中学校数学入門「単元II　数・量・半直線」の小学校における実践から

須　田　勝　彦
（北大大学院教育学研究科）

佐　藤　敬　行
（宮城県多賀城市立多賀城東小学校）

は　じ　め　に

【経過】

北海道大学大学院教育学研究科教育方法グループでは数年来，中学校数学カリキュラムの再構成の課題に取り組んできた。その中で，これまでの数学カリキュラムの不成功の原因を仮説的に抽出するとともに，再構成の方向の検討を行なうとともに，中学校数学の入門課程における３つの単元別テキストの試案を作成した。

そしてその内容を「自然数と２つの演算」「数･量･半直線」及び「負の数とは何か」という，３つの単元別テキストの形に仮説的に具体化した。本報告に関する教育内容論的検討は，須田勝彦「中学校数学カリキュラム再構成への試み―入門期の中学校数学を中心に―第１部理論編」（『教授学の探究』第17号，2000年３月，北大教育学研究科教育方法学研究室発行），須田勝彦・村守隆男・高橋哲男・石川高行・西崎結・平賀沙織「中学校数学カリキュラム再構成への試み―入門期の中学校数学を中心に―第２部授業案編」（同上），須田勝彦・平賀沙織・村守隆男・高橋哲男・石川高行「中学校数学カリキュラム再構成への試み―第III単元『負の数とは何か』の授業プログラムについて」（『教授学の探究』第18号2001年３月，同上）などを参照されたい。

この提案を受けて，佐藤は2002年１月～２月，卒業間近な小学校６年生の３クラスを対象に単元Ｉ及び単元IIの実践を試みた。このとき，中学校数学入門としてのテキストを，小学校数学のまとめとして取扱うための若干の修正とともに，原案の不備にともなういくつかの修正も加えられている。単元Ｉに関する実践は「須田・佐藤「中学校数学入門『単元Ｉ　自然数と２つの演算』の小学校における実践から」（『教授学の探究』第20号，2003年３月，１～36）で報告した。小論はその中の，６年１組で行なわれた単元IIの授業に関するビデオテープによる記録の一部と，若干のコメントである。

【このシリーズ全体の目標】

中学校数学入門シリーズの目標は，全体として量に基づく数概念の構成とその演算法則に関する代数的方法による説明によって，初等教育での既習事項を高い立場から確認し，中等教育の出発点をたしかなものにすることにある。どのような数学教育の立場を採るにしても，数とその演算法則に関する理解は初等教育，中等教育の全体を通して求められる。これは小学校１年生で，最初に数の概念を学び始めるときから高等学校を終了するまで，長い時間にわたって継

続される課題であり，認識発展の段階に即して螺旋的に進行するものだろう。

その過程の全体像—螺旋の形状を具体的に記述する課題—は数学教育研究の進行とともに明らかになるのだが，解明しつくされることは永久にないと予想される。それは，この課題の中に「数学とは何か」という，数学の発展とともに豊かになる問いに加えて，人間の認識とは何か，さらに子どもの認識とは何か，といういっそう豊富で，広汎な課題と結びついているからである。

私たち北大数学教育グループではこれまで，この課題に関するいくつかの理論的・実践的検討を加えてきた。小論もその一環であるが，それらを貫く研究方法論上の立場は「量に基づく数学教育の構築」の課題として表現できよう。19世紀から20世紀はじめまでの数学の発展は，量というあいまいな概念を不用とし，数学における数概念の公理的構成に成功した。しかしそれは数学教育における量の概念を不用とするものではなかった。数学教育から量を放逐することを主張した藤沢利喜太郎の算術教育論そのものにおいて，数概念の形成に量が必要であることを自明のこととしていた[1] ことは重要なことである。

このような立場から，初等数学教育と中等数学教育の接続—連続と飛躍—の具体的内容に関するひとつの提言を試みるものである。

【単元Ⅰ～単元Ⅲの目標】

数学教育研究の基本的カテゴリーとしての量を，分離量と連続量に分類する，という考えは，すでに確立されている。「量は分離量と連続量に分けられる。前者は，$0<a$ なる a の中に最小のものがある場合であり，後者はそうでな場合である。集合数…は分離量であり，長さ，重さ，時間，密度などは連続量である。分離量から整数が抽出され，連続量から分数，小数，そして実数が導き出される」[2]。実際の数学教育のカリキュラムを考えるとき，それらが単に「分類」されている二つの別な存在としてではなく「分離量と連続量の矛盾」[3] として，数学的認識発展の契機ととらえることがより有効と思われる[4]。

単元Ⅰ「自然数と2つの演算」は分離量の表現である自然数とその代数的性質を教育内容とする。単元Ⅱは連続量とその表現である実数（非負）の代数的性質を教育内容としている。さらに単元Ⅲでは対称量の概念を導入し，負の数を導入する。これに単元Ⅱまでにつくられた非負の数直線（半直線であるが）を埋め込み，中等数学教育の出発となる実数概念を形成することが目標とされる。

実数の概念はここですべて完成するものではなく，螺旋的に発展する過程のひとつに過ぎないことはいうまでもない。中学校数学における実数概念は，自然数を含みながら自然数では表

---

[1]「最初小学生に算術を教ゆるには，果実，貝殻類，運用貨幣等の実物を媒介とし，簡単なる計算に習熟せしむるは，全く臨機の方便にして，其の必要なるは勿論言うまでもなきことながら…」（藤沢利喜太郎『算術条目及び教授法』，原著1895年，復刻版1986年，教育出版センター，137ページ）藤沢は，なぜ「言うまでもなきこと」なのかは説明していない。

[2]遠山啓，銀林浩『量と構造』1971年，国土社，14ページ～15ページ

[3]静間良次「数学における連続の問題」（武谷三男編『自然科学概論』2，1960年，勁草書房，290ページ～291ページ）

[4]数学教育のカリキュラム構成に関しては，須田勝彦「量概念をめぐって」（『教授学の探究』第11号，1993年）で述べた。

せない連続量を表現する数であり，たとえば無限に続く十進小数の全体として定義づけることができよう。

1．単元IIの教育内容構成

1－1．分離量と連続量

はじめに分離量，連続量の意味を説明する。単元Iとの対比で，その直接的な意味を理解することは困難ではないと思われる。さらに連続量に関する本質的認識としての「最小の要素が存在しない」という性質にも触れるが，深入りしても実りがないことは当然だろう。しかし，直接的な意味から一歩進むと，そこに未知の世界が広がっているということの示唆は必須ではないにしても価値があると考えた。

1－2．連続量と自然数

単元Iでは自然数の累加を扱った。累乗との対比において自然数の加法，乗法の基本性質を示すためだった。単元IIではまず，量そのものの性質として加法の交換，結合法則，さらに大小関係を理解し，表現する。そして連続量の累加を考えることによって，単元Iと同一の分配法則《3a＋4a＝7a》及び，違った分配法則《3a＋3b＝3(a＋b)》が存在することをまず示し，これらの代数法則が実数に拡張できることの理解への出発点を築くことを目標としている。aやbは，ここでは任意の連続量であるが，後に（単項式，多項式の計算に関する未作成の単元）任意の実数に移行させる。任意の連続量を線分で代表させるが，任意の連続量というイメージを豊かに持たせることは容易な課題ではない。この単元だけで完結的に達成させることは目標にしていない。

