいよ２年生に行きます。かけざんですね。（プリントを読む。ケーキ，かさの絵を板書，説明）（ローマ数字の説明）
　A＝４，B＝３，Cは？（Cが何かを説明せず）　　　C：？
T：結局ケーキはなんぼあった？　ということ。
C：12
T：なんで12ってわかったの？
C：４＋４＋４
T：それで12。ふたつめ，A＝３，B＝５，ですからCは？
C：15
T：どうして15ってわかった？
C：５たす５たす５
T：そう。たし算を使ったの。
T：で，かけざんについても，やっぱり交換法則がなりたちます。交換法則ってなにかな。これをたてにならべると，こうなりますね。左端のケーキは何個ありますか。
C：３こ
T：左から２番目のケーキは。
C：３つ。
T：こう考えるとA，１あたりはいくつですか。
C：３
T：そしてB，いくつありますか。
C：４
T：それで，いくつありますか（と板書）。
C：12
T：それで，こっちと，ならべかえただけでしょう。
　タイル図を書いてください。（T：こどものタイル図を板書）
　（A×Bの図で，横４縦３の型：16人，横３縦４の型：７人）
T：どっちが正解なんですか？
C：どっちでもいい。
T：そうです。２年生でかけざん九九をやった時には一あたりを縦に書きましょう，いくつ分を横に書きましょうって，やったよね。そのときは一あたりといくつ分がごちゃごちゃになると困るから，たまたま，一あたりを縦に書くことを固定したんです。いまや，どちらでもいいんです。ということが，A×B＝B×Aの意味なんです。順番はどうでもいいんです。ただし，一あたりといくつ分の区別は重要ですよ。
T：４ページ目，出してください。（前時の復習：交換法則）
　（まとめで，教師が交換法則をA×B＝B×Cと誤記）
C：先生，そこCなの？

T：ああ，ありがとう。次のところ（　）×（　）に入れてください。ご自由に。
いってください。

C：3，2，2，3

C：310，820，820，310

T：もうわかりましたね。書いてはいけないのを書いてください。

C：7，7，7，7

T：もう大丈夫ですね。それでは次ですね。次は何をやると思いますか。

C：かけざん，わりざん。

T：そうではないなあ。今やったのは乗法の交換法則，だから次にでてくるのは，

C：除法の交換法則。

T：ちがうなあ。みてみろ，たしざんのところ。

C：加法の…法則

T：いいねえ。加法の？

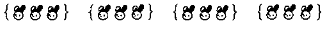
C：加法のなんとか法則。

T：加法の結合法則です。（プリント5ページ配布，読んで図を書く）

4.3　乗法の結合法則

「ウサギには耳が２本ずつある。どのかごにもウサギが３わづつ入っている。カゴが４個ある。耳は全部で何本あるだろうか。」

という問題を考える。



２つの方法で考えてみよう。

ｉ）

ⅱ）

A，B，C がどんな自然数でも，

$A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$

これを**乗法の結合法則**という。

結合法則があるから，$A\times B\times C\times D\times E\times F$　のような乗法も考えることができる。

【問】３×４×５×６×７×０　を計算しよう。

5

Ｔ：２つの方法で考えてみよう。思いついたやり方で，式に書いてください。

数えたら24本，というのはだめですよ。ここにある情報は，２と，３と，４しかないんですね。結果でたか？

Ｃ：３×２×４

Ｃ：４×３×２

Ｔ：あとは？

Ｃ：４×２×３　　　Ｃ：２×３×４

Ｃ：３×４×２

Ｃ：まだあるよ。２×４×３　　　Ｃ：もうないよ。

Ｔ：きくけどさあ，（４×２×３を示して）このかけざんどうやるの？

Ｃ：さきに，４×２

Ｔ：４×２を先にやるっていうことを表すのに，どういうしるしつけるの？

C：かっこ

T：そうだね。問題。4×2で8がでるけど，この8ってなに？

C：かごの中にある耳？

T：この問題の中では

C：ごちゃまぜになってるよね。　　C：じゃまけになってる。

C：顔　　C：(笑い)

T：顔8ってどこにあるの？　　C：(笑い) わかんないよ。

T：説明できませんね。ですからこの問題で4×2はやっちゃいけないんです。だって意味ないもん。わかりますか。

T：あ，勝手に順番いろいろやったけど，意味のないもの消していかないとだめだよ。

C：(つぶやき) 2つだけあるよ。それ（2×3×4）と，あと4×3×2

C：下がっていけばいいんだ。4，3，2　　T：(笑い)

C：2×4×3意味ないよ。

T：意味ないですか？

C：意味ないよ，それ。

C：かっこつけないと。

T：そうです。こうしてごらんなさいよ。2×(4×3)

C：それだったらできる。

T：しさん12って何ですか？

C：ウサギの数

T：そう。それに耳が2本づつだから，大丈夫ですね。そうするとだめなのは？
(4×3)×2は大丈夫ですね。ウサギの数かける耳。順番はいいね，交換法則で保証されている。

C：3×2×4は大丈夫だよ。　　C：あとはだいじょうぶ。

T：大丈夫ですか。どうも，かっこつけないとだめだな。あんたたちはこうかけると思っているけど，この式ではどこから先になんて何もないんだから。(3×4)×2。こうゆうふうにすればいいね。

T：あ，あとは大丈夫なんだけど，2×3×4これの計算方法を考えてください，という問題をだし直します。かっこをどこにつけますか，という問題なんです。

T：さあ，解説します。これには（板書（2×3)×4）　2×3はなんですか？

C：ひとつのかごの耳の数。

T：かける，かごの数，ですよね。これに対して，(板書2×（3×4)）3×4というのは？

C：ウサギの数。

T：そうですね，それに，一匹あたりのウサギの数をかける，という意味になります。つまりここから，こういうのを，3口のかけざん，っていうんだろう。2や3や4でないとだめなんですか？　2867と2689と58722ではなりたたないんですか？

C：いや。

T：そうでしょう。だから，どんな数でも（板書（A×B)×C＝A×(B×C)）結果は同じなんだよ，ということなんです。これが乗法の結合法則といいます。じつは，このことが分かっているから，だからA×B×C×D×Eなんてなんて計算ができるんですよ。では5ページの

