関数指導の一環としての
高等学校数学「数列」の授業プラン【第一部　本論編】

――階差数列の研究を中軸に据えて――

高　橋　哲　男
(稚内北星学園大学情報メディア学部)

目　次

1　は　じ　め　に

高等学校の数学教育カリキュラムにおいて、数列は、豊富な現実的話題と結びつけやすく楽しい授業構成が可能な分野であろう。三角数、四角数、…と言われる等差数列、「将棋倒しの原理」と例えられる数学的帰納法、自然界にも現れるというフィボナッチ数列、実際に遊びながら再帰的法則を見つけてゆけるハノイの塔など、パズル的要素の強い面白い話題が揃っている。その一方で大学受験の問題に目を向ければ、一般項を求めるただ難解なだけのものが多く、高校生はその解法のテクニックをパターン化して暗記させられることになりがちである。

本稿では、数列を題材とした一時間限りの楽しい授業を追究するのではなく、もちろん大学受験に打ち勝つ授業を指向するのでもなく、数列を、自然数を定義域とする関数として捉え、解析学指導の立場から教育内容について論じ教材を構成することを試みた。数列分野をひとまとまりと見てその全体像を描いた先行研究としては、金山證による「「数列」の指導に関する一考察」*1 がある。このなかで金山は次のように述べている*2。

> 問題解決力の育成と基礎的・基本的な事項の定着を目指した指導の前提として、指導の見直しと再構築をしておかなくてはならない。「数列」に関する指導を見直す場合には、ま

---

* 1　金山證「「数列」の指導に関する一考察」(富山商船高等専門学校編『富山商船高等専門学校研究集録』第29号、1996年) 67-79頁。
* 2　前掲、金山證「「数列」の指導に関する一考察」68頁。

ず単元の目標を分析し、指導目標と学習項目別達成目標を明確にした上で 1 時間の授業における目標の具体化を図りつつ、単元全体の指導構想の立場からと 1 時間の授業の構成の立場からの見直しが必要である。両立場から見直す過程を通して指導法の再構成が成されるのである。

そして、「精選された例題 18 題」[*3] を中核として構成される指導計画を提示している。これは各「例題」ごとに「問題、解法の手順」「前提内容、関連事項」「解法、技能、計算技術」「誤りやすい箇所」「指導上の留意点」の五項目を詳細に記した、全 9 頁に及ぶものとなっている。

しかし、これは教師用の学習指導計画の域を出ていない。また、指導項目の順序を大まかに眺めても「数列の定義」「等差数列」「等差数列の和」「等比数列」「等比数列の和」…となっており、教科書の指導順序と大した違いが見られない。何より、上で「明確にした上で」と述べられている「単元の目標」や「指導目標」、「学習項目別達成目標」が記述されていない。「基礎学力の定着や問題解決力の育成を目指」すということ以上には、数列という「単元」に固有の目標が明らかにされていないのである。

金山の主張で首肯し得る点は、次の二点に集約される。

- 第一に、「数の系列についての研究は数学の学習の基礎であり、その研究で用いる考え方は関数の研究でも基本となる大切なものである」[*4]。
- 第二に、「数列の後の極限、微分・積分、偏微分、 2 重積分に続く教材としての位置づけを考慮に入れながら思考の連続性を大切にした指導の一貫性に留意する」[*5]。

本稿の課題は、このように数列を関数指導の一環として位置づける立場から教育内容・教材を構成し授業プランとして提示することにある[*6]。

本稿は、本誌に掲載の高橋哲男・小丹枝みゆき「関数指導の一環としての高等学校数学「数列」の授業プラン【第二部　授業案編】―― 階差数列の研究を中軸に据えて ――」並びに、高橋哲男「関数指導の一環としての高等学校数学「数列」の授業プラン【第三部　解説編】―― 階差数列の研究を中軸に据えて ――」と一体化したものである。両論文も併せてご参照いただきたい。

2　教科書における数列指導の内容と方法

高等学校数学の数列は、現行の学習指導要領では数学Bに配置されており、2004 年 4 月から

＊3　前掲、金山證「「数列」の指導に関する一考察」69 頁。

＊4　前掲、金山證「「数列」の指導に関する一考察」67 頁。

＊5　前掲、金山證「「数列」の指導に関する一考察」69 頁。

＊6　高等学校の関数指導に関する授業プランを提示するレベルの先行研究としては、(0) 渡邊勝『北海道地区数学教育協議会高校サークルブックレット 1　運動と微分積分』北海道地区数学教育協議会、1999 年、(1) 氏家英夫「指数関数と e の指導」(須田勝彦・氏家英夫『北海道地区数学教育協議会高校サークルブックレット 2　量の解析に基づく指数関数・対数関数の指導』北海道地区数学教育協議会、2000 年)、(2) 氏家英夫「指数現象のメガネとしての対数関数の指導」(須田勝彦・氏家英夫『北海道地区数学教育協議会高校サークルブックレット 2　量の解析に基づく指数関数・対数関数の指導』北海道地区数学教育協議会、2000 年)、などが挙げられる。

新教科書の使用が開始されている。筆者は、数列の教育内容・教材構成を考える立脚点を定めるべく、旧学習指導要領の数学Aの教科書*7 を検討した。

ここでは、教科書の記述を追って感じた指導過程の問題点を二点指摘しておこう。両者の共通点は、似たような説明が繰り返される煩雑さの存在である。そして、繰り返しによる螺旋的高まりが見いだしにくい構成になっているのである。