このような構成方法は，量と数の関係に関して，さきに見た遠山・銀林らの「連続量から分数，小数，そして実数が導き出される」という立場の一つの具体化である。他の方法も存在する。それは「数は量の倍変換である」という立場[5]を一貫し，すべての数の性質を量の性質に帰着することである。数学としては「抽出する」とか「導き出す」（いずれも「抽象する」の意で）といった超越的思考方法が介在する説明は望ましいものではない。数の性質のすべてを量空間の公理から導く（「論理的に導出する」の意で）方が整然としていることは明らかである。

ここでそのような構成を選ばなかったのは，初等教育，中等教育のいずれにおいても，数の性質と量の性質のいずれもが未分化で漠然としたものとしてあり，その未分化さこそが数学理解の有力な助けとして働いているだろう，という仮説による。この段階で「数学に徹する」道を選ぶなら，量についての公理を明示し，その倍変換から数の全ての性質を導かねばならない。これはあいまいなものの上にあいまいなものを築く作業になりかねないだろう。

1－3．自然数と半直線

この段階における数直線の認識もまた，実数も直線もはっきりしない認識対象であり，そのどちらかを公理的に規定し，そこから他の一方を論理的に導くよりは，実数とは数直線上の点のようなもの，直線上の点の集まりとは，実数のようなもの，という認識のほうがたしかなものであろう。

---

[5]田村二郎『量と数の理論』1978年，日本評論社，参照。

まず，自然数を直線上にめもり，数直線の最初の認識とする。他の数（実数）については小数のところで学ぶことにする。ここで自然数だけをめもった半直線を「数直線」と呼ぶのは，小数のところで「実数」を定義するとき，実数の定義が他の諸々の定義（半直線，数直線，単位，原点，座標など）と混じりあって不鮮明になることを防ぐためである。

この単元における数直線の定義は，数が目盛られた直線でもなく，直線上に表された数でもなく，「数と直線上の点の対応」である。この対応が全単射であることの認識は，この単元から始まり，大学数字で完結する。

1－4．分数

分数とは，量の自然数倍（量の累加）と，その逆変換である等分の合成変換である。後に任意の実数 a，b，に対して a/b という実数も導入される（例えば2次無理数を分母／分子に持つ分数や，三角関数を含む分数式など）が，初等，中等数学教育では「無自覚的」に拡張されるのは今のところやむをえないことと考えている。この単元では分数は有理数の表現である。

自然数倍と等分変換がそれぞれ可換であるという量的事実に加えて，自然数倍と等分とが可換であるという量的事実が分数概念の有効性を支えている。分数の代数的性質のすべてはこの事実に基づいており，自然数の計算法則が分数に拡張できる根拠となっているのである。

1－5．十進小数

分数が有理数の表現であるのに対して，十進小数は実数の表現である。とはいっても，中等教育のはじめの段階で「実数とは十進無限小数の全体である」という定義がさほど有効であるとは思われず，また（収束する）無限級数の和や積を扱う方法もないのだから，演算も説明できない。下手をすると有限でも無限でも同じであるかのような，回復しがたい誤りにさえ導きかねない。

一方，「2次無理数がでてきた時に，有理数ではない数が存在すること，それを無理数ということ，無理数と有理数を併せて実数ということ」というような現行のカリキュラムが内包する「無理数は $\sqrt{2}$ のような，何か特別に例外的な数で，有理数の集合の外壁に点在するカビのような存在ではないか，という誤ったイメージ」[6] も避けるべきである。

無用な厳密さを求めず，実数の概念をこの時期にふさわしい内容で形成する方法として「数直線上の点は，十進小数を使っていくらでもくわしく近似できる。数直線上の点を表す無限に続く十進小数を実数という」[7] という定義を採用する。これによって，現行カリキュラム上の，実数の全体像が見えないこと，実数が何か特別の数であるかのような誤解を避けることができよう。

---

[6]須田勝彦「中学校数学カリキュラム再構成への試み—入門期の中学校を中心に　第1部　理論編」（『教授学の探究』第17号，2000年）25ページ。

[7]このような小数の位置づけは，ルベーグ，柴垣和三雄訳『量の測度』1976年，みすず書房）に拠る。ただし，ルベーグの主張する，分数不用論には賛成しない。

単元II　数・量・半直線

1　分離量(ぶんりりょう)と連続量(れんぞくりょう)

1.1　分離量と連続量

人の集まり，リンゴの集まりなどのように，一つ一つが分離したものの集まりの大きさを**分離量**という。

これに対して，長さや液量や重さ，時間など，つながっているものの大きさで，いくらでも小さいものがある，つまり最小のものが考えられないような量を**連続量**という。

「長さや重さにはいくらでも小さなものがある」というのは本当だろうか。宇宙のすべてのものは究極の小さなつぶからできていて，それ以上小さなものがないなら，その究極の小さなつぶの直径が最小の長さと考えられないだろうか。そのつぶの重さが最小の重さ，光(最大の速さ）が最小のつぶを通過する時間を最小の時間とは考えられないだろうか。

このような問題は物理学で研究される。今のところ，まだそのような究極のつぶは見つかっていない。数学では，いくらでも小さいものがある。という立場をとっている。

1.2　連続量と自然数

A　　　　B

上のような図形を線分(せんぶん) AB という。

線分の長さは連続量である。連続量の代表として線分の長さを考えていこう。

(1)同じ種類の連続量の加法

線分 AB の長さ＋線分 CD の長さ　は，線分 AB のはしに，まっすぐ線分 CD をつなげた線分の長さを表す。

A　　　　B　C　　　　D

A　　　　B C　　　　D

違う種類の連続量の場合は加法を考えることができない（長さ＋重さなど)。

1

2．授業プリントと授業過程，及び若干のコメント

2－1．分離量と連続量

これから学ぶ連続量について，ことばの意味，連続量を線分で代表させること，量の和が(数以前に）定義されること，を「淡々と読み進む」（佐藤敬行による授業後のメモ；以下授業後のメモからの引用を＊で示す)。

次の《授業記録１》は，連続量とは「いくらでも小さな量があるもの」ということの説明の部分である。

《授業記録１》

Ｔ：（線分を板書）これより小さい長さは考えられるか？

Ｃ：考えられない。　Ｃ：考えられる。

T：（より短い線分を下に板書）できるね。これよりさらに短い長さは？
C：考えられる。
T：（さらに短い線分を書いて）これより短い長さを考えることは？
C：できる。
T：こういう風に考えて行くと，
C：永遠にできる　　C：永遠ではないけど…
T：見えるか見えないか，はあるね。永遠なのか？永遠ではないのか？
C：（数人）永遠
T：永遠にできるっていう人？（11人）では，やがてこれ以上短い長さは考えられないと思う人？
C：え？考えられるよ
T：問題わかっているのか？どこまでいったって，もっと小さな長さがあるんだ，だから永遠にこれより短い長さはないんだ，ということにはならないって思う人？　C：（15人挙手）
T：じゃ，やがてもうおしまいっていう所に行くだろうっていう人？　C：（15人挙手）
T：おう，なんだか知らないけれども，半々で，いいですよ。これは人間が世界を考えるようになってから，永遠のテーマなんです。（プリントを読む）（原子の話）

