関数指導の一環としての
高等学校数学「数列」の授業プラン【第二部　授業案編】

——階差数列の研究を中軸に据えて——

高　橋　哲　男
(稚内北星学園大学情報メディア学部)
小丹枝　みゆき
(幕別町立札内中学校)

目　　次 (授業プランのページ番号)

高橋哲男・小丹枝みゆきは、本誌に掲載の高橋哲男「関数指導の一環としての高等学校数学「数列」の授業プラン【第一部　本論編】―― 階差数列の研究を中軸に据えて ――」に基づき、以下に示すような授業案を作成した。これは授業中に生徒に配布して利用されるものである。ページの区切り目も意識して作成されている。なお、同じく本誌に掲載の高橋哲男「関数指導の一環としての高等学校数学「数列」の授業プラン【第三部　解説編】―― 階差数列の研究を中軸に据えて ――」も併せてご参照いただきたい。

1 数列

1.1 数列

数を次々に並べたものを数列という。

$$3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 3, \cdots$$

数がどこまでも続く数列を無限数列という。どこかで終わる数列を有限数列という。

図形の点は、P,Q,R,$\cdots$ のようにアルファベット大文字で書いて区別することが多い。数列は、小文字に添え字 n をつけて、$\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}, \cdots$ のように書いて区別する。

問題 1. 次の数列はどんな規則でできているだろう。続く数を 5 つ求めてみよう。

$\{a_n\}$: $20, 17, 14, 11, 8, \boxed{\quad}, \boxed{\quad}, \boxed{\quad}, \boxed{\quad}, \boxed{\quad}$

規則：

$\{b_n\}$: $\frac{2}{27}, \frac{2}{9}, \frac{2}{3}, 2, 6, \boxed{\quad}, \boxed{\quad}, \boxed{\quad}, \boxed{\quad}, \boxed{\quad}$

規則：

$\{c_n\}$: $1024, -512, 256, -128, 64, -32, 16, \boxed{\quad}, \boxed{\quad}, \boxed{\quad}, \boxed{\quad}, \boxed{\quad}$

規則：

$\{d_n\}$: $19, 58, 29, 88, 44, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, \boxed{\quad}, \boxed{\quad}, \boxed{\quad}, \boxed{\quad}, \boxed{\quad}$

規則：

1.2　規則性のない数列

- $\{e_n\} : 6, 4, 4, 1, 1, 3, 1, 1, 1, 1, 3, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 3, 1, 1, 2, 2, 3, 1, 2, 2$
  (西武ライオンズの 1979 年から 2004 年までのパリーグでの順位)
- $\{f_n\} : 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1$
  (十円玉を 20 回投げて表が出たら 0、裏が出たら 1 を記録したもの)

数列 $\{e_n\}, \{f_n\}$ には規則性がなく、次に続く数を求めることはできない。

非常に規則正しい形のものでなければ学問の力の及ぶ所でない。現在目の前にあるやうな不規則な形のものに依っては学問は成立たない。学問の領域と云ふのは非常に情けないものである（林鶴一『初等幾何学の体裁』弘道館、1912 年、12 頁)。

1.3　数列の項

数列 $\{a_n\}$ の n 番目の数を第 n 項といい、a_n と書く。
数は 0 から始まるのだろうか、1 から始まるのだろうか。どちらの考え方もあるが、このプリントでは 0 から始まると考えよう。数列の最初の数を第 0 項といい a_0 と書く。

問題 2.　数列 $\{g_n\}, \{h_n\}$ の規則が $\{d_n\}$ と同じだとする。$g_0 = 9, h_0 = 12$ のとき、それぞれ、第 9 項までを求めて表にしてみよう。

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\cdots$
g_n	9										$\cdots$
h_n	12										$\cdots$

数列は、規則と a_0 がわかれば決まる。

1.4　数列の本質

数列 $\{a_n\}$ では、自然数 n を決めると、実数 a_n がただひとつ定まる。数列は、自然数から実数への写像（対応）であると見ることができる。

2　等差数列

2.1　漸化式

a_n から、次の項 a_{n+1} を定める規則を表した式を、漸化式という。例えば、数列 $\{a_n\}$ の漸化式は、

$$a_{n+1} = a_n - 3$$

である。数列 $\{d_n\}$ の漸化式は、

$$\begin{cases} d_{n+1} = \frac{1}{2}d_n & (d_n\text{が偶数のとき}) \\ d_{n+1} = 3d_n + 1 & (d_n\text{が奇数のとき}) \end{cases}$$