■数列の導入部分　例えば、東京書籍の教科書*8 を見てみよう。最初に登場する数列は、

(1).1,3,5,7,9,・・・

である。そして、初項(第1項)、第2項、第3項、…、第 n 項、一般項が説明される。その直後に、(1) の奇数の列において、一般項が

$$a_n=2n-1$$

であることが述べられている。その次の小節では、等差数列の一般項を求める。「数列 $\{a_n\}$ が初項 a 、公差 d の等差数列であるとき、[中略] a_n は a に d を ($n-1$) 回加えたものになっている」として、

初項 a 、公差 d の等差数列の一般項 a_n は、

$$a_n=a+(n-1)d$$

と述べている。

一般の等差数列の一般項の求め方を説明した後に、等差数列である奇数列にその求め方を適応して $a_n=2n-1$ を得るならよいのかもしれない。しかし、教科書の説明順序は逆である。また、奇数列の一般項を求める際に、「n 番目の奇数は1に2を ($n-1$) 回加えたものである」という説明がある。それを一般の等差数列に拡張して説明するのならまだよいのだが、奇数列の一般項 $a_n=2n-1$ はいきなり説明なしに登場している。奇数列の一般項を求める方が、より一般の等差数列、例えば

$$1,4,7,10,13,\cdots$$

の一般項を求めるよりも決定的に易しいという保証はないと思われる。

■階差数列の扱い　階差数列の和をとる

$$\begin{array}{rl} & \cancel{a_2}-a_1 \\ & \cancel{a_3}-\cancel{a_2} \\ & \cancel{a_4}-\cancel{a_3} \\ & \quad\vdots \\ +) & a_n-\cancel{a_{n-1}} \\ \hline & a_n-a_1 \end{array}$$

＊7　藤田宏ほか『数学A』東京書籍、2002 年。

＊8　藤田宏ほか『数学A』東京書籍、2002 年。

という図式が三度にわたって登場する。

一度目は、等差数列の一般項を求める上とは「別の方法」の説明においてである。すなわち、

$$
\begin{array}{rrcl}
 & \cancel{a_2}-a_1 & = & d \\
 & \cancel{a_3}-\cancel{a_2} & = & d \\
 & \cancel{a_4}-\cancel{a_3} & = & d \\
 & \vdots & & \\
+) & a_n-\cancel{a_{n-1}} & = & d \\
\hline
 & a_n-a_1 & = & (n-1)d
\end{array}
$$

となる。

二度目は、平方数の和を求める場面においてである。$a_k=k^3$ で定まる数列 a_k を考えると、

$$a_{k+1}-a_k=(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$$

という恒等式が成り立つ。したがって

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)=\sum_{k=1}^{n}(3k^2+3k+1)$$

となる。ここでこの式の左辺が $a_{n+1}-a_1$ になることの説明のために、

$$
\begin{array}{rl}
 & \cancel{a_2}-a_1 \\
 & \cancel{a_3}-\cancel{a_2} \\
 & \cancel{a_4}-\cancel{a_3} \\
 & \vdots \\
+) & a_{n+1}-\cancel{a_n} \\
\hline
 & a_{n+1}-a_1
\end{array}
$$

という図式が添えられている。

三度目は、階差数列の説明の場面においてである。

(1) 1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, ・・・

という数列は等差数列でも等比数列でもない。しかし、この数列の隣り合う項の差は

2, 4, 8, 16, 32, 64, ・・・

となり、等比数列になっている。(1) の一般項を a_n とすると、すべての自然数 k について

$$a_{k+1}-a_k=2^k$$

が成り立っている。ここから、

$$
\begin{array}{rlcl}
 & \cancel{a_2}-a_1 & = & 2 \\
 & \cancel{a_3}-\cancel{a_2} & = & 4 \\
 & \cancel{a_4}-\cancel{a_3} & = & 8 \\
 & \vdots & & \\
+) & a_n-\cancel{a_{n-1}} & = & 2^{n-1} \\
\hline
 & \multicolumn{3}{l}{a_n-a_1=2+4+8+\cdots+2^{n-1}}
\end{array}
$$

により、a_n を求めることができると説明されている。

同じような説明が繰り返されなければならない理由は、階差数列の和をとることが数列の性質を研究する際に重要な位置を占めるという点にある。しかし、教科書ではそのことが生徒にわかりやすい形で提示されてはいない。階差数列を考えることは、関数の世界に対応させると Δx が一定（＝1）のときの y の変化量 Δy を求めることであり、不規則な変化を線型で近似しようとする微分の思想に通じる自然な方法である。

ここから、階差数列 $\{b_n\}$ の定義 $b_n=a_{n+1}-a_n$ 及び、それを式変形して得られる $a_{n+1}=a_n+b_n$ という数列 $\{a_n\}$ の漸化式をできるだけ早い段階で導入するという対案のアイディアが浮かんでくる。

現行学習指導要領下の東京書籍の『数学 B』の教科書[*9]では、第三に述べた階差数列のところでのみ階差数列の和を求める図式が登場しており、一見改善されているようにも映る。しかし、数列の単元全体の指導順序には差違が認められない。階差数列は最後の方に登場している。