《コメント》

これまでの学校数学は，無限の概念をほとんど放置してきた。無限を神の領域と考えたヨーロッパ思想の悪影響が残存しているためだろうか。

しかし，既に初等数学教育から無限に関する議論は可能（たとえばわり算のわり進みなど）なのであり，避ける必要は全くないだろう。授業記録においても，子どもたちは決して，考えられないわけではなく，積極的に無限を考えていることが見て取れる。

2－2　連続量と自然数

(2)連続量の累加

線分 AB の長さを a とする。

A ―――――――――― B

a

線分 AB のはしにまっすぐ線分 AB をつなげた線分の長さは………

A ―――――――――― B | A ―――――――――― B

a　　　　　　　　　a

$a+a$　とあらわせる。

$a+a$ は $2\times a$，または乗法記号を省略して $2a$（「a の2倍」の意味）と書くことにする。

【練習】 定規とコンパスを使って，$4a$，$5a$，$1a$，$0a$　の長さを図に描いてみよう。

a

$4a$

$5a$

$1a$

$0a$

ものの集まりに　{　}　を考えたのと同じように，長さも　　を考える。これをゼロ量という。ゼロ量を考えると，ゼロ量が最小の量になる。

$2a$ の3倍はどう表せるだろうか。

$3\times(2a)=2a+2a+2a=6a=(3\times2)a$

となり，量の自然数倍の計算は，結合法則を満たしている。

2

(3)量の加法の，交換法則，結合法則を長さを使って説明しよう。

交換法則……$a+b=b+a$

a　　b

結合法則……$(a+b)+c=a+(b+c)$

a　　b　　c

(4)分配法則 i) $3\,a+4\,a=7\,a$　となることを説明しよう。

a

(5)分配法則 ii) $3(a+b)=3\,a+3\,b$　となることを説明しよう。

a　　b

1.3　連続量の大小関係

a，b がどんな長さでも，$a=b$，$a<b$，$a>b$　のどれか一つが成り立つ。

（$a \geqq b$ は「a は b より大きいか等しい」ことを著す。）

3

線分の和が存在すれば，同じ量の和ａ＋ａも考えることができる。量の累加の作図は，自然数がもっとも素朴な量の倍変換であることを具体的に知ることといえよう。ここでは自然数とその代数的性質は既知として扱っている。授業者は「【練習】は問題自体は容易である。ていねいにゆっくり定規とコンパスを使った方がよいが，必ずしもそうする必要はない。目分量・フリーハンドでもかまわない」（＊）という位置づけで，授業はすべてフリーハンドで進行した。この【練習】のもう一つの重要なねらいはゼロ量の存在に気がつくことである。「０ａでは，何も書かない子と『点をボチッ』と打つ子がいた。」（＊）次の授業記録ではゼロ量の存在の認識は，プリントの「長さも　　を考える」の部分がミスプリでないことの発見として表現されている。

《授業記録２》

Ｔ：ａ＋ａというのは？（板書）

Ｃ：２ａ

Ｔ：そう，累加でしょう。次，練習，定規とコンパスを使って，とありますが，使う必要はありません。いいかげんでいいです。

休み時間に練習だけはやっておいて下さい。(テープ中断)

T：ああ，あなたがやったのは，aを決めて，1a，2a，3a，4aとしたんだな。それでいいけど，間にしるしつけた方がいいよ。(5a，1aについて板書で説明)

T：(子どものノートを見て) 0a何も書いてないぞ。C：え？

T：うん，それ正解ですね。0aというのは，aという長さが0個ですから，C：ない。

T：うん，ここになんか書いた人いますか？いいでしょう。

T：プリント読みます。…何だこれ，ミスプリか？これはミスプリで？

C：ない。

T：そう，これはミスプリではないんです。0という長さは 書いたらすでに0でないんですから。これはゼロ量といいます。ゼロ量を考えると，最小の量がありますね。ゼロ量を考えないと，どれだけでも短い量を考えることができる。

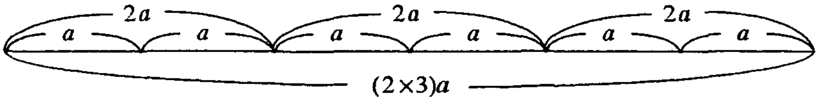


図1

T：(図1：2aの3倍を板書) これはなんだ？分りますね。こういう刻みがはいりますからね。

図からはすぐわかります。

C：6a

T：累加ですからね。2aが3つあるということ。2aの3倍どうなるかわかりますか？これが3つぶんということでしょう。6っていうのは，3かける2でしょう。なんで6なんだ？それは，さんにがろくだからさ。でしょう。どっかで見たことあるでしょう。なに法則ですか？

C：結合法則

T：結合法則そのものだね。ただしこのaというのは，きのうまでずっとやってきた自然数ではないんです。量です。ある長さです。つまり，量の自然数倍ですよ。

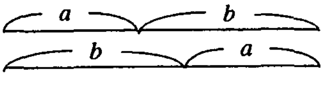


図2

T：(線分a，bを板書) さてみなさん，ここに，a+bとb+aを書いてください。なにやればいいか分る。　C：分る。

T：図は，分ればいいんです。正確である必要なない。(図2を書いて説明) こういう図になっている人？

C：(多数挙手)

T：ですよね。当たり前ですよね。線をどっち先にしたって同じだもの。

T：(結合法則) もうやめっか？長さが違う3本のひもをさ，最初にこっちくっつけて，あとでこっちくっつけるのがこれだね。これは？最初こっちくっつけてそれから，aをびたってもってくる。そんなもの同じだべ。結果は。

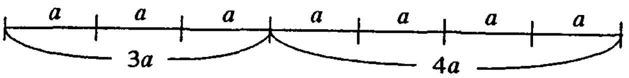


図3

Ｔ：次は分配法則。3 a＋4 a＝7 a，これが何で分配法則なんだ？(黒板に 3 ×a と 4 ×a を面積図で書く）これが，３＋４＝７で，７aっていうことですね。自然数ではタイル図で考えましたよね。

Ｔ：（線分の長さでも説明をする）同じだべ？次行きます。(板書で（５）を線分で表す。図４の上)

さっきのところでみなさんは交換法則をやりましたね。つなぐの，どっち先にしたっていいんだね。つなぎ変えます。できあがった図を見てみますと，これは？

Ｃ：3 a

Ｔ：でしょう。これは？

Ｃ：3 b

Ｔ：同じ長さになるでしょう。みなさん，図を書いてください。

Ｃ：下だけ？

Ｔ：この両方を書いたのが分配法則の説明になりますね。

分配法則 ii）の説明は図４を各自がつくることでなされた。

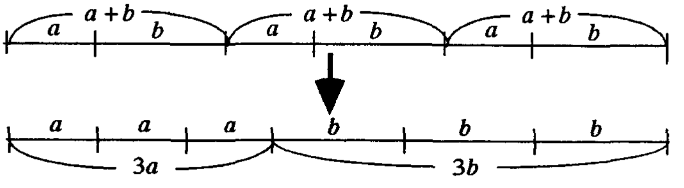


図４

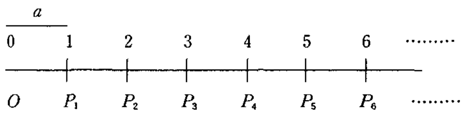
2－3．数直線

1.4　自然数と半直線

(1)ある点から始まって一つの方向に無限に続く図形を半直線という。半直線を描いてみよう。

(2)半直線を反対の方向にも無限に伸ばした図形を直線という。直線を描いてみよう。

(3)ゼロ量ではない一つの長さ a を決めれば，0 a，1 a，2 a，などの長さが決まる。o から始まる半直線の上に，この長さを区切っていけば，次ぎのように点 O から始まり右方向に無限に続く半直線の上に，点 O，P_1，P_2，P_3，P_4，……が等間隔に並ぶ。