問，計算してください。答えでましたね。

C：れい。

T：みんないっしょけんめい計算してたよ。タイチはなんも計算しない，悪いやつだね，そうか？

C：計算の必要がない。

T：気がつきましたか？

C：ああ。　　　C：わかった

T：気がつかないで最初から計算したひと？（18人）

T：これはお遊び問題，最後まできちんとみてから作業にはいろう，ということです。でもね，0は注意してくださいよ，っていう意味なんです。

C：(数人) ああ，わかった。

T：いいよ，いまわかったのでもいいよ。ここで，ひっかかることは，0に対して尊敬をはらうことになりますね。ですから，意地悪でみなさんをばかにしたいのではなくて，

C：(聞き取り不能)

T：そうなんです。0と1には気をつけろ，なんです。じつは，このあと0と1がちょこちょこちょこちょこでてきます。十分気をつけてください。

〔コメント―須田：6ページで，教師の誤記を指摘している。誤記への反応は子どもが理解していることの重要な指標となりうるだろう。乗法結合法則に関係する2，3，4という数の順序に関して，様々な場合を考える場面は面白い。順列の問題であるが，このような課題に子どもたちは予想以上の興味を示した。特に「もうないよ」という発言が印象的である。形式的な順序を考えた上で，量的の世界にもどる，という筋道をたどったことは効果的だったと思われる。なお，量的意味があるかどうかは，この授業以外の解釈もありうるだろう。また，交換法則と結合法則からの帰結として，たとえば A×B×C×D×E＝E×A×D×C×B のようなことも意識させることも考えられる。〕

5　加法と乗法

5　分配法則

5.1　分配法則とは

次の問題を，２通りの方法で求めて見よう。

「生徒が１列に４人ずつ，女子は５列，男子は３列並んでいる。生徒は全部で何人いるか。」

ｉ）

ⅱ）

A，B，C がどんな自然数でも

$$A\times(B+C)=(A\times B)+(A\times C)$$

が成り立つ。これを，**分配法則**という。

【問】上の問題のように，分配法則が成り立つことを説明できるような問題を作ってみよう。

乗法は交換法則が成り立つから，

$$(B+C)\times A=(B\times A)+(C\times A)$$

5.2　乗法先行の原則

「一つの式に加法と乗法が混じっているときは乗法を先にする」

という約束を**乗法先行の原則**という。

(1)　乗法先行の原則を使って次の計算をしよう。

３＋２×５＝　　　　　　４×５＋３＝

(2)　乗法先行の原則を使って分配法則を書いてみよう。

6

(1)　分配法則

Ｔ：(プリント６ページ配布)

結合法則のあとに出てくるのは分配法則です。(読む)

式を書いてください。１あたりを先に書くようにしてください。それでもなおかつ２通りかけます。(タイル図を板書) ここに出てくるのは４と５と３だな。どういう式になった？

Ｃ：(５＋３)×４

Ｔ：なるほどね。えーと，さっき先生がした注文からはちがいますよね。結果はいいんですよ，ここはこれで正解出る。さっきの注文は，いろんなパターンがでてくるから，１あたりを先に書きましょう，って云うことでした。

(テープ切れて中断)

（分配法則の２種の式及びタイル図が板書してある。）

T：ではじめます。分配法則。要はこうだよな。（２種の式を等号で結ぶ）つまり，タイル図を手がかりに（分配法則を板書）これが，４や５や３でなくても成り立ちますね。これが８になっても，ちょこっとのびるだけ。だから，これを文字を使って表せば，（左辺を板書し右辺を子どもに言わせる）いい？

C：うん。

T：ここで，たとえば（いまの問題を読む）こうかけばまるをもらえるんですね。ただし，同じ問題かいてもつまんないですよ。

C：じゃ…。

T：やす，お前の考え分かった。生徒が一列に８人づつ，女子は９列，男子は13列ならんでいる。全部で何人いるか，だろ。だめだよ。数字を変えるだけでは。

T：別な場面で

C：環境を変える。

T：この説明ができるようでなければ。

C：（小声で）先生が一列に…

T：（机間巡視）いいですね，青森産のリンゴと宮城産のリンゴ…。

C：あ，俺と同じだ。ぱくったな。

T：あかりちゃんのはですね，積み木ですね，一列に，３個づつ，赤い積み木を８列，

C：なんてかわいらしい。　　　C：あかりちゃんみたい（笑い）

T：（タイル図を書きながら）青を２列，並べた。積み木は全部で何個？
あと，自信ないけどできたっていう人は？　　　C：自信ある。

T：（読む）リンゴが１箱に６個づつ，ずいぶんちゃっこい箱だな。青森産が３箱，宮城産が４箱。リンゴは全部で何個？　いいですね。（板書）

T：リンゴが一箱に５個，青森産の箱が４箱，福島産の箱が５箱ね。

C：１つ違いじゃん。T：お前ら，気持ちが通じ合ってるな。

T：（読む）本が並んでいます。一列に３つ。漫画が10列，ハリー・ポッターの本が10列。
（笑い）タイル図いいねえ。あと？　ヤスは，コインが100円で15枚づつ，200円使い終わり，300円使い終わりました。全部で何枚使いましたか。気持ちはわかりますよ。
100円単位のタイル図，ちょっと気になるけどいいな。
合格通知の手紙は１つの封筒に２枚，女子に４通，男子に６通，ひとりで何通ももらってどうするんだ，って話しもあるけど…

C：むずかしいな。

T：これは気持ちわかるけど，ありえないな。

T：あるペットショップでは犬のコーナーと猫のコーナーが一緒になっている。３匹の犬が入ったケージが１列に６つ並んでいて，３匹の猫が入ったケージが一列に４つ並んでいる。これは難しい。こういう問題ですね（タイル図）。