である。

問題 3.　数列 $\{b_n\}, \{c_n\}$ の漸化式を求めてみよう。

$b_{n+1} =$

$c_{n+1} =$

問題 4.　次の a_0 と漸化式で決まる数列 $\{a_n\}$ の、a_9 までを求めてみよう。

(1). $a_0 = 0, \qquad a_{n+1} = a_n + 2$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\cdots$
a_n	0										$\cdots$

(2). $a_0 = 1, \qquad a_{n+1} = 2a_n$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\cdots$
a_n	1										$\cdots$

定理 1.　数列は、(漸化式と a_0) がわかれば決まる。

2.2　等差数列の漸化式

問題 4 の (1) のような、漸化式が定数 d を用いて

$$a_{n+1} = a_n + d \qquad (a_{n+1} - a_n = d)$$

と表される数列を、等差数列という。d を公差 (difference) という。

問題 5.　次の等差数列の a_0 から a_9 までを求めてみよう。

(1). $a_0 = 4, \quad a_{n+1} = a_n + 3$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\cdots$
a_n	4										$\cdots$

(2). $a_5 = 7, \quad a_{n+1} = a_n + 2$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\cdots$
a_n						7					$\cdots$

(3). $a_7 = 5, \quad a_{n+1} = a_n - 4$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\cdots$
a_n								5			$\cdots$

問題 6.　数列の漸化式が $\{d_n\}$ と同じで $a_4 = 5$ のとき、a_0 から a_{10} までを求めてみよう。

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\cdots$
a_n					5						$\cdots$

定理 2.　等差数列は、(漸化式〔または公差〕と任意の 1 項) がわかれば決まる。

2.3　等差数列の公差

問題 7.　$\{a_n\}$ を等差数列とする。次のそれぞれの場合に、公差 d を求めてみよう。
また、a_0 から a_9 までを求めてみよう。

(1). $a_5 = 6, \quad a_7 = 14 \quad \Rightarrow \quad d =$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\cdots$
a_n						6		14			$\cdots$

(2). $a_1 = 3, \quad a_6 = -7 \quad \Rightarrow \quad d =$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\cdots$
a_n		3				-7					$\cdots$

(3). $a_4 = -3, \quad a_5 = -1 \quad \Rightarrow \quad d =$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\cdots$
a_n					-3	-1					$\cdots$

(4). $a_2 = -4, \quad a_8 = -4 \quad \Rightarrow \quad d =$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\cdots$
a_n			-4						-4		$\cdots$

定理 3. 等差数列 $\{a_n\}$ は、任意の 2 項 a_i, a_j（$i < j$）がわかれば決まる。

n	0	$\cdots$	i	$\cdots$	j	$\cdots$
a_n	a_0	$\cdots$	a_i	$\cdots$	a_j	$\cdots$

このとき、公差 $d =$

2.4 等差数列の a_n

問題 8. 次の数列の a_0 を求めてみよう。

(1). $a_4 = 23, \qquad a_{n+1} = a_n + 5$

(2). $a_6 = -3, \qquad a_{n+1} = a_n - 2$

(3). $a_{2005} = 50000, \qquad d = 4$

(4). $a_k = 4, \qquad d = 3$

定理 4. 等差数列 $\{a_n\}$ で、a_n と公差 d がわかっているとき、

$a_0 =$

これを変形して、

$a_n =$

問題 9. 問題 8 のそれぞれの a_n を n の式で表してみよう。

(1). $a_n =$

(2). $a_n =$

(3). $a_n =$

(4). $a_n =$

問題 10. $a_n = p + qn$ の数列が等差数列であることを証明しよう。

定理 5.

(1). 等差数列の a_n は、n の一次式である。

(2). 逆に、a_n が n の一次式である数列は等差数列である。

3 階差数列

3.1 直線による平面の分割

問題 11. 平面に直線を 1 本引くと、平面を 2 つの部分にわけることができる。

(1). 平面に直線を 2 本引くと、平面を最大でいくつにわけることができるだろう。

(2). 平面に直線を 3 本引くと、平面を最大でいくつにわけることができるだろう。

(3). 平面に直線を 4 本引くと、平面を最大でいくつにわけることができるだろう。

(4). 平面に直線を 5 本引くと、平面を最大でいくつにわけることができるだろう。

(5). 平面に直線を n 本引いたときの、わけられた平面の最大数を p_n とすると、次の表ができる。$p_0, p_6, p_7, p_8, p_9, p_{100}$ を予想してみよう。