半直線上の等間隔の点，O，P_1，P_2，P_3，P_4，…と自然数 0，1，2，3，4，…は 1 対 1 に対応する。

i）このような点と数との対応を数直線，O を原点，a を単位という。

ii）点 P に対応する数を P の座標という。

【問】点 P_1，P_2，P_3，P_4，O の座標をいってみよう。

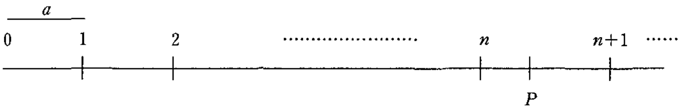
(4)半直線上の点 P がどこにあっても，ある自然数 n があって，OP の長さは次の式で表すことができる。

$na \leqq OP < (n+1)a$

また，点 P の座標も次の式で表すことができる。

$n \leqq P$ の座標 $< n+1$

この半直線上のどんな点も，どこかの目もりの上か，目もりの間にある。



4

「自然数を半直線上の点と１対１対応させる。（１）で，用紙の端まで書いていた子がどのクラスでも半数くらいいた。『そこで終わるの？』と訊ねたら，自信なさそうに『いや。でも書けない…』という反応。『紙の上では途中までしか書けないが，頭の中ではずーと続いているということね』」（＊）とまとめた。

この場面は，数学的実在が物質的な形をもっているわけではなく，想像や理想化に依存して存在している，ということが含意されている。私たち北大数学教育グループではたとえば直線や平面を導入するときに，これらがいくらでも広がっていて，ノートやプリントには書けないのだということに気づかせている[8]。

なお，プリントの「ある点からはじまって一つの方向に無限に続く」は「ある点からはじまって，まっすぐ一つの方向に無限に続く」と直すべきだろう。

[8]須田勝彦「多角形と円」(『21 世紀版　算数たのしい学習プリント』3 年，4 年，2002 年，共同文化社）参照

《授業記録3》

T：4ページ配布

C：半直線を描いてみよう。（5分ほど）さて，皆さんに質問。（ノートのページを板書して）このノートの端まで書いた人？

C：数人挙手　C：書いてはいないけど…。

（テープ中断）

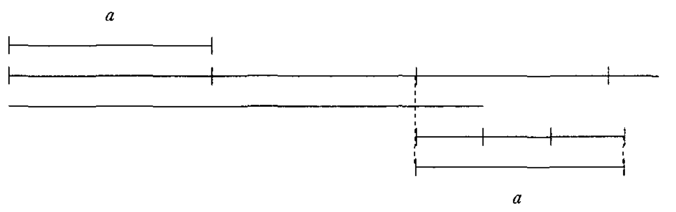
T：（線分，半直線，直線の意味の確認）

2－4．　分数の定義と半直線

2－4－1　等分

2　分数

2.1　等分



連続量を単位aの目もりではかってはんぱができた。このはんぱは3つでaになるとする。

この量をaの「3分の1」倍といい，

$\frac{1}{3}\times a$　または　$a\times\frac{1}{3}$

と書く。乗法記号を省略すると　$\frac{1}{3}a$　となる。

$\frac{1}{3}a$はaを3等分したものだから，$\frac{1}{3}a$を3倍すればaになる。これを式で書くと

$$3\times\frac{1}{3}a=a$$

となる。

【問1】$3a$という量を3等分した量はどう表せるだろう。

【問2】aを4等分，5等分，1等分した量はどう表せるだろう。

4等分（　　　）　5等分（　　　）　1等分（　　　）

【問3】$a+b$を3等分した量はどう表せるだろう。

5

「量の倍操作で自然数を定義したのに対して，まず，量の等分操作で単位分数を定義する。測定の再のはした量は『3つでaになる量』であるが，これは同時に『aを3等分した量』でも

ある。これを３分の１ａと定義する」(＊)

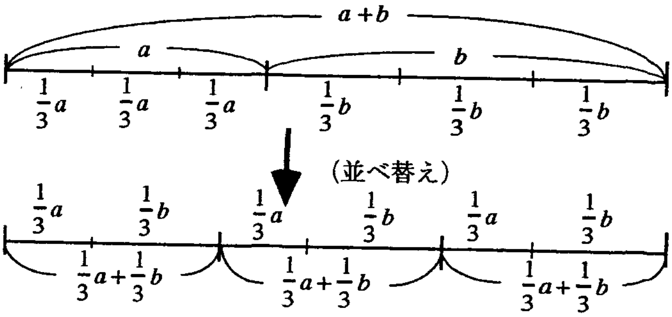


図５

【問１】 $\frac{1}{3}$(２人)，１ａ(多数)，ａ(１人)

「$\frac{1}{3}$と書いた人は，$(\frac{1}{3})\times 3a$ と書いたら正解だった」という指導がなされた。

【問２】 １等分の答えはａ，１ａ，$(\frac{1}{1})$ ａの３通り

【問３】 $(\frac{1}{3})a+(\frac{1}{3})b$(１人)，$\frac{1}{3}\times(a+b)$ (９人) $\frac{(a+b)}{3}$ (２人)

図５にもとづいて教師がどれも正解であることを述べた後，「これって何ですか？」と問い，「分配法則」という子どもの解答を得た。

2.2　等分した量の自然数倍

【問１】$\frac{1}{3}a$という量の０倍，１倍，２倍，３倍，４倍，５倍，６倍，７倍の量はどのように表せるだろう。

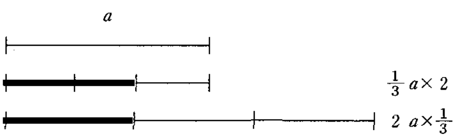
【問２】(1) $2a$という量を３等分した量はどのように表せるだろう。

(2) $3a$という量を３等分した量はどのように表せるだろう。

(3) $4a$という量を３等分した量はどのように表せるだろう。

(4) aを０倍，１倍した量を３等分した量はどのように表せるだろう。

【問３】$\frac{1}{3}a\times 2$と$2a\times\frac{1}{3}$は同じ量なのだろうか。



6

2－4－2　等分と自然数倍

等分したものの自然数倍の合成で一般の分数や整数となる分数が導かれることを具体的な例を通して考えるのが【問1】の課題である。「図6を示し，説明して行った。帯分数表示で書く子もいたが，仮分数表示でいくことにした。」（＊）

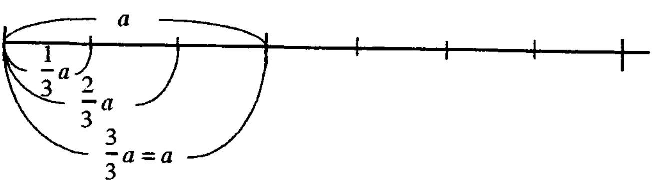


図6

【問2】は自然数倍をしたものを等分していく課題である。図7を示し，【問1】の図と対比させて2ａの3等分がａの3分の2倍であることを説明した。（4）は「ａを0倍した量はゼロ量だから，それを3等分してもゼロ。ａを1倍した量はａだから3等分した量は$(\frac{1}{3})\times a$
【問3】は，これまでも具体的に扱ってきた等分と自然数倍の可換性を確認する問題である。