T：それでは，まだ書いてない人はいままでの中で誰かのまねして書いてください。

T：それでは，この問題の次のところ読みますよ。

T：そこで新しいこと，新しいことではないね，４年生の時やってる。乗法先行の原則。
（読んで説明）

そのルールを使って，３＋２×５，４×５＋３を計算してください。
Ｔ：聞きます。最初のほう，25になった人？　13になった人？（全員挙手）
Ｔ：ふたつめ23になった人？（全員挙手）32になった人？
はい，みなさん正解ですね。
では，カッコ２。余計なカッコをとって，書き直してください。
Ｃ：文字で書くの？
Ｔ：うん。分配法則をまとめたのがこの式ですからね。Ｃ：数字でかくの？
Ｔ：なんで？　数字で書くの？
Ｔ：あんた何書いてるの？
Ｃ：英語で,ってこと？
Ｃ：いるカッコはいいの？
Ｔ：数字で書きたいの？　べつにいいですよ。いらないカッコをとりましょう。
Ｃ：かっこつけたしてもいいの？
Ｔ：つけたすの？　いいよ。
Ｃ：(黒板にでて右辺のカッコを消す。)
Ｔ：というふうに考えた人，どれくらいいますか。多数挙手
Ｔ：(右分配則を板書説明，ただし右辺をＢ×Ｃ+Ｃ×Ａと誤記)
Ｃ：ＢＣだよ。　　　Ｃ：文字が違う。
Ｔ：あ，間違ってるね。

(2) 乗法のアルゴリズム

Ｔ：次行こう。（７ページ配布）

5.3　もとになる乗法

０から９までの数字があればどんな数をも表せた。０から９までの乗法がわかれば，どんな自然数の乗法もできる。

(1)　まず，乗法九九の表を作ろう。

１×１＝　　１×２＝　　１×３＝　　……　　１×９＝
２×１＝　　２×２＝
⋮
⋮
９×１＝　　……　　９×９＝

(2)　やさしいけど，大切な乗法

２×１＝　　（{　} が１つぶんで？　{　} が２つぶんで？）
７×１＝　　１×８＝　　１×９＝　　１×１＝

A がどんな自然数でも

$A \times 1 = A$　　$1 \times A = A$

２×０＝　　（{　} がなにもなくて？　{　} が２つぶんで？）
７×０＝　　０×４＝　　０×９＝　　０×０＝

A がどんな自然数でも

$A \times 0 = 0$　　$0 \times A = 0$

(3)　十進法のルールでは，

10×１＝　　10×２＝　　10×３＝　　……　　10×10＝
100×１＝　　100×２＝　　100×３＝　　……　　100×10＝
⋮
⋮

(4)　結合法則を使えば

$20 \times 4 = (10 \times 2) \times 4 = 10 \times (2 \times 4) = 10 \times 8 = 80$

7

Ｔ：たし算の時加法九九やりましたが，今度は乗法九九がでてきますね。加法九九と乗法九九は同じ程度に重要です。

Ｔ：もう点々の意味分かりますね。いってください。

Ｃ：(全部をいう.)

Ｔ：やさしいけど，大切な乗法。((2)を読んで)Ａがどんな数でも，さあ，みんなでいってください。Ａ×１は？

Ｃ：Ａ（多数)

Ｔ：１×Ａも

Ｃ：(多数）Ａ

Ｔ：Ａそのものだ。ということなんですね。もうひとつ大切なのは０です。当然，２×０

＝，なんぼですか？

C：(多数) 0

T：考え方は，(図を説明後，7×0以下を子どもに言わせる)つまり，Aがどんな自然数でも，A×0は？

C：0 (多数)

T：0×Aは？

C：0 (多数) はい，カッコ3。(縦の…を言わせる)

T：そこで，3年生のときにやった，20×4をやってみましょう。20をどう分解するんですか。20を10×2に分解するんですね。こういう計算ができるようになると，あと5分で1題でもできるかな。

(8ページ配布)

5.4　もうどんな乗法でもできる。

たてがき計算

23×6＝(20＋3)×6

　　＝20×6＋3×6

　　＝120＋18＝138

43×2＝

8

C：もったいない。

C：(23×６を説明)
(チャイム)
T：縦書き，筆算のことですが，横に書いてください。
C：おわった。
T：終わった人はこれと比べてください。
C：同じだ。
T：(縦書き２段書きで説明) ここのところで分配法則使いますね。
C：ああ。(納得)
T：ここのところで分配法則使って，計算してたんです。２桁３桁のかけざんをするってことは，ぶった切って掛け算をして，あとでたすっていうことなんです。
終わります。(テープ切れる)
T：８ページ。43×２．まず最初に，上にあるようにやってみてください。(板書　43×２)
C：できた。
T：単に43×２の答えわかればいいっていうんじゃないな。できましたか。
C：(40＋３)×２＝40×２＋３×２＝80＋６＝86
T：(縦書きを板書，横書きを見ながら)あなたたちはここ(１行目から２行目へ)で法則を使っています。何法則ですか。
T：わけてくばるんだべ。つまり，分配法則をつかっているんですよ，っていう話しです。でね，432×６をやってみてください。それが終わった人は23×45。後のほうが難しいですよ。
T：一問め終わった人どれくらいいますか？
(多数挙手)
T：まだの人も鉛筆を置いてください。一問めだけかたづけますから。
C：(400＋30＋２)×６＝400×６＋30×６＋２×６
T：したがって，
C：2400＋180＋12＝2592
T：みなさん，この計算は，(縦書き各段改行で書く)分配法則を使っているんですよ。これ(縦)の理屈がこれ (横) なんです。では２問め，できた人？　４人。もう少し時間とります。
(23×45を板書)
T：自信がないけど終わっている人何人いますか。12人ですね。もう少し時間とるかな，諦めるかな。
C：(一人) もう少し。
T：ヒントだしとくかい。使えるかけざんは，一桁のかけざんです。あた，何百とか，何十とか何千に，かける一桁もできますね。それ以外は使わないでください。
T：ケンタ君ががんばったよ。ケンタ君はこういう風にやりました。板書
(20＋３)×45＝20×45＋３×45＝900＋135＝1035
ケンタ君とすっかり同じ人は何人いますか？　20人　ケンタ君と違いますよ，という人手を挙げてください。ユイさんは？
C：(20＋３)× (40＋５)＝20×40＋３×40＋20×５＋３×５＝800＋120＋100＋15＝1035
T：はい，結果は当然同じですね。T：て，ユイさんと同じ人は？ (１人) そこで，(ケンタの方法を指して) これには問題あるのわかる？