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\cdots$	100	$\cdots$
p_n		2	4	7	11	16					$\cdots$		$\cdots$

3.2 階差数列と a_n

数列 $\{a_n\}$ があるとき、$b_n = a_{n+1} - a_n$ で定義される数列 $\{b_n\}$ を、階差数列という。

$$\begin{array}{lccccccccccccc}
\{a_n\}: & a_0 & & a_1 & & a_2 & & a_3 & & \cdots & & a_n & & a_{n+1} \\
 & & \vee & & \vee & & \vee & & \cdots & & \cdots & & \vee & \\
\{b_n\}: & & b_0 & & b_1 & & b_2 & & b_3 & \cdots & b_{n-1} & & b_n &
\end{array}$$

問題 12. 次の数列 $\{a_n\}$ の階差数列を求めてみよう。また、a_{2005} を求めてみよう。

(1). 3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 3, $\cdots$

(2). 1, 3, 7, 15, 31, 63, $\cdots$

(3). 2, 8, 20, 40, 70, 112, $\cdots$

(4). 2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, $\cdots$

(5). 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, $\cdots$

(6). 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, $\cdots$

$$
\begin{array}{rl}
\cancel{a_1} - a_0 & = b_0 \\
\cancel{a_2} - \cancel{a_1} & = b_1 \\
\cancel{a_3} - \cancel{a_2} & = b_2 \\
\cancel{a_4} - \cancel{a_3} & = b_3 \\
\vdots & \\
+)\quad a_n - \cancel{a_{n-1}} & = b_{n-1} \\
\hline
a_n - a_0 & = b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{n-1} \\
a_n & = a_0 + (b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{n-1})
\end{array}
$$

定理 6. 数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とするとき、

$$a_n = a_0 + (b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{n-1})$$

階差数列の b_0 から b_{n-1} までの和がわかれば a_n がわかる。これから数列の和を考えよう。しかし、(2) の

$$2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \cdots$$

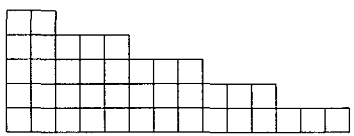
のような和はまだ難しい。まず、等差数列の和を研究する。

3.3 等差数列の和

問題 13. 次の等差数列の a_0 から a_{100} まで（101 個分）の和を求めてみよう。

$$\{a_n\}: \quad 2, 5, 8, 11, 14, \cdots$$

ヒント：



$$\vdots$$

問題 14. 次の等差数列の a_0 から a_n まで（ $n+1$ 個分）の和を求めてみよう。

$$\{a_n\}: \quad a_n = a_0 + dn$$

定理 7. $a_n = a_0 + dn$ で定義される等差数列の a_0 から a_n までの和は、n の二次式になり、

$$\frac{(2a_0 + dn)(n+1)}{2}$$

問題 15. 次の等差数列の和を求めてみよう。

(1). $a_0 = 7, d = 6$ の等差数列の、a_0 から a_{10} までの和。

(2). $a_0 = -10, d = 4$ の等差数列の、a_0 から a_{20} までの和。

(3). $a_0 = 5, d = 4$ の等差数列の、a_0 から a_n までの和。

問題 16. $a_n = n$ で定義される等差数列の a_0 から a_n までの和を求めてみよう。

定理 8.　自然数の和

$$0+1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

問題 17.　**問題 11** の p_{100} を計算しよう。

この結果は、$\{p_n\}$ の階差数列が等差数列 $1,2,3,4,5,\cdots$ と仮定した場合の予想である。この予想が合っているかどうかを、今確かめよう。

平面に n 本の直線を引いたとき、平面は p_n 個の部分にわけられている。ここに $n+1$ 本目の直線を引くとき、領域数を多くするには n 本すべての直線と交わるようにすればよい。

このとき、$n+1$ 本目の直線は、$n+1$ 個の部分にわけられる。この $n+1$ 個の部分が新しい境界になって、平面のわけられる部分は $n+1$ 個増えることになる。だから、

$$p_{n+1}=p_n+(n+1)$$

となる。よって、階差数列 $\{q_n\}$ を $q_n=p_{n+1}-p_n$ とすると

$$\begin{aligned}p_{n+1}-p_n&=n+1\\ q_n&=n+1\end{aligned}$$

となるので、階差数列 $\{q_n\}$ は、

$$1,2,3,4,5,\cdots$$

である。予想は正しかった。

問題 18.　次の数列の a_n を求めてみよう。

(1). $3,4,8,15,25,38,54,\cdots$

(2). $1,-7,-13,-17,-19,-19,-17,-13,-7,1,11,23,37,\cdots$

問題 19.　$a_n=pn^2+qn+r$ の数列は、階差数列が等差数列であることを証明しよう。

定理 9.