3　関数指導の一環としての数列指導

数列の「数」を今実数に限定するならば、数列は自然数から実数への対応であるということは自明である。数列は、自然数を定義域とし実数を値域とする関数であるともいえる。

数列をこのように定義するとき、数列指導を関数指導の一環として位置づけ、微分・積分への発展を意識した展開を図るという指導の構想が自然と浮かび上がる。石川廣美は、「従来伝統的に代数の分野として扱われていた有限な数列と級数の教材を離散的変化の解析として構成する」必要性について論じている[*10]。そこには、一般的に指導されている数列の和の求め方、および漸化式で与えられた数列の一般項の求め方に問題点があるとの現状分析と課題意識が存在する。

数列の和の求め方については、等差数列の和

$$S(n)=\sum_{x=1}^{n}\{a+(x-1)d\}$$

では、項の順序を逆にして和を作りこれともとの式とを辺々に加えることにより求める。

等比数列の和

$$S(n)=\sum_{x=1}^{n}ar^{x-1}$$

では、両辺に r を乗じた式をもとの式から辺々引くことにより求める。

さらに、平方数、立方数等の数列の和

$$S(n)=\sum_{x=1}^{n}x^{\lambda}\qquad(\lambda=1,2,\cdot\cdot\cdot)$$

は、恒等式

＊9　飯高茂ほか『数学 B』東京書籍、2004 年。

＊10　石川廣美「差分法の導入による数列教材の扱いについて」(愛媛大学教育学部編『愛媛大学教育学部紀要 第1部　教育科学』第24 号、1978 年) 175-186 頁。

$$(x+1)^\lambda - x^\lambda = \sum_{r=1}^{\lambda} {}_\lambda C_r x^{\lambda-r}$$

を利用して求める。石川は以上の和の求め方について次のように述べている[*11]。

> このような和の求め方はそれぞれの個々の問題解決には明快で有効なものではあるが、そのことがかえって技巧的になり個々の問題についてそれぞれの特異な技法を提示しなければならない。このことが生徒の理解を困難にする一つの大きな要因であると考えられるのである。統合的で筋道の立った見方、考え方ができず解法の見通しはたてられない。次にはいかなる技法が必要になるのか、そしていかなる技法をみつければよいのかと生徒は恐れをなしてくるのである。

そこで石川は、差分と和分の導入によりこの課題の解決を図ろうとしている。その流れを追ってみよう。

> 関数 $y=f(x)$に対して、
>
> $$\Delta f(x)=f(x+1)-f(x)$$
>
> を $y=f(x)$ の差分という。
>
> 関数 $F(x)$ と $f(x)$ について
>
> $$\Delta F(x)=f(x)$$
>
> であれば
>
> $$F(x+1)-F(x)=f(x)$$
>
> である。$x=1,2\cdot\cdot\cdot,n$ とおいて辺々加えれば
>
> $$F(n+1)-F(1)=\sum_{x=1}^{n} f(x)$$
>
> すなわち
>
> $$\sum_{x=1}^{n} f(x)=\mathfrak{S}_1^{n+1} f(x)\Delta x=[F(x)]_1^{n+1}=F(n+1)-F(1), \qquad (F(x) \text{ は } f(x) \text{ の不定和分})$$
>
> これによって、初項 a、公差 d の等差数列の和は
>
> $$\begin{aligned} S(n) &= \sum_{x=1}^{n} \{a+(x-1)d\} \\ &= \mathfrak{S}_1^{n+1} \{a-d+xd\}\Delta x \\ &= \left[(a-d)x^{(1)}+\frac{x^{(2)}}{2}d\right]_1^{n+1} \\ &= \frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\} \end{aligned}$$

---

*11　前掲、石川廣美「差分法の導入による数列教材の扱いについて」176 頁。

となる。

以上のように和分を用いることで、「数列ごとに特異な技法を見いだす必要はまったくない」と石川は述べている。しかし、$f(x)$ の不定和分 $F(x)$ を見つける方法は述べられていない。微分・積分を学習した生徒であれば要は原始関数を求めればいいのだと気づくかもしれないが、そのような前提はこの際できない。

例えば定積分

$$\int_0^5 x dx$$

を区分求積法と極限の概念を用いてなんとか $\dfrac{25}{2}$ と求め、一般の

$$\int_0^t x dx = \frac{1}{2}t^2$$

を導くことは可能であろう。しかし、これの数列版である

$$\sum_{k=0}^{n} k$$

はどのように求めればよいのだろうか。石川が批判した「項の順序を逆にして和を作りこれともとの式とを辺々に加えることにより求める」方法しかないのではあるまいか。和分・差分の概念を用いることで

$$\text{数列の和} = \mathfrak{S}_1^{n+1} f(x)\Delta x = [F(x)]_1^{n+1} = F(n+1) - F(1)$$

$$\text{定積分} = \int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

という対応を生徒に意識させ、「数列の和の求め方と定積分の求め方の間に共通の定式をみ」[*12]せたいと思うのは教師の理想かもしれないが、授業の場でそれを実現する具体的プランは見えない。和分・差分という言葉づかいも、積分・微分と照応することを知っている教師の自己満足と思えてくる。生徒には「和」「差」としか思えないのではなかろうか。