C：あっちが難しくてこっちが簡単。

T：こっちが問題あるっていったんだよ。

C：45があるじゃん。30とか一桁じゃない。

T：筆算を皆さんするときに，45の段使ったんですか？　使わないね。
ここどうすればいいの？

C：(なおき：ケンタの3行目を) 20×(40＋5)＋3×(40＋5)

T：もうできるでしょう。みんなで

C：20×40＋20×5＋3×40＋3×5

T：ようござんすね。そうすると，…略…1035になる。

C：ずいぶんかきごたえのある計算になってしまった。

T：ここからここにくる時に一回？

C：分配法則

T：そう，分配法則使っているんだ。ところが，ここからここにくるとき，もう一回分配法則使ってるんですね。2回使わなければだめだ。それを一回でやったのがこっちですね。
一つ一つていねいにやっていったほうが分かりやすいですね。

T：ナオトはこうなってたんだよね。

C：ちがうよ。(見に行く)

T：あ，一気にほどいたんだ。ここで，分配法則，みなさん，筆算の中に潜む理屈の勉強したんですよ。中学校ではそういうことが問われる。

C：おもしろい。

T：そういってくれてありがとう。

〔コメント―佐藤：縦書き計算も示すことにより，分配法則を利用した計算が，筆算と同じ事であることを納得してくれる。234×5はほとんどの子どもができていた。23×45は半分くらいできていた。不思議なのは，分配法則を2回適用して展開した子どもは一人もいなかったことで，一気に，強引に展開している。〕

〔コメント―須田：これまでの乗法の計算が，九九と乗法に関する法則の適用から構成されていることはほぼ全員に理解されているようである。なお，2位数×2位数について，ケンタとユイによる2通りの方法がだされている。ケンタの方法は2位数×2位数を用いており，厳密には「問題ある」かも知れないが，例えば「おおまかな筋道が見える方法」(ケンタ) と「くわしい仕組みが見える方法」(ユイ)という，両者を積極的に位置づける扱いもありえたのではないか。〕

6　累加と累乗

6　累加と累乗

6.1　累加

同じ数を何こかたすことを累加という。

２＋２＋２＋２＋２　　　は　２　を　５こ　たしている。

３＋３＋３＋３＋３＋３　は　　　を　　こ　たしている。

累加の結果は乗法で求められる。

２＋２＋２＋２＋２＝２×５＝10

３＋３＋３＋３＋３＋３＝

6.2　特別な累加

１）ただ２の時も，１をたした累加と見ることにする。

つまり　２×　　＝

２）２が一つもなくても，０この累加と見ることにする。

つまり　２×　　＝

6.3　乗法記号の省略

１）Aを自然数とすると，

$A+A+A=A\times 3$　または　$3\times A$

であるが，文字で表された数との乗法は×を省略して　$3A$　と書くことにする。

（$A3$　とは書かない）

２）$B+B+B+B+B+B+B=$

３）$m+m+m+m+m=$

４）$y+y+y+y+y+y+y+y=$

５）文字で表されていない数の積では，乗法記号を省略することはできない。

６＋６＋６＋６＝６×４，×を省略すると 64　　これでは六十四と区別できない。

9

(1)　累加

Ｔ：（９ページ配布）累加と累乗に行きます。（板書）字を見ただけで，累加っていうのは，何に関係あるんですか？

Ｃ：たしざん。

Ｔ：そうですね。累乗ってのは？

Ｃ：かけざん。

Ｔ：そうですね，それが予測できますね。　　Ｃ：うん。

Ｔ：（読む）３＋（略）は？　書いて頂戴。

Ｃ：３を６こ，足している。

Ｔ：２＋（略）は乗法で求められる。どんな乗法ですか。

C：2×5

T：そうですね。そうすると，3＋(略）は？

C：3×6＝18

T：みなさん。書いてください。その次，ただ，2の時も，いっこたした累加と見ることにます。かけざんでは，2×？

C：1

T：もう1つ。2がひとつもないときも，0この累加と見ることにします。そうすると2×？

C：0

T：いくらですか？

C：0

T：やはり，1や0は気をつけろ,ってことなんですよ。簡単なようだけど，気をつけろ,っていうこと。次に行きますか。乗法記号の省略です。Aっていうのはある自然数です。5と思う人は5でいいですよ。260だと思う人は260でいいですよ。とにかくA。ここに，A＋A＋Aとありますが，このAを5のつもりって決めた人は，（2番目のAを指して）これが8のつもりだったらダメなんですよ。これは，あの書き方（累加の乗法）をすれば？

C：A×3

T：いいですね。A×3のことを，3×Aと書いてもいいですよ。そりゃ，そうだべ，交換法則成り立つんだから。乗法記号の省略っていうのは，数と文字，文字っていうのは，なんかのある数のことですよ。数と文字がはいったかけざんが出てきます。そんなときには，乗法記号,×を省略して3Aと書くことにします。ただし，A3とはかかない。数字と文字をかけるときは，数字を先に書いて，かけざん記号を省略して書きます。こういう約束をします。そうすると問題です。かけざん記号を省略して書こう，やってください。

T：(問題を板書）うえの君

C：7B

T：いままでの書き方は7×B。途中これ書いた人はどれくらいいます？　13人。僕は入れることをおすすめします。安心できないもん。それでは　　あとべ（？）君

C：5…えー，なんてよむの？

T：いい質問だね。好きに読んでください。

C：m(エム)×5＝5m

T：どきっとしたでしょう。5メートルっておもった人いるかな？　5メートルって思った人手を挙げて。13人。これメートルって考えたら間違いなんですか？

C：一緒でしょう。

T：一緒だよね。メートルが1，2，3，4，5。五つ集まれば5メートルっていうんでないの？　じつは，当てはまるんですよ。こういう書き方を2年生のときからやっていたんですよ。そうか，5メートルってこういうことだった，ね。乗法記号の省略なんてことを2年生の時からやっていた,っていう話しです。((5)を説明)