(1). 階差数列が等差数列になる数列の a_n は、n の二次式である。
(2). 逆に、a_n が n の二次式である数列は、階差数列が等差数列である。

3.4 平方数の和

問題 20. 数列 $\{a_n\}$ がある。

$$\{a_n\}: \quad 0, 0, 1, 5, 14, 30, 55, 91, \cdots$$

(1). $\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ を求めてみよう。

(2). $\{b_n\}$ の階差数列 $\{c_n\}$ を求めてみよう。

(3). c_n, b_n を求めてみよう。

(4). a_n を求めてみよう。

定理 10. 平方数の和

$$\begin{aligned} & 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 \\ & = 0 + 1 + 4 + 9 + \cdots + n^2 \\ & = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

一般に、階差数列の階差数列が等差数列である数列の a_n は、n の三次式になる。

問題 21.

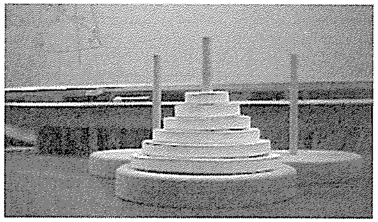
$$0^3 + 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = 0 + 1 + 8 + 27 + \cdots + n^3$$

を求められないだろうか。

4　等比数列

4.1　ハノイの塔

ハノイの塔は、3 本の棒と大きさが違う数枚の丸い板でできている。丸い板の中央には穴が空いている。最初は、下の図のように、大きな板から小さな板まで順に一つの棒に刺さっている。



問題は、この状態から始めて、他のどちらかの棒にすべての板を移すことである。板を動かす際には、次の二つの条件がある。

(1). 各棒の一番上にある板しか移動してはならない。どの棒に移動してもよい。
(2). どの板も、自分より大きな板の上にしか移動してはならない。

問題 22.　n 枚の板があるときの手数を h_n とする。

(1). 次の表を埋めてみよう（予想でもよい)。

n	0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
h_n	0								$\cdots$

(2). $\{h_n\}$ の階差数列 $\{i_n\}$ を求めてみよう。

n	0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
i_n									$\cdots$

4.2　等比数列の a_n

$\{h_n\}$ の階差数列 $\{i_n\}$ は、

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, \cdots$$

のように次々に 2 倍になっていると予想される。

問題 4 のとおり、この数列の漸化式は

$$i_{n+1} = 2i_n$$

である。

このように、漸化式が定数 r を用いて

$$a_{n+1} = ra_n \qquad \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} = r\right)$$

と表される数列を、等比数列という。r を公比（ ratio ）という。

問題 23.　次の等比数列の a_0 から a_9 までを求めてみよう。

(1). $a_0 = \frac{3}{16}$,　　$a_{n+1} = 2a_n$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\cdots$
a_n	$\frac{3}{16}$										$\cdots$

(2). $a_5 = 2$,　　$a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\cdots$
a_n						2					$\cdots$

(3). $a_7 = 5$,　　$a_{n+1} = -2a_n$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\cdots$
a_n								5			$\cdots$

定理 11.　等比数列は、(漸化式［または公比］) と (任意の 1 項) がわかれば決まる。

問題 24.　$\{a_n\}$ を等比数列とする。次のそれぞれの場合に、公比 r を求めてみよう。また、a_0 から a_9 までを求めてみよう。

(1). $a_5 = 6,\quad a_6 = 12 \quad \Rightarrow \quad r =$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\cdots$
a_n						6	12				$\cdots$

(2). $a_5 = 2,\quad a_7 = 18 \quad \Rightarrow \quad r =$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\cdots$
a_n						2		18			$\cdots$

(3). $a_4 = 2,\quad a_7 = -16 \quad \Rightarrow \quad r =$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\cdots$
a_n					2			-16			$\cdots$

(4). $a_2 = -4,\quad a_7 = -4 \quad \Rightarrow \quad r =$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\cdots$
a_n			-4					-4			$\cdots$