結局のところ論題の「差分法の導入による」は「階差数列の導入による」と大差がないように思われる。また、和分の意義についても、

$$F(n+1) - F(1) = \sum_{x=1}^{n} f(x)$$

あるいは「微分積分学の基本定理」

$$F(x) = \int \frac{d}{dx} f(x) dx + C$$

との対応を意識するなら

$$F(n+1) = \sum_{x=1}^{n} f(x) + F(1)$$

を使うべきであるとの主張としか読み取れない。

石川は「「数列と級数」は高等学校と大学に跨っている教材であるが現状の取り扱いでは、同

---

*12　前掲、石川廣美「差分法の導入による数列教材の扱いについて」180 頁。

じく高等学校から大学に跨った教材である「微積分法、微分方程式」ほどの展開は望めない」として、「差分法の導入は「数列と級数」の扱いを質的に改善し、より発展性のある方向を目ざすことにもなる」と述べている*13。本稿では、数列を関数指導体系の中に位置づけ、「微積分法、微分方程式」という「発展性のある方向を目ざす」ことには賛同し、石川がなしていない、高等学校における数列の扱いを「質的に改善」するための具体的な授業プランを提案することを目指す。

4　数列の授業プランにおける教育内容・教材構成論

4.1　数列を a_0 から始める

B. ラッセルは、『数理哲学序説』の中で次のように書いている*14。

> 現代の普通の教養ある人は数学の明白な出発点として、自然数列
>
> $$1,2,3,4,\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$
>
> をとるであろう。この数列を 1 でなく 0 で始める人は、多少とも数学的教養の高い人である。しかしここではその程度の知識を仮定し、数列
>
> $$0,1,2,3,\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot n,n+1,\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$
>
> を吾々の出発点にとり、これを**自然数列**と名づけ、今後自然数列といえば、この数列を意味するものとする。

別に「教養の高い人」を目指すわけではないが、本プランでは数列を第 0 項 a_0 から始めることにする。自然数に 0 を含めるべきだとの見解は須田勝彦*15 も述べているが、数列指導の場合はなおのこと a_0 が有用性を発揮する。

一般に関数指導を考えても、例えば一次関数は $\dfrac{dy}{dx}=a$（一定）と初期条件 (x,y) が与えられれば決まる。ここで初期条件として $x=0$ の時の y の値が与えられるのが最も楽である。グラフを描くときも直線の傾きの他に通過する任意の一点が与えられればよいとはいえ、やはり通常意識するのは y 切片であろう。このように関数においては $x=0$ の時の y の値が重要であるにも関わらず、数列指導では初項 a_1 から始めることが当然のように行われている。関数指導の一環として数列指導を考えるとき、これは不合理極まりない。

武田利一らは「数列 —— 幻の 0 番法とその後」*16 において、「幻」である第 0 項を考えることにより数列の一般項が求めやすくなることを説明している。しかし初めから初項を a_0 とすることでそれは「幻」でもなんでもなくなる。等差数列の一般項においても初項を a_0 とすることで、

---

*13　前掲、石川廣美「差分法の導入による数列教材の扱いについて」185-186 頁。

*14　B. ラッセル『数理哲学序説』1920 年。ゴシック体原文。この文献については札幌篠路高等学校の真鍋和弘先生より示唆いただいた。

*15　須田勝彦「中学校数学カリキュラム再構成への試み —— 入門期の中学校数学を中心に　第 1 部　理論編」（北海道大学教育学部教育方法学研究室『教授学の探究』第 17 号、2000 年、25-26 頁。

*16　武田利一・村嶋健吾・飯島光治「数列 —— 幻の 0 番法とその後」（『数学セミナー』第 320 号、1988 年）47-51 頁。

第 n 項は「初項に公差を n 回加えたもの」だから、$a_n=a_0+dn$ となり、教科書では登場する $n-1$ が出てこなくなる利点もある。

加えて言えば、「初項」「一般項」という言葉も不要である。教科書では「a_1 を初項または第1項、a_2 を第2項、……、a_n を第 n 項という」とあるが、これは生産的でない単なる言い換えであろう。一般項についても、「数列の第 n 項 a_n を、n を与えると一般的に計算できる形に表したとき、一般項という」とある。一般的に計算できる形に表されていようがいまいが、a_n はある n 番目の項という一般項である。無意味な言い換えで新しい用語を増やすのは生徒にとっても負担となろう。したがって本プランでは、「初項」「一般項」を用いず、それぞれ a_0, a_n とする。

4.2 階差数列を早期に導入する

数列指導において微分･積分への発展を意識することはよしとしても、定積分に照応する「和分」から始めることは既に述べたように困難である。それは数列を教える前に数列の和という一段違うレベルの概念を教えることになるからである。

しかし、微分に照応する階差数列（差分）を早期に導入することは可能である。数列が自然数から実数への（任意の）写像であるとはいえ、もともと、高等学校の数学で扱える数列は解析可能な規則性をもつものに限られる。林鶴一は『初等幾何学の体裁』のなかで、幾何学の研究対象について次のように述べている[*17]。

> 非常に規則正い形のものでなければ学問の力の及ぶ所でない。現在目の前にあるやうな不規則な形のものに依っては学問は成立たない。学問の領域と云ふのは非常に情けないものである。