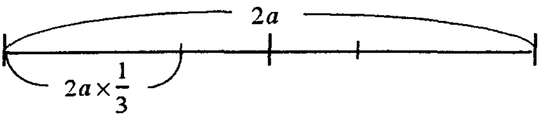


図7

2－4－3　分数

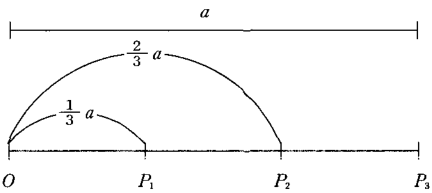
2.3　分数

a を２倍してから３等分しても，３等分してから２倍しても同じ量になった。

「２倍してから３等分」を一つの操作と見て $\frac{2}{3}$ 倍という。

「３等分してから２倍」を一つの操作と見て $\frac{2}{3}$ 倍という。

$\frac{2}{3}$ の２を分子，３を分母という。$\frac{2}{3}$ のような数を分数というう\い。



このとき，OP_1 の長さは $\frac{1}{3}a$　　P_1 の座標は $\frac{1}{3}$

【問１】(1) $\frac{2}{3}$ 倍，$\frac{0}{3}$ 倍，$\frac{6}{3}$ 倍は a に対するどんな操作かいってみよう。

(2)数直線の上で，数 $\frac{0}{3}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{3}$，$\frac{4}{3}$，$\frac{5}{3}$，$\frac{6}{3}$ を表す点はどこにあるだろう。

(3)次の分数の中で，自然数と同じ分数はどれだろう。

$\frac{8}{4}$　　$\frac{6}{7}$　　$\frac{2}{2}$　　$\frac{5}{3}$　　$\frac{15}{5}$

2.4　０等分，１等分

$a\times\frac{2}{3}$ は a を２倍して３等分した量，つまり，３倍すれば $2a$ になる量だった。

【問２】(1) $a\times\frac{1}{1}$ はどのような量だろう。

(2) $a\times\frac{1}{0}$ はどのような量だろう。

7

これまで行なってきた倍と等分の合成を一つの操作とみなして，それを分数と定義する。分数を半直線上の点と対応させること，また自然数が分数の集合に埋め込まれることもこれまでの学習から自然に導かれる。

《授業記録４》

７ページ【問１】の（２）の後

Ｔ：この問題で，自然数と同じ分数はどれ？一つは？

Ｃ：３分の３

Ｔ：ああ，そうですね。あとは？

Ｃ：３分の６

Ｔ：そうだね。以上だと思う人？

Ｃ：ちょっと待って

C：３分の５
T：え，ここ自然数なの？
C：あ，ちがう。
T：これで終わりだと思う人？
C：（挙手なし）
T：もっとあるの？誰か？
C：３分の０
T：ああそうだね。０は自然数の仲間に入れますから。世の中には入れない人もいます。自分の立場をはっきり持っていればいいんです。私は０を自然数の仲間に入れないのは不自然だと思っています。中学校の数学では自然数に入れないことになってます。

【問２】
T：また０と１の問題がでてきました。（１）は，$a\times\frac{1}{1}$は？
C：１
T：１？a×１だね。イコール？
C：１
T：１とはいわない。
C：a
T：そう，a だね。次，（２）$a\times\frac{2}{3}$は a を２倍して３等分したものだったね。
つまり，３倍すると２a になる量を$\frac{2}{3}$a というのだったね。そこで，$a\times\frac{1}{0}$はどんな量ですか？
C：a
C：１
C：あ，０だ。
T：ほかに？これを明らかにするためにこれ（問２の前にあるヒントを指しながら）があるんですよ。いいかえたら？
C：０倍すると１a になる。
T：そうだな。a を０倍したらいくらになるんですか？
C：０
T：そう，ゼロ量になる。ゼロ量がなんで１a になるんですか？ここでの結論は，うんと大切なことなの。そんなのありっこねえべ。０倍したら必ずゼロ量になる。それがこの長さになるはずがない。同じ事は，$a\times\frac{2}{0}$でもいえる。ここでの結論は，分母が０になるような分数はナンセンス，ということだ。分母が０になるような分数は考えませんよ，ということです。０と１はあぶないんです。これはずっとついてまわります。

2－4－4 倍分

2.5 倍分

分数は大きさを変えずに表し方をかえることができる。

【問１】$\frac{2}{3}$と同じ大きさの分数をたくさん見つけてみよう。

【問２】(　　) にはどんな数が入るだろうか。

$\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{6}{9}=\cdots$　　　　　　　$=(\quad)=\cdots$

$\frac{4}{7}=\frac{8}{14}=\frac{12}{21}=\cdots$　　　　　　　$=(\quad)=\cdots$

【問３】$\frac{194}{291}$と$\frac{2}{3}$の大きさを比べてみよう。

2.6 分数の基本性質

i）量 a を n 等分した量を $\frac{1}{n}a$ と書く（n は 0 ではない自然数)。

ii）(1) n 等分して m 倍した量と，m 倍して n 等分した量は同じになる。

(2)これを一つの操作と考えるとき，$\frac{m}{n}$ 倍と書く。

(3) $\frac{m}{n}$ を「分数」という。

iii）分数は，倍分することで大きさを変えずに表し方をかえることができる。

$\frac{b}{a}=\frac{nb}{na}$（$a$, n は 0 でない自然数）

8

《授業記録５》 8ページ

【問２】(問題の意味が分らない子どもが半数くらいか？)意味を理解すると 2000 ／ 3000 など，自由に解答していた。(＊)

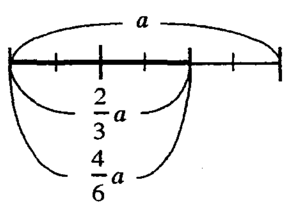


図８

【問3】　T：どうするの？
C：割り算
C：約分
T：上になんて書いてある？
C：倍分
C：291を3で割る
T：(板書で実行)うまく割り切れるんだよね。$\frac{2}{3}$＝194／291　97で，なにをしたんですか？
C：かけた。
C：通分
C：倍分
T：（倍分，約分の意味を説明）

2－4－5．分数の代数的性質

分数の定義から，代数的性質はすべて容易に導かれる。加法は同分母において定義され，分子の和なのだから，自然数の加法の可換性，結合性は明らかである。2つの分数は適当な倍分によって同分母にすることができるのだから，分数加法の各法則はそのまま成り立つ。大小比較の可能性も同分母において自明なのだから異分母においても自明である。

乗法についても，分数は自然数倍と等分の合成だから自然数の乗法の可換性，結合性によってそれぞれの法則が自然に成り立っている。除法についても，逆変換の乗法であることさえ理解すれば可換性，結合性は自明である。逆変換の乗法であることは，乗数と積が既知のとき，被乗数を求めるのは，除法でも，乗数の逆数の積でも求められることから容易に説明できる。また，等分に関しても自然数倍に関しても2つの分配法則が成立するから，分数においても成立する。そして忘れられがちである0と1の性質にここでもふれるのは重要なことである。

無論，このような代数的な説明は初めて学ぶものにどれほど有効かは疑わしい。この単元の説明は，代数的説明に先立って，量的に法則を理解している学習者に，新たな角度から見直す機会として位置づけている。