定理 12.　$r > 0$ の等比数列 $\{a_n\}$ は、任意の 2 項 a_i, a_j ($i < j$) がわかれば決まる。

n	0	$\cdots$	i	$\cdots$	j	$\cdots$
a_n	a_0	$\cdots$	a_i	$\cdots$	a_j	$\cdots$

このとき、公比 $r =$

定理 13.　等比数列 $\{a_n\}$ で、a_0 と公比 r がわかっているとき、

$a_n =$

4.3　等比数列の和

h_n を求めるためには等比数列 i_n の和がわかればよかった。一般の等比数列の和はどうなるだろう。

問題 25.　$a_0 = 1, r = 3$ の等比数列の、a_0 から a_5 までの和の求め方を考えてみよう。

問題 26.　a_0, r がわかっている等比数列の、a_0 から a_n まで ($n+1$ 個分) の和を求めてみよう。

定理 14. $a_n = a_0 r^n$ で定義される等比数列の a_0 から a_n までの和は、

$$\begin{cases} \dfrac{a_0(1-r^{n+1})}{1-r} & (r \neq 1) \\ a_0(n+1) & (r = 1) \end{cases}$$

問題 27. 次の等比数列の和を求めてみよう。

(1). $a_0 = 7, r = 2$ の等比数列の、a_0 から a_{10} までの和。

(2). $a_0 = 4, r = -1$ の等比数列の、a_0 から a_{20} までの和。

(3). $a_0 = 5, r = 2$ の等比数列の、a_0 から a_n までの和。

問題 28. $a_n = 2^n$ で定義される等比数列の a_0 から a_n までの和を求めてみよう。

定理 15.

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

ハノイの塔の問題の $\{h_n\}$ は、階差数列 $\{i_n\}$ が $i_0 = 1, r = 2$ の等比数列だと予想できた。この予想が正しいと考えると、

$$h_n =$$

この予想が合っているかどうかを、今確かめよう

n 段のハノイの塔を移す手数は h_n だった。

$n+1$ 段のハノイの塔を移すには、次の 3 つのステップを踏めばよい。

(1). 1 枚目から n 枚目までの板を右端に移す（ h_n 手かかる）。

(2). $n+1$ 枚目の板を中央に移す（ 1 手かかる）。

(3). 右端にある 1 枚目から n 枚目までの板を中央に移す（ h_n 手かかる）。

このことから、$\{h_n\}$ の漸化式

$h_{n+1} =$

ができる。

問題 29. 漸化式が $h_{n+1} = 2h_n + 1$ である数列 $\{h_n\}$ の階差数列 $\{i_n\}$ が、

$$i_{n+1} = 2i_n$$

になることを証明してみよう。

証明されたので、予想は正しかった。

ハノイの塔については、次のような伝説がある。

本物のハノイの塔には大きな石でできた 64 枚の板があり、お坊さんたちが毎日毎日板の移動を続けている。

予想． 一枚の板を一回移動するのに 1 分かかるとしよう。64 枚の板を移動するにはどれくらいの時間がかかるだろう。

(1)、1 日くらい
(2)、1 年くらい
(3)、1000 年くらい
(4)、1000000 年くらい
(5)、それ以上

4.4 等比数列の階差数列

問題 30. 次の等比数列の階差数列を求めてみよう。

(1). $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \cdots$

(2). $3, 6, 12, 24, 48, 96, \cdots$

(3). $72, 36, 18, 9, \frac{9}{2}, \frac{9}{4}, \frac{9}{8}, \cdots$

問題 31. 等比数列 $a_n = a_0 r^n$ の階差数列は、公比が r の等比数列になることを証明しよう。

定理 16. 等比数列 $\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ は $b_0 = a_0(r-1)$ 、公比 r の等比数列である。

5 数列の固有ベクトル

5.1 ハノイの塔と座標平面

ハノイの塔の数列

$$h_{n+1} = 2h_n + 1, \qquad h_0 = 0$$

の性質をもう少し研究しよう。

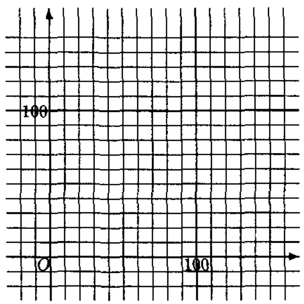
n	0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
h_n	0	1	3	7	15	31	63	127	$\cdots$