高等学校で学んでいる数列がいかに狭い範囲のものであるかを知らせると同時に、「規則正い」数列とはいかなる数列かを考えるところから数列の指導を始めたい。これは、現実の近似的理想化・抽象化を経たところに数学が存在するという数学観を提示することにもなる。そして、ある数列がどのような規則性をもつかを考察する際に階差数列を考えてみるというのは自然な方法であろう。したがって、本プランでは、規則性を見つけるためではなく、和を取って元の数列の一般項を求めるためでもなく、規則性のある数列では階差数列にもまた何らかの規則性が存在するという観点から、階差数列を可能な限り早期に導入する。

また、教科書では、階差数列の和によって元の数列の一般項を求める方法は一般項を導く方法の一つにしか過ぎない扱いを受けている。しかし、微積分学の基本定理との対応を意識するならば、階差数列の和を取ることは数列の一般項を求めるむしろ本質的な方法である。したがって、階差数列 $\{b_n\}$ の和を取って元の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求める

$$a_n=\sum_{k=0}^{n-1}b_k+a_0$$

も早期に導入したい。

---

*17　林鶴一『初等幾何学の体裁』弘道館、1912 年、12 頁。

4.3　微分・積分との対応を意識する

階差数列を早期に導入することとも関連するが、等差数列はその階差数列の性質（漸化式）をもって定義する。すなわち、等差数列については教科書では一般的に「一定の数dを次々に加えて得られる数列を等差数列という」と定義され、「したがって、等差数列は１つ前の項との差が一定である」と説明される*18。しかし本プランでは、

$$a_{n+1}-a_n=d \ （一定）$$

で等差数列$\{a_n\}$を定義する。この漸化式（差分方程式）と任意の一項が与えられれば等差数列が決まるというのが定理になる。また、この漸化式から、「a_nはnの一次式で表される」という定理も導かれる。

また、等差数列の和を扱うことによって、次に、階差数列が等差数列になる数列のa_nを求めることができる。先に示した定理

$$a_n=\sum_{k=0}^{n-1}b_k+a_0$$

を用いれば、階差数列$\{b_n\}$が等差数列の場合、元の数列$\{a_n\}$は、nの二次式で表されることになる。これは、一次関数の原始関数が二次関数になることに対応するが、逆にa_nがnの二次式で表される数列の階差数列b_nは、nの一次式で表される。すなわち、

$$a_n=pn^2+qn+r$$

のとき、

$$a_{n+1}=p(n+1)^2+q(n+1)+r$$

となるので辺々引くと、

$$a_{n+1}-a_n=(2p)n+(q+r)$$

が得られる。これは、二次関数の導関数が一次関数になることに対応する。

一方、等比数列についても階差数列の性質で定義したいのだがこれは難しい。公比rの等比数列では

$$a_n=a_0r^n$$

となるが、両辺をr倍した

$$a_{n+1}=a_0r^{n+1}$$

とで辺々引くと、

$$a_{n+1}-a_n=a_0(r-1)r^n$$

となる。右辺は、$a_n(r-1)$から始まる公比rの等比数列である。しかし、等比数列の導入で「階差数列が等比数列になる数列を等比数列という」という定義はできないだろう。できないが、

*18　前掲、藤田宏ほか『数学Ａ』60頁。

「等比数列では階差数列が同じ公比の等比数列になる」「階差数列が等比数列である元の数列は同じ公比をもつ等比数列である」という定理の獲得は重要である。指数関数の微分・積分に対応させると、

$$(r^x)'=Ar^x, \qquad (A=\log r)$$
$$\int r^x dx=Br^x, \qquad \left(B=\frac{1}{\log r}\right)$$

となる。

等差数列は一次関数を、等比数列は指数関数を、定義域が自然数の部分に限って離散的に眺めたものと考えることができる。渡邊勝は、

$$\begin{array}{ccc} \text{関数} & \rightleftarrows & \text{導関数} \\ \downarrow\uparrow & & \downarrow\uparrow \\ \text{数列} & \rightleftarrows & \text{階差数列} \end{array}$$

というダイアグラムを提起した*19。関数の導関数を求めることと数列の階差数列を求めること、またその逆で関数の原始関数を求めることと階差数列から元の数列を求めることとの対応関係が、数列と微分積分の学習双方を終えた段階で理解されるようにすべきであろう*20。

4.4　手触り感のある問題・教具で数列を楽しむ

等比数列の具体例として、複利計算が取り上げられることがよくある。数学教育が社会を見つめる目を養う目的を持っているとすれば、あるいは高利貸しのトラブルに巻き込まれないようにとの消費者教育の立場からしても、複利計算のような具体例を扱うことに批判はできない。しかしながら、高校生の立場にとって長期で複利のローンというものが、どれほど興味ある題材なのであろうか。

本プランでは、伝統的でオーソドックスな方法ではあるが、ハノイの塔での遊びを通して等比数列を導入することとしたい。

---

*19　渡邊勝「数列をどう教えるべきか」(北海道地区数学教育協議会高校サークル2004 年1 月例会研究発表資料。

*20　渡邊も前述の石川同様に、「微分」「積分」との対応を意識して「差分」「和分」という言葉を使っている。この表現は両者の対応をすでに知っている教師という高い立場からの、独りよがりな趣味の押しつけと映る。生徒は微分積分の学習を終えていないのであるから、ここは教科書通り「階差」と「和」でいいだろう。