授業はやはり，この単元にとりくむ授業者の基本姿勢として「淡々と」進められた。なお，13ページのプリントには難解なことが書かれているが，授業ではまったくこれには触れず，上に述べた筋道を確認して終わっていた。

2.7　分数の加法と大小関係

(1)　分母が同じ分数の加法

$\frac{2}{7}a+\frac{3}{7}a$ は，「量 a を７等分して２倍した量」と「量 a を７等分して３倍した量」の和だから，合わせると「量 a を７等分して５倍」となる。したがって一般に，

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$$

となる。

$a+b$ は自然数の加法だから，自然数の加法の計算法則は分数の加法においてもすべて成り立つ。

【問】次の３つの分数を，小さい順に並べてみよう。

$\frac{6}{13}$，$\frac{3}{13}$，$\frac{7}{13}$

(2)　分母がちがう分数の加法

$\frac{1}{2}a+\frac{3}{5}a$ は，分母がちがうので，そのままでは計算することができない。

だが，分母を同じにすれば加法ができる。

分母を同じにするには倍分すればよい。

倍分して分母を同じにすることを**通分**という。

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{4}{8}=\frac{5}{10}=\frac{6}{12}=\cdots$$

$$\frac{3}{5}=\frac{6}{10}=\frac{9}{15}=\cdots$$

10 が共通の分母となることがわかる。

$$\frac{1}{2}a+\frac{3}{5}a=\frac{5}{10}a+\frac{6}{10}a=\frac{11}{10}a$$

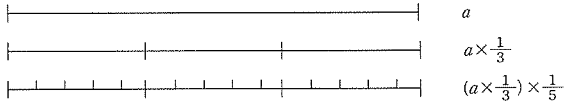
【問】次の３つの分数を，小さい順に並べてみよう。

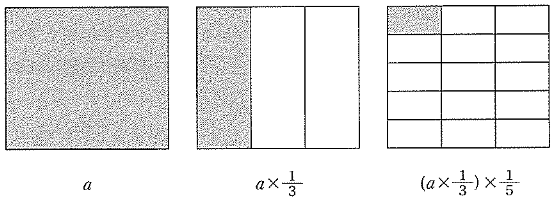
$\frac{3}{4}$，$\frac{6}{7}$，$\frac{5}{2}$

2.8　分数の乗法

自然数の乗法 3×4 は｛●●●｝×４だった。これは｛｛●｝×３｝×４である。だから，乗法の倍の合成と考えられる。そこで，分数の乗法も倍の合成と考えよう。

(1)　単位分数倍（等分）の合成





$$a\times(\frac{1}{3}\times\frac{1}{5})=(a\times\frac{1}{3})\times\frac{1}{5}$$
$$=a\times\frac{1}{3\times5}$$

単位分数倍（等分）においても次の法則が成り立つ。

（a，b は連続量，m，n は０でない自然数）

・交換法則：$a\times(\frac{1}{m}\times\frac{1}{n})=a\times(\frac{1}{n}\times\frac{1}{m})$

（m 等分してから n 等分しても，n 等分してから m 等分しても，結果は同じ）

$a\times(\frac{1}{2}\times\frac{1}{3})=a\times\frac{1}{2\times3}=a\times\frac{1}{3\times2}=a(\frac{1}{3}\times\frac{1}{2})$

・結合法則：$a(\frac{1}{l}\times(\frac{1}{m}\times\frac{1}{n}))=a((\frac{1}{l}\times\frac{1}{m})\times\frac{1}{n})$

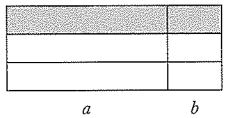
$a\times(\frac{1}{2}\times(\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}))=a\times\frac{1}{2\times(3\times4)}=a\times\frac{1}{(2\times3)\times4}=a((\frac{1}{2}\times\frac{1}{3})\times\frac{1}{4})$

・分配法則１：$\frac{1}{m}\times(a+b)=\frac{1}{m}\times a+\frac{1}{m}\times b$

（たしたもの m 等分しても，

m 等分したものをたしても結果は同じ）

$\frac{1}{3}\times(a+b)=\frac{1}{3}\times a+\frac{1}{3}\times b$



・分配法則２：$\frac{1}{m}\times a+\frac{1}{n}a=(\frac{1}{m}+\frac{1}{n})\times a$

$\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}a=\frac{3}{6}a+\frac{2}{6}a$　…倍分

$=\frac{1}{6}(3a+2a)$ …たしたものを等分しても，等分してからたしても同じ

$=\frac{1}{6}\times 5a$　…自然数の加法

$=\frac{5}{6}\times a$　…分数倍の定義

(2)　分数倍の合成

$a\times(\frac{2}{3}\times\frac{4}{5})=(a\times\frac{2}{3})\times\frac{4}{5}$

$=a\times(\frac{1}{3}\times 2\times\frac{1}{5}\times 4)$

$=a\times((\frac{1}{3}\times\frac{1}{5})\times 2\times 4)$

$=a\times\frac{1}{3\times 5}\times 2\times 4$

$=a\times\frac{2\times 4}{3\times 5}$

(3)　分数倍の逆

【問】$(a\times\frac{3}{7})\times x=a$　となるような x を見つけてみよう。

a を「7等分して3倍」したのだから，それを元に戻すには「3等分して7倍」すればよい。
だから，$\frac{3}{7}\times\frac{7}{3}=1$　となる。

このように，$x\times y=1$ となるとき，「x は y の逆数」とか「y は x の逆数」という。

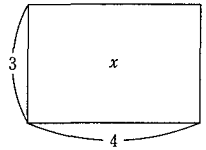
単位分数倍の場合も同じように考えられる。

$\frac{1}{n}$ 倍したものを元に戻すには n 倍すればよい。

$\frac{1}{n}\times n=n\times\frac{1}{n}=n$ なので、$\frac{1}{n}$ は n の逆数であり，n は $\frac{1}{n}$ の逆数であるといえる。

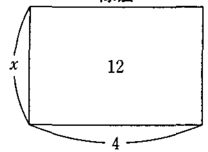
(4)　乗法と除法

乗法



$3\times 4=12$

除法

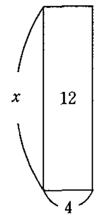


(　　　　　　　　)

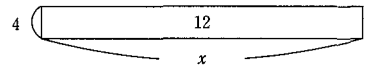
除法は $x\times 4=12$ となる x を求める計算で，$12\div 4=3$ となる。

【練習】 x を求めてみよう。

(1)

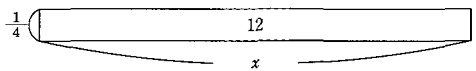


(2)

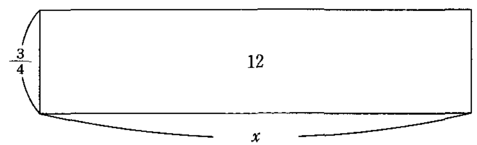


(5)　分数の乗法と除法

【問１】 x を求める式を考えてみよう。



【問２】 x を求める式を考えてみよう。



2.9 分数の乗法の性質

分数の乗法においても，自然数の乗法のすべての法則が成り立つ。自然数や単位分数倍(等分) で成り立つのだからアタリマエかもしれない。

(p,q,rは自然数，l,m,n は 0 でない自然数)