この $0, 1, 3, 7, 15, 31, \cdots$ を、

$$(0,1), \qquad (1,3), \qquad (3,7), \qquad (7,15), \qquad (15,31), \qquad \cdots$$

のように、ペアにする。

問題 32. 上のペアを「点」と考えて、下の座標にとってみよう。



これらの点はすべて直線 $y = 2x + 1$ 上にある。これは、$\{h_n\}$ の漸化式

$$h_{n+1} = 2h_n + 1$$

と関係がありそうだ。

5.2 漸化式と一次関数

問題 33. 漸化式が

$$a_{n+1} = 2a_n + 1$$

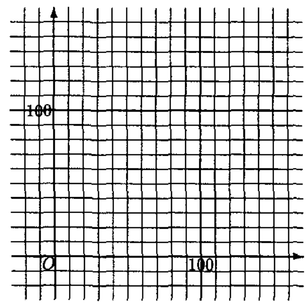
の数列がある。a_0 が次のそれぞれの場合に、$a_0, a_1, a_2, \cdots$ を求め、前の問題と同じように、点

$$(a_0, a_1), \qquad (a_1, a_2), \qquad (a_2, a_3), \qquad \cdots$$

を座標にとってみよう。

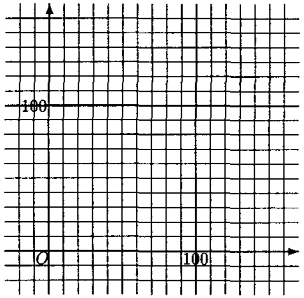
(1).

n	0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
a_n	2								$\cdots$



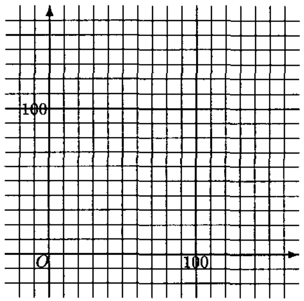
(2).

n	0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
a_n	$\frac{1}{4}$								$\cdots$



(3).

n	0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
a_n	-1								$\cdots$



漸化式が

$$a_{n+1} = 2a_n + 1$$

であれば、a_0 の値に関係なく、点

$$(a_0, a_1), \quad (a_1, a_2), \quad (a_2, a_3), \quad \cdots$$

は、直線 $y = 2x + 1$ 上にある。

5.3 固有ベクトル

問題 34. 漸化式が

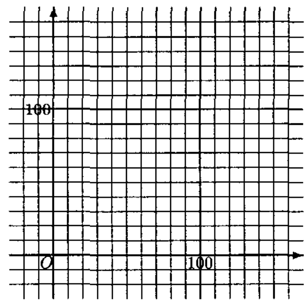
$$a_{n+1} = \frac{3}{5}a_n + 3$$

の数列がある。点

$$(a_0, a_1), \quad (a_1, a_2), \quad (a_2, a_3), \quad \cdots$$

がどれも同じになるような a_0 を求めてみよう。

n	0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
a_n									$\cdots$



問題 35. 漸化式が

$$a_{n+1} = pa_n + q$$

の数列で、

$$a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = \cdots = \cdots$$

となるとき、a_0 を p, q で表してみよう。

このとき、(a_0, a_1) を、この漸化式の固有ベクトルという。

5.4 固有ベクトルと等比数列

ハノイの塔の数列

$$h_{n+1} = 2h_n + 1, \qquad h_0 = 0$$

の固有ベクトルは、-1 だ。

問題 36. このとき、$h_n + 1$ を求めてみよう。

n	0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
h_n	0	1	3	7	15	31	63	127	$\cdots$
$h_n + 1$									$\cdots$

$\{h_n + 1\}$ は公比 2 の等比数列なので、

$$h_n + 1 =$$

ここから、

$$h_n =$$

となる。

固有ベクトルは、漸化式が $a_{n+1} = pa_n + q$ である数列を等比数列に変える役割をもつ。

6 数学的帰納法

6.1 $(2^n)^2 - 1$ の問題

問題 37.

$$a_n = (2^n)^2 - 1$$

で定義される数列 $\{a_n\}$ がある。

(1). a_0 から a_5 までを求めてみよう。

n	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
a_n							$\cdots$

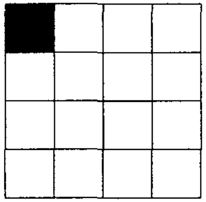
(2). a_0 から a_5 までがどれも 3 で割り切れることを確かめよう。