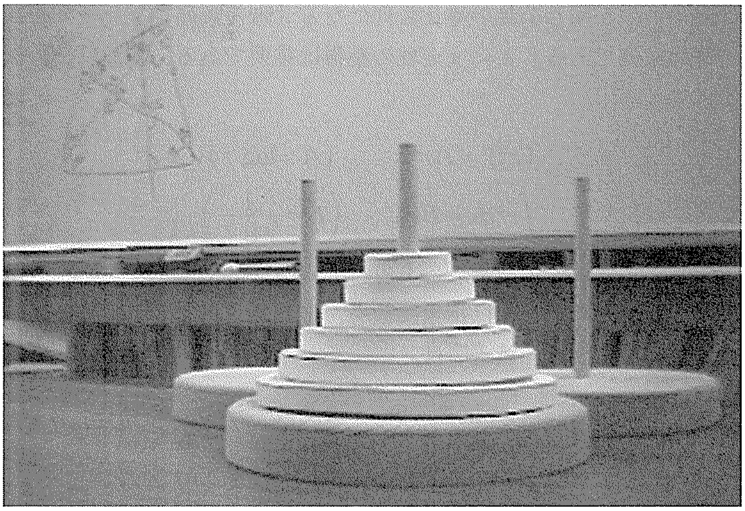

図1　ハノイの塔

n 段のハノイの塔を正しく移動させる手数を h_n とすると $h_n=2^n-1$ である。数列 $\{h_n\}$ は等比数列ではないが、その階差数列 $\{i_n\}$ は $i_n=2^n$ となり等比数列である。そして、等比数列の和を求める一般公式を導きながら、数列 $\{h_n\}$ を明らかにしてゆく。

また、平方数の和

$$0^2+1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+\cdot\cdot\cdot$$

を求める際には図2のような教具を用いる。

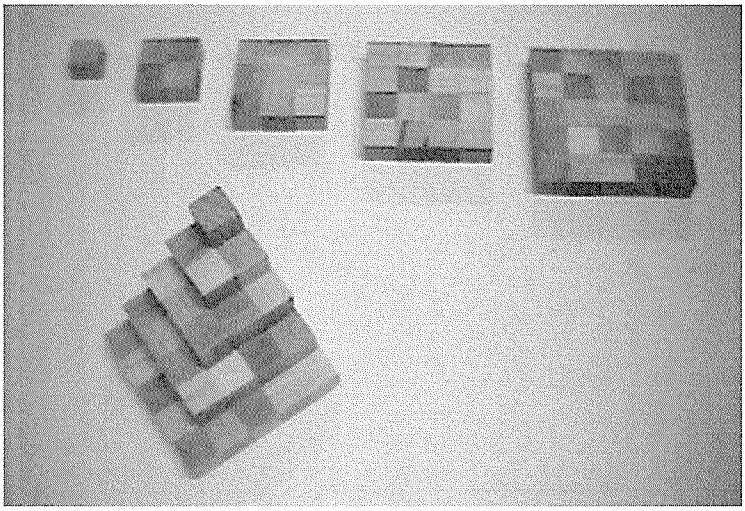

図2　平方数の和を求める教具(1)

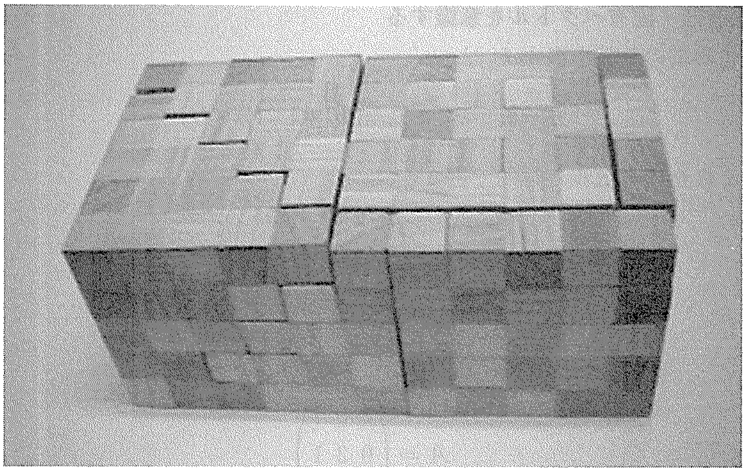

図3　平方数の和を求める教具(2)

この教具は、清水貞人からアイディアを得ている*21。図2の上には

$$0^2+1^2+1^2+2^2+4^2+5^2$$

を表すタイル(立方体)がある。これを積み上げると図2の下のようになる。この立体を6つ集めてうまく組み上げると、5×6×11の直方体が完成する(図3)。これと、同様に10段のもので組み立てを実行した後、一般にn段では$n\times(n+1)\times(2n+1)$の直方体になることを実感してもらうのである。

さらに、数学的帰納法についても教科書で取り上げられる場合は、具体的イメージのない数列についてa_nを予想した上で、数学的帰納法による証明を解説する場合が多い。本プランでは、「欠損チェス盤問題」*22を具体例として数学的帰納法を説明することにする。