T：(配布）10ページ，またまたでてきました。しつこくこれは何回もでてくるよ。

（チャイム）

6）分配法則

$(3a)+(4a)=(a+a+a)+(a+a+a+a)=7a$

乗法先行の原則を使って

$(3a)+(4a)$　は　$3a+4a$　と書いてもよい。　$3a+4a=7a$

$5x+4x=$　　　　$6m+12m=$　　　　$3K+K=$

$3a+2b+a+b=$

$5x+2y+3z+15x+18y+17z=$

6.4　累乗

1）同じ数を何こかかけることを累乗（るいじょう）という。

$2\times2\times2\times2\times2$　　は　2　を　5こ　かけている。

$3\times3\times3\times3\times3\times3$　　は　　を　　こ　かけている。

2）累加のような簡単な書き方がほしい。

$2\times2\times2\times2\times2$　を 2^5　と書くことにする（2の5乗（じょう）と読む）。

したがって

$2^5=$　　　　　　　　$3^6=$

3）$3^2=$　　　　　　$2^3=$　　　　　　$5^2=$

$2^{10}=$

6.5　特別な累乗

1）ただ2の時も，2を1こかけた累乗と見ることにする。

つまり，$2^1=2$　　$3^1=3$　　$567^1=567$

Aがどんな数であっても，

$A^1=A$

2）2^0　はどうなるだろうか？　それはあとで考えることにする。

10

これは次の時間にやります。

T：10ページ。(3a)＋（4a）を板書　　3aってなんでしたか？

C：３かけるa

T：累加の結果をあらわしていますよ。もとにもどせば，

C：a＋a＋a

T：うん，下に書いてある。a三つっていう意味ですよね。

a×３ていうのはa＋a＋aでしょう。今，やりたいのはそこのところ最後の7aとありますが，3aと4aたして，なんで7aよ，だって，3と4とaとaたしたらさ，なんて一瞬考えてしまいますよね。3a＋4aが7aなんだってさあ。

C：えー。(驚き)

C：なにそいつ，しらねえよ。

T：aがあわせて7つあるから。累加のもとのかたちに直せばこれ（a+a+a）ですよね。そうして，4aというのは，a+a+a+aということです。たしざんの場合結合法則が成り立ちますから，カッコは無視していいしょ。結局これは，（板書していく）a+a+aそうして，a+a+a+aということですね。Aがなんぼあるのよ，ここに。

C：7こ　　C：なるほど。

T：aが7こありますよ。累加ですよ。累加だから，これはa×？

C：7

T：イコール？

C：7a

T：という説明なんです。これなんとなくね，何も知らなければ3と4とaとaで，7aaとなりそうです。

C：ええ。（駄洒落）

T：7，2aと書きたくなりますよね。そうではないんです，3aと4aたしたら7aなんです，aがそのまんまで，数字だけたす，それがなんでや，っていう説明がこれなんですよ。ただね，このカッコ必要なのか？　乗法先行の原則からいって，カッコいらないね。ですから，（式を板書）

そこで，次の練習問題があります。

T：最後まで終わった人？　3人。2番目まで終わった人？　3番目まで？（何名か不明）じゃ，やっていきますよ。これは？　あいさん。

C：9x

T：xが5つとxが4つだ。xは9つこの理屈でいいですね。ふたつめ。あかりちゃんどうですか？

C：18エム。

T：いいね，なつかしいでしょう。6メートルと12メートルたしたら18メートルだもんね。18エムですね。さあ，ここでドキッとした人何人くらいいますか？　けっこういますね。はい，はつえちゃん。

C：4K

T：世の中には3Kということばがありますが，知ってる？　3K

C：どっかの会社とか，…

T：きつい，きたない，あとなんだっけ？

C：きもちわるい

T：関係なかった。4Kと書いた人どれくらいいますか？（数不明）うん，わからなかったでしょう。聞きますよ。

C：1Kってことだ。

T：うん，9ページの，特別な累加。ただKと書いた時には，Kがひとつの時にただKと書くんです。K=1Kなんです。ここに1あってくれると4Kってわかるんですが，普通は，1Kの時にはただKとしか書きませんから。ただKとあったら1Kなんだよな。気をつけてください。いいか，0と1には気をつけろ，っていうのはここに出てくるんですよ。

〔コメント—須田：中学校数学の教科書に「1×aは1aとなるが，1をはぶいてaと表す」と

いう記述がある。理由のない「約束」のおしつけの典型例といえるだろう。aは1を省いて生ずるものではなく，それ自体として存在する。たとえば既にふれたA＋0＝AにおけるAは1が省かれたものと考える必要はない。そして1a=aはたんなる約束などではなく，1のもっとも重要な代数的性質である。文字が自然数であることから，具体的な数を入れて確めたり，またaを任意の量として線分で表して説明するのもよいだろう。〕

T：あ，(4番)，相談してください。
C：答えはひとつになるの？
T：いい質問ですね。ひとつになるのかな，ならないのかな，ということも含めて考えてください。
T：じゃ，いきます。(6人指名「わかりません」) こうくん
C：4a＋3b
T：こうなった人。どれくらいいます？　8人。ちがう人，教えてください。
C：7ab
T：なるほどねえ，こう書きたいもんね。
T：こう書いた人は？（4人）たとえばaを3にしてみます。Bを4にしてみます。
そうすると，(もとの式に代入) 24になりますね。(7abに代入して) 84です。
これでちがうことはたしかめられますね。ほんとかな，ていう時にはあてはめてみてやってみてさ，これ違うってことはわかる。理屈は別にして。こっち(4a＋3bに代入して)は？
C：24
T：いいですね。
C：(大きな声で) ああ。(わかった，の意)
T：偶然かもしれないよ。3と4だからあったかもしれないけど，3と5にしたら違うなんていうこと，あるかもしれないよ。だから，これが絶対大丈夫だってまだいえないんですよ。だけどこれがだめだっていうことはもうわかった。ちょっとこれていねいにやってみますよ。こういうときはもとにもどすの。
板書a＋a＋a＋b＋b＋a＋b　はじめカッコをつけ，次にカッコを消す)
aとb集めるよ(順番をかえて板書)。ここんところが4aでここんところが3bこれがこれ以上どうにかならないかといえば，残念ながら一まとめにできないんです。A4つとb3つ，別なものだもんね。そうするとあっちは？
C：20x＋20y＋20z
T：ですね。こういうふうになった人？（挙手数不明）わかったな。
C：(つぶやき) 意味わかんない。
T：じつはこれ，おもしろいかたちの変え方わかりますか。全部20でしょう(等号を書き込む)
C：わかった。
T：わかったの？
C：約分　　C：（笑い）
C：20＋…XYZ
T：ヒント，分配法則を逆に使ってごらん。
C：おお。　　C：60…