$n \geqq 0$ のとき a_n はすべて 3 で割り切れるのだろうか。

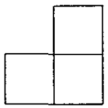
6.2 $(2^2)^2$ 欠損チェス盤問題

$a_2 = (2^2)^2 - 1 = 4^2 - 1 = 15$ は 3 で割り切れる。

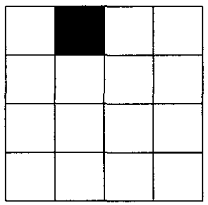
問題 38. 縦 4 マス横 4 マスのチェス盤がある。ただし一つの角が欠けている。

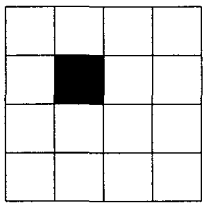


このチェス盤の残り 15 マスを、下の図形 5 つで埋め尽くすことができるだろうか。この図形は回転させて使ってもよい。以下ではこの図形を「基本パーツ」とよぶ。



欠けている部分が下のような場合はどうだろう。



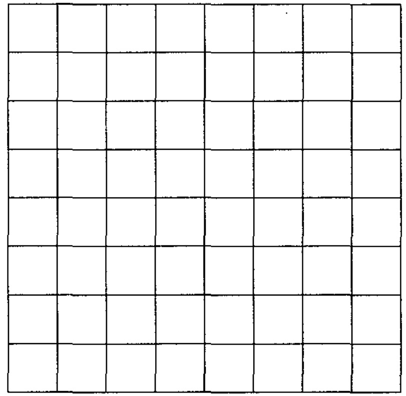


チェス盤の対称性により、縦 4 マス横 4 マスのチェス盤では、どこのマスが一つ欠けていても基本パーツで埋め尽くすことができる。

6.3 欠損チェス盤問題の一般化

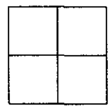
$a_3 = (2^3)^2 - 1 = 8^2 - 1 = 63$ は 3 で割り切れる。

問題 39. 縦 8 マス横 8 マスのチェス盤がある。



この場合も、欠けている一か所がどこにあっても、残り 63 マスを、基本パーツで埋め尽くすことができるだろうか。手分けして確かめてみよう。

縦 2 マス横 2 マスのチェス盤、縦 16 マス横 16 マスのチェス盤、縦 32 マス横 32 マスのチェス盤、…… ではどうだろうか。



$(2^n) \times (2^n)$ の欠損チェス盤は、欠けた部分がどこにあっても基本パーツで埋め尽くすことができる。

このことから、$(2^n)^2 - 1$ が 3 で割り切れることも証明された。

6.4 数学的帰納法

ところで、2×2 の欠損チェス盤が基本パーツで埋め尽くされること、そして、$a_1 = (2^1)^2 - 1 = 2^2 - 1 = 3$ が 3 で割り切れることは明らかである。

このように、

(1). a_1 が 3 で割り切れる。
(2). a_k が 3 で割り切れるとき a_{k+1} も 3 で割り切れる。

の二つが成り立てば、$n \geqq 1$ のすべての a_n が 3 で割り切れることが証明される。

これを一般化して、n についてのある命題 p_n（例えば $4^n - 1$ は 3 で割り切れる）について、

(1). p_1 が成り立つ。
(2). p_k が成り立つとき p_{k+1} が成り立つ。

の二つが成り立つとき、$n \geqq 1$ であるすべての n について p_n は成り立つ。このような証明を数学的帰納法による証明という。

この p_n が、$n \geqq 1$ であるすべての n について成り立つことを証明するには、つぎのように書く。

(1). $4^1 - 1 = 4 - 1 = 3$ である。これは明らかに 3 で割り切れる。つまり、p_1 は成り立つ。

(2). $4^k - 1$ は 3 で割り切れる、つまり、p_k は成り立つと仮定する。このとき $4^{k+1} - 1$ が 3 で割り切れるか調べる。

$$\begin{aligned} 4^{k+1} - 1 &= 4 \times 4^k - 1 \\ &= 4 \times 4^k - 4 + 3 \\ &= 4(4^k - 1) + 3 \end{aligned}$$

ところで、$4^k - 1$ が 3 で割り切れると仮定したので、それを 4 倍した $4(4^k - 1)$ も 3 で割り切れるし、それにさらに 3 を足した $4(4^k - 1) + 3$ も 3 で割り切れる。よって、p_{k+1} が成り立つ。