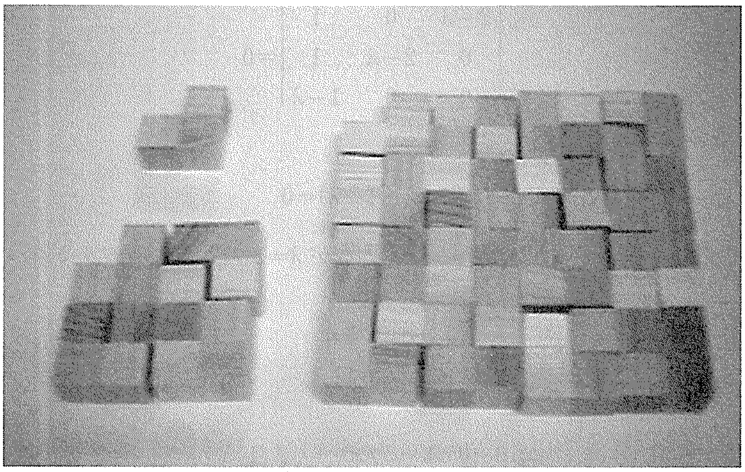

図4　欠損チェス盤

＊21　清水貞人「「自然数の平方の和」の指導について」(http://www.nikonet.or.jp/spring/heihou/heihou.htm) 2004年12月現在参照。

＊22　秋山仁『数学流生き方の再発見 ―― 数学嫌いに贈る応援歌 ――』中央公論新社、1990年、6-14頁参照。

4.5　行列と固有値・固有ベクトルを意識する

n段のハノイの塔の手数を表すh_nは、

$$h_0=0、\qquad h_{n+1}=2h_n+1 \quad (n\in N)$$

で表される。これをベクトルと行列で書くと、

$$\begin{pmatrix} h_{n+2} \\ h_{n+1} \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_{n+1} \\ h_n \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる。

ここで

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおく。一般に行列Aとスカラーλに対して

$$A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x} \qquad (\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0})$$

を満たすベクトルxを行列Aの固有ベクトル、λを固有値という。この式は単位行列Iを用いて

$$(A-\lambda I)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$

と表せる。これが自明でない解をもつ必要十分条件は行列式について

$$|A-\lambda I|=0$$

が成り立つことである。$|A-\lambda I|=0$すなわち

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0$$

は、Sarrusの展開によって

$$(2-\lambda)^2(1-\lambda)=0$$

となる。これを満たすλは$\lambda=1,2$である。ところが$\lambda=2$のとき固有ベクトルxを

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおくと

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

となり$\boldsymbol{0}$が出てこない。したがって、$\lambda=1$の可能性のみが残る。$\lambda=1$のとき、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}=\mathbf{0}$$

より、

$$\begin{cases} x+1=0 \\ y+1=0 \end{cases}$$

となり、

$$x=y=-1$$

より固有ベクトル

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を得る。

話を数列 h_n に戻せば、$h_0=-1$ とすれば任意の $k\in\mathrm{N}$ に対して $h_k=-1$ となる。

漸化式が

$$a_{n+1}=pa_n+q$$

の a_n を求めるとき、こっそりと $a_{n+1}=a_n=\alpha$ とおいてできる一次式

$$\alpha=p\alpha+q$$

の解を $\alpha=\frac{q}{1-p}$ と求めると、数列 $\{a_n-\frac{q}{1-p}\}$ が公比 p の等比数列になる*23 ことを利用するという「大学受験テクニック」がある。本プランは「こっそり $a_{n+1}=a_n=\alpha$ とおく」ことの意味をグラフ上にイメージ化することに成功している*24。

---

*23

$$a_{n+1}=pa_{n+1}+q$$
$$a_{n+1}=pa_{n+1}-\frac{q}{1-p}(p-1)$$
$$a_{n+1}=pa_{n+1}-\frac{pq}{1-p}+\frac{q}{1-p}$$
$$a_{n+1}-\frac{q}{1-p}=pa_{n+1}-\frac{pq}{1-p}$$
$$a_{n+1}-\frac{q}{1-p}=p\left(a_{n+1}-\frac{q}{1-p}\right)$$

*24　この節の内容については、遺愛女子中学高等学校の西谷優一の報告から大きな示唆を受けた。西谷優一「Nishiya の記号について」（北海道地区数学教育協議会高校サークル 2003 年 3 月例会研究発表資料）参照。

5　数列の授業プランの公理的体系

「数学教育は数学を教える教科である」*25 を前提とするとき、数学の教育内容・教材の体系は学問としての数学に倣って公理的体系をなしていなければならない。新しい数学の授業プランの提案は、「すべての生徒に理解可能な順序(＝認識過程の法則性)」*26 という原理に基づいて再構成した数学の新たな公理的体系の提案と同値である。少なくとも、子どもが数学的論理の面において飛躍や矛盾を感じるところがあるような授業プランは、「すべての生徒に理解可能」とはならない。

以下は、本プランの公理的体系を定義・定理の系列で述べたものである。本プランをさらに改善してゆく際には、この系列における各定義・定理をつなぐ授業展開に問題があるのか、あるいはそもそも系列のいずれかの場所に根本的な欠陥があるのかを考察するための、出発点ともなるだろう。