・交換法則：：$a\times(\frac{p}{m}\times\frac{q}{n})=a\times(\frac{q}{n}\times\frac{p}{m})$

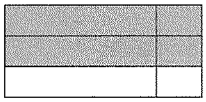
$a\times(\frac{2}{3}\times\frac{4}{5})=a\times\frac{2\times4}{3\times5}=a\times\frac{4\times2}{5\times3}=a\times(\frac{4}{5}\times\frac{2}{3})$

・結合法則：$a(\frac{p}{l}\times(\frac{q}{m}\times\frac{r}{n}))=a((\frac{p}{l}\times\frac{q}{m})\times\frac{r}{n})$

$a\times(\frac{2}{3}\times(\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}))=a\times\frac{2\times(4\times6)}{3\times(5\times7)}=a\times\frac{(2\times4)\times6}{(3\times5)\times7}\ a\times\frac{4\times2}{5\times3}=a((\frac{2}{3}\times\frac{4}{5})\times\frac{6}{7})$

・分配法則 1：$\frac{p}{m}\times(a+b)=\frac{p}{m}\times a+\frac{p}{m}\times b$

(たしたものを$\frac{p}{m}$倍しても，$\frac{p}{m}$倍したものをたしても結果は同じ)　$\frac{2}{3}\times(a+b)=\frac{2}{3}\times a+\frac{2}{3}\times b$



・分配法則 2：$\frac{p}{m}\times a+\frac{q}{n}a=(\frac{p}{m}\times\frac{q}{n})\times a$

$\frac{3}{4}a+\frac{2}{5}a=\frac{15}{20}a+\frac{8}{20}a=\frac{1}{20}\times(15\,a+8\,a)=\frac{1}{20}\times23\,a=\frac{23}{20}\times a$

・$\frac{p}{m}$がどんな分数でも　$a\times(\frac{p}{m}\times1)=a\times\frac{p}{m}$，$(1\times\frac{p}{m})=a\times\frac{p}{m}$

・$\frac{p}{m}$がどんな分数でも $a\times(\frac{p}{m}\times0)=0$，$a\times(0\times\frac{p}{m})=0$

$a\times(\frac{p}{m}\times0)=(a\times\frac{p}{m})\times0=0$，$(a\times0)\times\frac{p}{m}=0\times\frac{p}{m}=0$

13

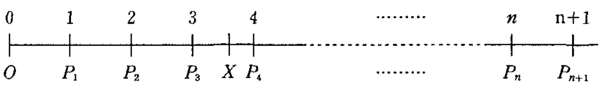
2－5．十進小数

2－5－1　実数の定義

問の系列に沿って，めもりで区切られた区間の数を子どもに質問しながら進められた（例えば 3.704 という数値を答えさせる）。また，例えば 3.7 と 3.70 について，測定の精度が違うことも説明された。子どもの反応は，ときどきミスから生まれる誤答もあったが，当然のこと，という雰囲気で実数の定義がなされた。

3　十進小数

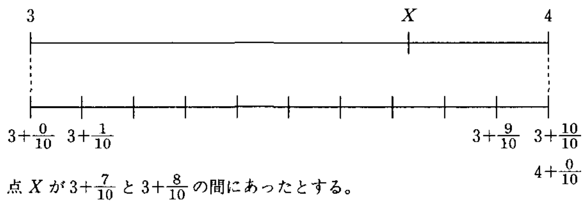
3.1　十進小数とは



数直線上の点 X はどのような数で表せるだろうか。

点 X が P_3 と P_4 の間であったとする。

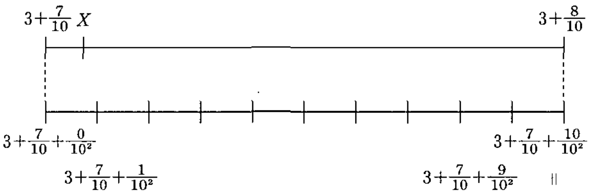
単位の長さを 10 等分して目もりを細かくする。この目もりを①の目もりとする。①の目もりで区切られた長さを表す分数は $\frac{1}{10}$ となる。①の目もりを分数で表してみよう。



点 X が $3+\frac{7}{10}$ と $3+\frac{8}{10}$ の間にあったとする。

【問 1】 0 から $3+\frac{7}{10}$ の間で，①の目もりで区切られた区間はいくつあるだろうか。

①の目もりをさらに 10 等分して目もりを細かくする。この目もりを②の目もりとする。この目もりで区切られた長さを表す分数は $\frac{1}{10^2}$ となる。②の目もりを分数で表してみよう。

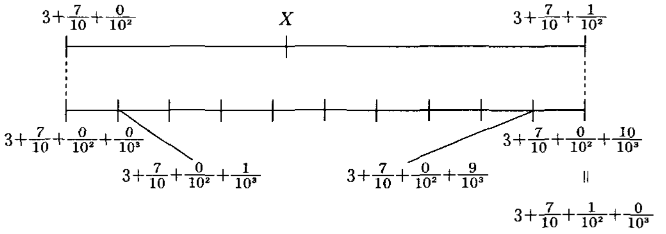


点 X が $3+\frac{7}{10}+\frac{0}{10_2}$ と $3+\frac{7}{10}+\frac{1}{10^2}$ に間にあったとする。

【問 2】 0 から $3+\frac{7}{10}+\frac{0}{10^2}$ の間で，②の目もりで区切られた区間はいくつあるだろうか。

14

②の目もりをさらに10等分して目もりを細かくする。この目もりを③の目もりとする。この目もりで区切られた長さを表す分数は $\frac{1}{10^3}$ となる。③の目もりを分数で表してみよう。



点 X が $3+\frac{7}{10}+\frac{0}{10^2}+\frac{4}{10^3}$ と $3+\frac{7}{10}+\frac{0}{10^2}+\frac{5}{10^3}$ の間にあったとすると……

【問3】0から $3+\frac{7}{10}+\frac{0}{10^2}+\frac{4}{10^3}$ までも間で，③の目もりで区切られた区間はいくつあるだろうか。

このように目もりの等分をくり返していくと，3, $\frac{37}{10}$, $\frac{370}{100}$, $\frac{3704}{1000}$ というように，X をあらわす数にいくらでも近づく数の列ができる。

もとの自然数目もりで点 X に対応する数は3

①の目もりで点 X に対応する数は $\frac{37}{10}$，この数を3.7と書く。

②の目もりで点 X に対応する数は $\frac{370}{100}$，この数を3.70と書く。

①の目もりで点 X に対応する数は $\frac{3704}{1000}$，この数を3.704と書く。

このように連続量の大きさを表現する方法を十進小数という。

数直線上のどんな点も十進小数を使って，いくらでもくわしく近似できる。(有限小数)

数直線上の点を表す無限に続く十進小数を，**実数**という。

数直線は今のところは半直線である。直線全体と数の対応はどうなるだろうか。あとで考えることにしよう。

15

《授業記録6》15ページ

授業では少し深入りして「いつか十等分した点にぴったりぶつかることがあるだろうか」という問がだされた。子どもたちの予想は次の通りである。

　必ずめもりのところにくる　　7人

　必ずとはいえないけど，ぴったりになる方が多い　　3人

　大体，半々くらいだ　　13人

　ぴったりこないことの方が多い　　1人

　ほとんどぴったりにはならない　　1人

これに対して次のような説明と応答がなされた。

T：正解なんかわかんない。だけどうちのクラスでやった時はこんな意見も出た。「めもりを細かくしても，拡大すれば同じだから，いつまでたっても終わらないことの方が多いんでないか」この間にめもりは10個ありますね。そのほかに，めもりのない点はいくつありますか？