T：(分配法則を図で説明，a（b+c+d）を説明後）逆向きに考えてごらん。
C：ああわかった。
C：だから，20かける…C：かけざんの逆は割り算…
T：教えようか。この式でaが20，bが×（中略）とすると，(面積図)
一発で，20×（x+y+z）でいいんでないですか？
C：そういうことか。
C：じゃ，さっきおしかったんだ。
T：そう，カッコっていってたでしょう。おしかった。この問題はここ(20でくくらない式)までできればいいんですよ。
C：やった。
T：せっかくだから書いとけ。

(2) 累乗

T：累乗と板書(読む)すっかり同じパターンですね。累加と累乗。比べてくださいよ。(板書) 2を5こかけていますね。これは3を6こかけていますね。
そこで，記号の約束です。小さく上のほうにかく。2の5乗。そうするとこちら側はなんと書けるでしょうか。
T：これなんて読むんだっけ？　みやちゃん。
C：3の6乗
T：そう。なんで乗か。乗法，かけざんだから。それではみなさんは次の問題ができるんですね。(板書)これ最終的になんぼになるかも出してください。あ，2の5乗，最終的にはなんぼなの？　答え。
C：10
T：これ10なの？　　C：答えでしょう。
T：うん。
C：2の5乗だよ。
C：2が5こある。
T：あるって，どういうかたちで？
C：かけざん。
C：だから10
T：2が5こあるっていうのは，大体2＋2＋2＋2＋2ですね。
C：2×2×2×2×2だから…
T：2×5は10ですよ。2＋2＋（略）は確かに10だ。だけどいまやっているのは？
C：ああ，かけざんだ。
C：32
T：ですから，累加と累乗を並べて，区別をしてほしいんです。いい？　累加と累乗の違いを分かってほしいんです。そしたらこれは？
(テープ終了のため記録中断)
T：10ページまで行きましたね。2の0乗は，みなさんの予想は0でしたね。0乗だから0だべや，ということですね。そうすると，累加と同じ，という考え方ですね。かける0は0で

すからね。これはそのうち，何かが出てきます。

〔コメント―佐藤：別なクラスで「３の２乗は９，２の３乗は８だけど，２乗して６になる数はあるの？」とたずねてきた。脱線するが取り上げた。Ｔ：「２の２乗は４，３の２乗は９だから，２乗して６になる数があるとしたら，どれくらいだと思う？」Ｃ：「２と３の間」Ｃ：「２てんなんぼ」Ｔ：「ためしに2.5を２乗してみて」Ｃ：「（電卓で計算して）6.25」Ｔ：「てことは，2.5では？」Ｃ：「大きすぎる」Ｔ：「じゃ，2.4だったら？」Ｃ：「5.76」Ｔ：「ってことは，２乗して６になる数は？」Ｃ：「2.4と2.5の間」Ｔ：「じゃあ，仮に2.45で計算してみたら，とやっていけば見つけられるかもしれない」この日の授業はこれ以上進めなかったが話しはここでは終わらない。次の日，彼はメモ帳に2.4494897427831と書いてきた。前日からずうっと暗算または手計算で求めたのだそうだ。どうやら彼はどこかでぴったり行くのではないかと予想して，それを求めようとしたようだ。彼の結論は，「これは絶対終わらない！」であった。途中，循環しないことにも気づいていた。これだけ苦労したからこそ，「終わりも循環もしない」と確信できたのだろう。〕

(3) 指数法則と累乗の先行

6.6　指数法則

1）$(2^5)\times(2^3)$

$=(2\times2\times2\times2\times2)\times(2\times2\times2)$

$=2^8$　　　　（2^8を計算すると　　　　）

2）aやbが0以外のどんな自然数でも

$2^a\times2^b=2^{a+b}$

3）$3^4\times3^2=$　　　　　　$10^4\times10^5=$

6.7　累乗先行の原則

「一つの式に×と累乗の記号があれば，累乗を先にする」
という約束を累乗先行の原則という。

$5\times2^3=$　　　　　　$(5\times2)^3=$

$a^2\times a^3=$　　　　　　$a\times a^3\times a^4=$

7　ふたたび十進法

(1) 10，100，1000，10000　を10の累乗で表してみよう。

10＝　　　　100＝　　　　1000＝　　　　10000＝

(2) 365は　300＋60＋5

$300=3\times100=3\times10^2$

$60=60\times10=6\times10^1$　だから，

$365=3\times10^2+6\times10^1+5$

(3) いろいろな数を，(2)の方法を使って表してみよう。

11

T：(11ページ配布)指数法則。指数法則っていうのは，指の数10本だっていう話してるんじゃないですよ。例えば2の5乗なら，この5のことを指数といいます。（8の12乗を板書）これの指数は？　いくらですか。(数名に指名；回答なし)だれも聞いてなかったな。2の5乗の指数は5ですよ。じゃ，これの指数は？

C：12

T：そうですよ。だからしっかり聞いていてください。指数にはある法則があります。どんな法則か，例えば，2の5乗というやつと2の3乗というやつを掛け算することを考えます。そこに書いてあるように，もとにもどします。2の5乗を掛け算のかたちでもとにもどすと，みんなで？

C：(小声で) 2かける2かける2かける2かける2

C：暗い。

T：暗いな，２の３乗をもどしましょう。

C：(大声で) ２かける２かける２

T：正しいです。全部掛け算だからかっこはずしていいでしょう。そうするとなんのことはない。これは何乗になるんですか。

C：２の８乗

C：あー。(納得)

T：指数法則とは何かというと，(５，３，８を順に指す)