定義　(数列)
数を次々に並べたものを数列という。
定義　(無限数列・有限数列)
数がどこまでも続く数列を無限数列という。どこかで終わる数列を有限数列という。
定義　(第 n 項)
数列 $\{a_n\}$ の n 番目の数を第 n 項といい、a_n と書く。
定義　(漸化式)
a_n から、次の項 a_{n+1} を定める規則を表した式を、漸化式という。
定理 1.　数列は、漸化式と a_n がわかれば決まる。
定義　(等差数列)
漸化式が定数 d を用いて

$$a_{n+1}=a_n+d$$

と表される数列を、等差数列という。d を公差 (difference) という。
定理 2.　等差数列は、漸化式［または公差］と任意の 1 項がわかれば決まる。
定理 3.　等差数列 $\{a_n\}$ は、任意の 2 項 $a_i, a_j\ (i<j)$ がわかれば決まる。
定理 4.　等差数列 $\{a_n\}$ で、a_n と公差 d がわかっているとき、

$$a_n=a_0+dn$$

定理 5.
(1). 等差数列の a_n は、n の一次式である。
(2). 逆に、a_n が n の一次式である数列は等差数列である。

---

*25　遠山啓「数学教育の基礎」(『岩波講座現代教育学』第 9 巻、1960 年)。
*26　高村泰雄編著『物理教授法の研究 —— 授業書方式による学習指導法の改善 ——』北海道大学図書刊行会、1987 年、12 頁。

定義　（階差数列）

数列 $\{a_n\}$ があるとき、$b_n = a_{n+1} - a_n$ で定義される数列 $\{b_n\}$ を、階差数列という。

定理 6.　数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とするとき、

$$a_n = a_0 + (b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + \cdot\cdot\cdot + b_{n-1})$$

定理 7.　$a_n = a_0 + d_n$ で定義される等差数列の a_0 から a_n までの和は、n の二次式になり、

$$\frac{(2a_0 + dn)(n-1)}{2}$$

定理 8.　自然数の和

$$0+1+2+3+\cdot\cdot\cdot+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

定理 9.

(1). 階差数列が等差数列になる数列の a_n は、n の二次式である。

(2). 逆に、a_n が n の二次式である数列は、階差数列が等差数列である。

定理 10.　平方数の和

$$\begin{aligned} &0^2+1^2+2^2+3^3+\cdot\cdot\cdot+n^2 \\ &=0+1+4+9+\cdot\cdot\cdot+n^2 \\ &=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

定理

$$0^3+1^3+2^3+3^3+\cdot\cdot\cdot+n^3 = 0+1+8+27+\cdot\cdot\cdot+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

定義　（等比数列）

漸化式が定数 r を用いて

$$a_{n+1} = ra_n$$

と表される数列を、等比数列という。r を公比（ratio）という。

定理 11.　等比数列は、漸化式［または公比］と任意の 1 項がわかれば決まる。

定理 12.　等比数列 $\{a_n\}$ は、任意の 2 項 a_i, a_j ($i < j$) がわかれば決まる。

定理 13.　等比数列 $\{a_n\}$ で、a_0 と公比 r がわかっているとき、

$$a_n = a_0 r^n$$

定理 14.　$a_n = a_0 r^n$ で定義される等比数列の a_0 から a_n までの和は、

$$\begin{cases} \dfrac{a_0(1-r^{n+1})}{1-r} & (r \neq 0) \\ a_0(n+1) & (r=1) \end{cases}$$

定理 15.

$$1+2+4+8+16+\cdot\cdot\cdot+2^n = 2^{n+1}-1$$

定理 16.　等比数列 $\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ は $b_0 = a_0(r-1)$、公比 r の等比数列である。

定理　漸化式が

$$a_{n+1}=pa_n+q, \qquad (p \neq 1)$$

の数列では、

$$a_0=\frac{q}{1-p}$$

のとき任意の n に対して $a_0=a_n$

定義　(数学的帰納法)

(1)．p_0 が成り立つ。

(2)．p_k が成り立つとき p_{k+1} が成り立つ。

の二つが成り立つとき、$n \geqq 0$ であるすべての n について p_n は成り立つ。このような証明を数学的帰納法による証明という。

定義　(フィボナッチ数列)

次の初期条件と漸化式

$$\begin{cases} f_0=0 \\ f_1=1 \\ f_{n+2}=f_{n+1}+f_n \qquad (n \geqq 0) \end{cases}$$

で定まる数列 $\{f_n\}$ をフィボナッチ数列という。

6　終わりに

本誌に掲載の【第二部　授業案編】は、2003年11月より、「wakhok 数学サークル203」[*27] において3名の学生とともに検討された。3名のうち2名は高校で数列を学んできているが、1名はそうではない。階差数列を早めに出すことはそれほど抵抗感がなかったように思われる。初項を a_0 とすることもにも少しずつ慣れてきて、その利便性を感じてくれているようである。この検討の中でいくつかの書き換えを要する部分が見つかった。本稿で述べた理論はその成果を生かした改良バージョンである。粗雑なレベルにあったプランの検討につき合ってくれた平田真弓、斉藤敦、石川雄美子の三名に改めてお礼を申し述べたい。

また、本研究の中間段階で、須田勝彦氏を中心とする北海道大学大学院教育学研究科数学教育研究グループの研究会の中で報告する機会を得られ、貴重な意見を頂戴した。また、北海道地区数学教育協議会高校サークルの例会では、【本論編】、【授業案編】の双方にわたってご検討いただく機会を得た。ここに記して感謝申し上げたい[*28]。さらに、2004年11月2日、音更中学校において3年生の数学の時間を1時間頂戴し、数学的帰納法の部分について授業実践させていただく機会が得られたことを記しておきたい。

＊27　稚内北星学園大学数学教育研究グループの愛称。

＊28　現在、本【本論編】ほか本誌に掲載の【授業案編】【解説編】をまとめて、北海道地区数学教育協議会高校サークル編集のブックレット第3号として発行しようという計画がなされている。