(1) と (2) により、$n \geqq 1$ であるすべての n について p_n が成り立つことが証明された。

問題 40. 数学的帰納法により、$n \geqq 1$ のとき $n^3 + 2n$ は 3 の倍数であることを証明しよう。

7 フィボナッチ数列と黄金比 τ

7.1 フィボナッチ数列

問題 41. 次の初期条件と漸化式

$$\begin{cases} f_0 = 0 \\ f_1 = 1 \\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \qquad (n \geqq 0) \end{cases}$$

で定まる数列 $\{f_n\}$ の f_{10} までを求めてみよう。

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	⋯
f_n	0	1										⋯

この数列 $\{f_n\}$ をフィボナッチ[*1]数列という。

[*1] 12〜13 世紀に活躍したイタリアの数学者。

問題 42.

$$g_n = \frac{f_{n+1}}{f_n} \qquad (n \geqq 1)$$

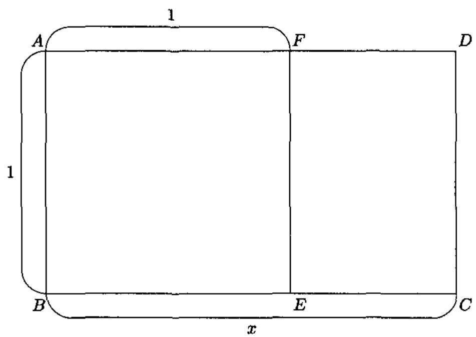
で定まる数列 $\{g_n\}$ の g_9 までを、小数点以下第 2 位まで求めてみよう。

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	⋯
f_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	⋯
g_n											⋯

g_n は n を大きくするとだいたい ＿＿＿＿＿ に近づくようだ。

7.2 黄金比

問題 43. たてが 1 、横が x の長方形 ABCD がある。ここから正方形 ABEF を切り取ると、長方形 DFEC が残る。長方形 DFEC が長方形 ABCD と相似になったという。x を求めてみよう。



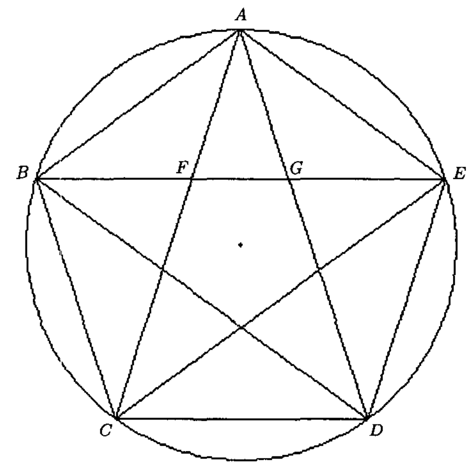
古代より、この $1:x$ の比をもつ長方形が最も美しいと考えられてきた。比 $1:x$ を黄金比という。

$\sqrt{5}=2.236\cdots$ なので、x は小数ではだいたい ＿＿＿＿＿ くらいだ。

7.3 正五角形の対角線

問題 44. 一辺が 1 の正五角形がある。対角線の長さ x を求めてみよう。

【ヒント；相似な図形を見つけてみよう。】



7.4　黄金比 τ

フィボナッチ数列 $\{f_n\}$ から作られる数列 $\{g_n\}$ の極限値、黄金比、一辺が 1 の正五角形の対角線はすべて等しい。この数を τ（タウ）という。

$$\tau = 1.618033989\cdots$$

τ は、π や e と並んで名前を与えられた特別な実数である。

n	f_n	g_n
0	0	–
1	1	$1.0000000\cdots$
2	1	$2.0000000\cdots$
3	2	$1.5000000\cdots$
4	3	$1.6666666\cdots$
5	5	$1.6000000\cdots$
6	8	$1.6250000\cdots$
7	13	$1.6153846\cdots$
8	21	$1.6190476\cdots$
9	34	$1.6176470\cdots$
10	55	$1.6181818\cdots$
11	89	$1.6179775\cdots$
12	144	$1.6180555\cdots$
13	233	$1.6180257\cdots$
14	377	$1.6180371\cdots$
15	610	$1.6180327\cdots$
16	987	$1.6180344\cdots$
17	1597	$1.6180338\cdots$
18	2584	$1.6180340\cdots$
19	4181	$1.6180339\cdots$
20	6765	$1.6180339\cdots$