C：わかった。　　　C：ああ（納得)。

T：かけざんのかたちなんだけど，指数のところをみるとたしざんになるんですね。

けっして５，３，15 乗じゃないんですよ。指数のところはたしざんになる。これはなにも，２だとか５だとか，３のときだけに成り立つことではないですね。どんな数でもいいです。ですから，そのつぎのところに，２のａ乗かける２のｂ乗，これは５と３の時だけたしざんじゃないんでしょう。どんな数でも同じですね。不安だったら，２の 16 乗×２の７乗考えてみますか。16 こと７個のかけ算でしょう。たしたらなんぼや？

C：23

T：23 こ掛け算でつながっているってことでしょう。意味的には。ということは２の 23 乗でしょう。16 と７だけ成り立つんでないですね。どんな自然数でもなりたつんですね。こういうときに，一般性を表すために文字を使うんですね。２のａ乗と２のｂ乗をかけると，２の？

C：a＋b 乗

T：これを指数法則といいます。そうしたら，みなさんは，(3)の問題を解くことができます。あ，いくらでしょう。

T：あ，そうか。面倒くさいからいいよ。何が面倒くさいからいいよなのかわかる？　疑問に思った人いるでしょう。だれかつぶやいてた。これは？

C：３の６乗。

T：計算すればなんぼになったの？

C：18

C：ちがうよ。

T：18？　18ってかいた人？（C：いない　　　C：（笑い)）だってこれ，３かける３かける３かける３かける３かける３（板書）でしょう。

C：まぎらわしいんだよ。

T：まぎらわしいじゃなくて，この区別をしてほしいんです。いくらですか？

C：729

T：いいですか？　累加は３たす３たす３たす３たす３たす３，こいつは 18 だよね。これは３かける６です。これ累加でしょう。累乗というのは，こっちですから，ね。こっちは？

C：10 の９乗

T：これは，どうなるの？　みなさん知ってますね。10 の１乗は 10，10 の２乗は 100，こうですよ。10 の３乗は？　1000 だべ？　１乗の時には０が１個，２乗の時には０が２こ，３乗の時には０が３こつくんだね？　気がついてた人？

C：計算しなくてもいい。

T：こっち（３の６乗）は大変だったけど，こっち（10 の９乗）はかんたんだべ。

C：0を9こ。　　　T：（板書）

C：10億だよ。

T：（4桁区切りにして確める）ヤスのいう通りだな。次行きますよ。前に，なんとか先行の原則ってでてきましたね。何先行だった？

C：乗法先行。

T：そうだったね。乗法先行の原則。それは，たしざんとかけざんが混じってたら，かけざんを先にやりましょう，っていうのが乗法先行の原則でした。ここんところでは，累乗先行の原則です。（読む）え？

C：さっきの，1億だよ。だって，10からはじまるから。

T：10の1乗が10だよ。

C：わかった。

T：わかったね。

C：いまはじめてわかった。

T：いまみたいに，ストップかけるの大事なんだよ。はい，いきます。（再び読む）
（「5かける2の3乗」の式を板書）

T：（1000と40を板書）みなさんは1000と40と書いてます。それ以外の人いますか？　10000が一人。あとは？

C：10の3乗まちがった。

T：いきます。1000の人？　6人。40の人は，多いですね。説明します。（プリントの定義を読む）

C：ああ。

T：いきなり答え書かないほうがいいですよ。5かける8をプリントに書いているひと何人いますか？　いないの。途中書いていくんです。計算ってそういうもんですから。これが正解です。そういうことで，次をやってください。どうぞ。

C：先生，かっこついているときはどうするの？

T：だから，やりなさい，っていってるの。

T：1000になった人は？（多数挙手）40になったひとは？　プリントの問題ひとつやれっていうのはこういうことです。ひとつめの問題で確かめて，それをもとに次の問題に行こうということです。わかったね。

C：なんで？　　　C：（複数のつぶやき）それで40っていうのがあるんだ。

T：かっこがあるときは，ともかくもかっこの中を先にやりましょうという約束があるんですよ。だからこれは，5かける2で10，10の3乗，途中にこの式を書くんですよ。書いた人？（複数人挙手）

C：10かける10かける10を書いた。

T：それも書いていいよ。その方が安心しますね。ただし，こいつ（10の3乗の式）だけは入れてくださいね。次行きます。あとふたつ，一気にやってください。
答え（a×…の形）を板書

〔コメント一須田：中学校数学の教科書では，累乗先行の約束を教えない。約束せずに当然わかるべきことがらであるかのように扱っている。それがまちがいであることは，1000と40の双

方が子どもから出されたこの授業から明らかである。〕

C：あ，６乗ってやった。
T：６乗のひと，どれくらいいますか？（不明）（再び説明後，a を７で説明）
C：それでわかった。
T：次は？
C：a の７乗　　C：おしい
T：a の７乗の人，何人くらいいますか？　７人。他の答えの人？　さやかさん。
C：a の８乗
T：これって，ひっかかるんですね。ただの a っていうのは，a の何乗になるんですか？
C：１
T：そうだろう。（かけ算の式の板書に１乗を加える）で，ここは a の８乗。というように，間違えながらおぼえていく，そういうことが大事です。（累乗の定義式も板書）こういうふうに考えてもいいですね。次は十進法です。はい，行きます。10 は 10 の何乗ですか。
C：10 の 10 乗。
T：えっ
C：ああ，10 の１乗。
T：そう，10 の１乗ね。（板書）コウヘイ君，100 は 10 の何乗ですか。
C：10 の２乗
T：1000 は？　（沈黙）　100 は，10×10 だから，10 の２乗だな。前は 10 の何乗はいくら，っていうことだったけど，今はその逆で，1000 は 10 の何乗かっていうことだよ。何乗？
C：３乗
T：そう，０の数だけ乗。ここまでわかりましたね。そうすると(2) 365っていうのは？　300 たす 60 たす５（プリント説明）で，(3)，勝手な数で考えてもいいんだけど，後でみんなで考えるから，例えば，23456 くらいで行きますか。
C：途中も書くの？
T：自分の頭の中整理するのには書いたほうがいいね。
（机間巡視，個別指導）　終わった人？　３分の２をこえたかな。
説明します。上と同じにやりますよ。…あってた人？…大体かな？　まだ終わってない人もいた。これでまず，正解なんですが，しかしなんか，気持ち悪い。なぜかっていうと，美的センスからいって気持ち悪いんですけれども，10 の４乗，10 の３乗，10 の２乗，10 の１乗，次，何もないね，気持ち悪いね。だからここにもし，10 のなんとかって，書くとすれば，何乗って書くんですか？
C：（数名）０
T：４，３，２，１ってきたら次に０って書きたくなりますね。そうすると，美しいでしょう。
C：美しい。
T：そこで考えましょう，っていうことはさあ，10 の０乗はなんぼだって考えたらいい？
C：０
T：６かける０なら０になってしまいます。みなさん，何だと思いますか？
C：（多数）１