C：10

T：えっ，めもりのない点ですよ。100ですか？

C：無限にある。

T：３年でやったでしょう。ここからここまで，点は無限にあるのです。そのうちに10個にぶつかる可能性というのは？

C：ほとんどない。

T：だから，ゼロではないけど，ほとんどぴったり終わらないのが正解です。

「まだきょとんとしている子がいるので，もう一つ比喩を紹介。『でっかい袋があって，そこに無限個の白玉と10個の赤玉が入っている目をつぶって１個取ったとき，それが赤玉である可能性は？』『ほとんどない』」（*）

T：はい，こんどは，数直線を考えてきましたが，こっち（負の方向を指す）の方向を考えたらどうなるでしょうか？

C：？

T：はい，次行きます。

2－5－2　小数の加法

3.2　小数の加法・減法

ｉ）小数の加法

【問】次の加法を考えてみよう。

1.23 m＋2.14 m＝

十進小数の加法は自然数の加法にもどすことができるから，自然数の加法の法則はすべて成り立つ。a，b，c がどんな小数でも，

$a+b=b+a$　（交換法則）

$(a+b)+c=a+(b+c)$　（結合法則）

$a+0=0+a=a$　（0の性質）

ⅱ）加法と同じように減法（引き算）もできる。

7.45 m－3.24 m＝

ⅲ）乗法　有限小数は分数であらわすことができるから，乗法の法則はすべて成り立つ。

a，b，cがどんな小数でも，

$ab=ba$　（交換法則）

$(ab)c=a(bc)$　（結合法則）

$a(b+c)=ab+ac$，$(a+b)c=ac+bc$　（分配法則）

$a\times 1=1\times a=a$　（1の性質）

$a\times 0=0\times a=0$　（0の性質）

16

《授業記録７》16ページ

Ｔ：次，小数の加法です。1.23メートルたす2.14メートル。あ，違った。これメートルって読んでいいのか？

Ｃ：エム

Ｔ：1.23エムたす2.14エム。エムってなんか，長さだよ。だからメートルって考えても同じだね。答えは？

Ｃ：（多数）3.37エム

Ｔ：えー，どうしてこんなことできるの？

Ｃ：え，むずかしい。

Ｔ：メートルだったらこれでいいですね。こういうふうにやるもんね。だれか一言なんか言って。

Ｃ：小数点がある。

T：問題わかりますか？自然数と分数については分ります。

C：3 年生の時やった。

T：この流れの中でよ。分数ならいい，自然数なら大丈夫だったよね。小数ならなんでいいんだ？

メートルならいいよ。これ，エムだよ。

C：かわんないべ。

T：うん…。ほかに？小数ならなぜいいんだ？

C：あ，分数になるからだ。

T：そうだ。マル。花マル。分数になるからでしょう。

C：あー。

T：小数は分数に直せるからできるんでしょう。これは 10 の 2 乗分の 123 だから。(16 ページの残りの部分を読みながら確認して行く。)有限の場合はすべて分数に直せるんです。無限の場合は今は難しいから考えません。

2－5－3　メートル法

4　メートル法

メートル法とは……

メートル法は，計量（けいりょう）単位を統一するために，十進法によって作られた単位である。今では，多くの国で使われている。

長さの基本単位，メートル（m）は，最初は地球の子午線の北極から赤道までの長さの1千万分の1が1 m であるとして決められた。だが現在は，クリプトン86原子の放射する光の波長をもとに決められている。

また，$\frac{1}{10}m$ を一辺とする立方体の体積1リットル(l)，約4℃の水の質量は1キログラム(kg)，と決められ，これが基本単位となった。

これらの基本単位の10倍や10^2倍，または$\frac{1}{10}$倍や$\frac{1}{10^2}$倍などを表す語がある。

テ　ラ：$T=10^{12}$	ピ　コ：$p=\frac{1}{10^{12}}$
ギ　ガ：$G=10^9$	ナ　ノ：$N=\frac{1}{10^9}$
メ　ガ：$M=10^6$	マイクロ：$\mu=\frac{1}{10^6}$
キ　ロ：$k=10^3$	ミ　リ：$m=\frac{1}{10^3}$
ヘクト：$h=10^2$	セ ン チ：$c=\frac{1}{10^2}$
デ　カ：$da=10$	デ　シ：$d=\frac{1}{10}$

これらの語は，基本単位の記号とともに，一つの単位をつくる(Gm, Mm など)。こういった記号を使うと，同じ量を単位をかえて表すことができる。

例

$5000\ mg=5000\times\frac{1}{1000}\times g$　　　($m=\frac{1}{1000}$ だから)

このように，k や m を数そのものとしてみることができる。百分率を表す%も，$\frac{1}{100}$倍することと考えることができる。

【問1】1 km^2は何 m^2だろう。

【問2】10の0乗はどんな数だろう。

17

メートル法は十進記数法の完備された体系である。そのしくみの理解は，現代を生きる人間にとって必須事項ともいえよう。ここでは何より，数表現の十進構造を理解する上で有効な教材であることを理由に，単元の最後に位置づけた。

メートル法に関して子どもたちが起こす混乱の原因は基本単位（メートルなど）の文字と，倍操作を示す文字（キロ，ヘクトなど）との区別がはっきりしないこと，また平方や立方がどのように基本単位と関るか，などの点だろう。ここでは例えば $k=10^3$ という簡明な扱いをした。

授業では，３ギガメートルを３×10の９乗×メートルを例として説明された。

《授業記録８》 17ページ

はじめの【問】への答えは次のとおりだった。

1000 m^2（12人）　　　1000000 m^2（４人）

Ｔ：２乗の２がどこまでかかっているかが問題だぞ。１平方 km がどんな形の面積かを考えると，km の２乗だね。（$1\times k\times k\times m=1\times1000\times1000\times m$ を板書）だから10の３乗×10の

3乗で10の6乗になります。最後の問題です。

（10の0乗を見て）

C：（数人）また0だ。

T：(デカ，ヘクト，キロ，デシ，センチ ミリと並べたものを10の冪で書いた後，1 m は10のはてな乗とすると，流れからして，0乗だな。だから10の0乗はと考えると都合がいい，ということです。

（さらに0.1が10のマイナス1乗，0.01が10のマイナス2乗であることにもふれて終了）

お わ り に

このシリーズを提案し，実践にいたる過程で多くの先生や学生からアドバイスを頂いた。その中で「こんな難しいことが中学校1年で，できるはずがない」という趣旨の様々なご意見がおそらく最大多数だったと思われる。この度の実践を通して，このプランは「できるはずがない」ものではなく，量と数の関係，文字による代数的性質の表現，実数概念の端緒などに関して，無理なく理解がえられるという感触を得た。

初めての実践であり，しかも小学校での実践だったこともあって，今後の改善課題がいくつか見いだされた。特に(1)分数の代数的性質を導く過程をより簡素にすること，(2)かなりの部分を占めた「説明」に変えて，問題，課題を工夫すること，(3)理解を確認する「練習」を加えること，などである。