T：そう，これは1だと都合いいんですよ。10の0乗って，何だかしらない，でも1だと美しく書けるんですよ，この式。それじゃ1ってことにすべえ，っていう話しです。

ついでにいっとくと，2の0乗も，いいからいいから，とにかく1にすべえ，っていうこと，ね。

C：具体的な理由じゃない。

T：うん，説得力弱いですよ。じゃ，ここでおしまい。

〔コメント一須田：2の0乗は，プリント10ページの段階では全員が0と予想した。十進記数法のところでは2の0乗が1らしい，ということが自然に導かれたが，「具体的な理由じゃない」というすばらしい発言も見られた。いずれにせよ，累乗を教える以上は，1乗，0乗にふれなければ意味がないのではないだろうか。〕

(4)　十進法がなければ…その1

十進法をもたない国に行ったとする。

0から9までは同じ。

じゅう（十）は10とは書けないから A と書いて「あい」と呼ぶ。

十一は11とは書けないから B と書いて「さき」と呼ぶ。

十二は12とは書けないから C と書いて「みさと」と呼ぶ。

十三は13とは書けないから D と書いて「さとな」と呼ぶ。

十四は14とは書けないから E と書いて「ゆい」と呼ぶ。

⋮

三十五は35とは書けないから Z と書いて「こうじ」と呼ぶ。

三十六は36とは書けないから a と書いて「ともまる」と呼ぶ。

三十七は37とは書けないから b と書いて「ともよし」と呼ぶ。

⋮

七十一は71とは書けないから甲と書いて「ひろあき」と呼ぶ。

⋮

この国の加法は

Z（こうじ）$+a$（ともまる）$=$甲（ひろあき）

このようにいくらでもたくさんの数字と読み方が必要になる。

いくらでもたくさんの加法をおぼえなければならない。

(5)　十進法がなければ…その2

0と1しかない国に行ったとする。

1）{　　} は0　　　{ } は1

2）{ } は

3）

4）

これはけっこう簡単かもかも知れない。

12

T：（プリント12ページ配布）

T：昨日はどこまでいったっけ？　10の0乗の話したんだっけ？
C：した。
C：だけどなんかさあ，あとでなんかまたでてきくさい。
T：うん，あとでまたでてきます。十進法がなければ。われわれは数というものにであってから，10進法を使っているんですね。
C：うん。
T：無意識に十進法を使ってる。9の次はいちれいと書いてじゅうといっている。それは，9からひとつふえたならばひとつうえの位の新しい1だという考えです。無意識のうちにこれが当たり前のことになってますよね。99の次は100と書いてひゃくだっていうんですね。このあたりまえのことがない世界ではどうなるのかっていうことが，この十進法がなければその1です。(プリント読み，解説)
3＋A（あい）はいくらですか？
C：さとな。
T：ピンポーン。次，ここに書いてあるのではうまくいかないですね。あ，できます。じゃあね，あいとさとなとゆい，たすといくらですか（A＋D＋E＝と板書）(板書をよみながら)
C：こうじ　　C：ぜったい，こうじ
T：えーとおれもわかんない。(文字Dを指して)これどうして「さとな」って読めないの？　さとなに決まっているでしょう。
C：笑い　　C：なんかへんな会話
T：みなさんに感じてほしいことは，あほらしくて楽しいんですが，このように，いくらでもたくさんの，(Dを指して）これなんですか？　数字ですよ。数字と読み方が必要になって，加法九九の世界なんかなんの役にも立たない，全部の加法を憶えなくてはいけないという不便なことになります。という話しが十進法がなければその1です。いかに十進法がすごいかを感じてほしいのが，その1です。

〔コメント―佐藤：9より大きな数の名には，同学年の子どもの名を用いた。〕

T：その2，十進法がなければ。10進法がない，そして0と1しかないんだってさ。で，0っていうのは何もないってことでしょう，1っていうのはひとつだけあることでしょう。それが，どうなるんでしょうね。
2）これどうかくの？
C：いちいち
T：うん。(板書)
C：で，3は，いちいちいち。
T：みなさん，ようござんすか？（黒板の十進法の部分を指して）みなさん，9の次はどう書くんですか？
C：じゅう　　C：いちぜろ。
T：わかりますか，繰り上がりを使うんですね。(黒板の二進法の部分にもどって) 2は10。だから3は？(十進で) 10から1ふえたら11，だから（二進で）11．それはそうですね。(シーンと聞いている）みなさん，十進法の4は？　5は？　6は？　7は？　っていうのを二進

法で書いてください。なんて読むかはわかんないですよね。４は？

Ｃ：いちぜろぜろ。

Ｔ：はい，十進法の99のことだな，99から１ふえたら100ですね。正解ですよ。次は？

Ｃ：いちぜろいち。

Ｔ：そう。次は？

Ｃ：いちいちいち。　　Ｃ：ぜろ。　　Ｃ：いちいちぜろ。

Ｔ：７は？　いちいちいち（板書）

Ｔ：８は？

Ｃ：いち，ぜろぜろぜろぜろ。

Ｔ：ぜろが多い。(板書）ここまで，終わります。

お　わ　り　に

代数的性質の表現に文字を使用すること，累加と累乗を対応させながら説明すること，十進法の仕組みを10の冪を使って高い立場から見直すことなど，この授業の目標はほぼ達成されている。また，従来高等学校の指導事項とされている０乗も，それほど困難もなく理解されていること，累乗先行の原則の意味が理解されたことなど，現行のカリキュラムに対する重要な問題提起をなしえたといえる。今後，単元２の実践の検討，中学校での実践記録の作成と検討，第４単元としての「証明」の指導プランの作成などの課題に進みたい。