「アルゴリズムとは何か」の授業と改訂プラン

―― 高校生1日体験入学における授業実践 ――

林　大輔(3年)，奥山　友貴(3年)，伊藤　由香(3年)
河野　匠(4年)，村上　歩(4年)，阿出川　祥代(4年)
(北海道大学教育学部教育方法学研究室)

目　　次

0．は　じ　め　に

北海道大学教育学部では，毎年6月に，高校生を対象とした1日体験入学を実施している。この体験入学の場で，教育方法学研究室に所属する学部3，4年生は，参加した高校生たちにたいして，1時間(60分)の授業を作成･実践している。この授業の目的は，高校生たちに，大学で行なわれる研究の一端を知ってもらうことである。この取り組みは1994年以来続けられているものであり，今年度で12回目となる[1]。

今年度行なわれたのは，「アルゴリズムとは何か」の授業である。この授業の中心は，最大公約数を求める方法であるユークリッドの互除法を整数論の入り口となる除法原理から導くことである。これを通して，「ある問題の類に属するすべての問題を，有限回の操作で一意的に解く手続きの体系」であるアルゴリズムについて，高校生たちに理解してもらうことをめざす。

本論においては，「アルゴリズムとは何か」の教育内容構成の具体案を提示し，第1次プランおよび第1次プランによる授業実践(1日体験入学で実施されたもの)の経過，および改訂プランを考察する。

1．「アルゴリズムとは何か」における教育内容構成

1．1．　設定された教育内容

本授業プランにおける教育内容を一言で述べるなら，除法原理から論理的過程を経てユークリッドの互除法を導き，これを元にアルゴリズムとは何かを理解することである。

除法原理とは，すべての非負の整数 $a,b\ (b\neq 0)$ に対して，$a=bq+r\ (0\leqq r<b)$ となる整数 q,r をただ1組だけ決める原理であり，この q を商，r を余りとすることで商と余りを定義する。さらに，$a=bq+r\ (b\neq 0)$ で $r=0$ のとき $a=bq$ であるが，このとき a を b の倍数，b を a の約数とすることで倍数，約数の概念を構成する。これは，負の整数にも容易に拡張される。商や余り，倍数や約数を構成するという意味で整数論の入り口となる重要な定理である。しかし，高校数学までの範囲ではその証明は難しく，また難しさに比して得るものは少ない。むしろ小学校以来習ってきた整数の割り算を定式化するものとして，授業プランの出発点で証明せずに用いることにする。そのためこれを除法原理と呼ぶことにする。

ユークリッドの互除法とは，2つの正の整数の最大公約数を求めるためのアルゴリズムである。ユークリッドの互除法は3つの命題から構成されている。

- 2つの数のうち，大きい数が小さい数の整数倍の場合は小さい数が最大公約数
- 余りがある場合は，割られる数と割る数の最大公約数＝割る数と余りの最大公約数
- 上の2つの命題をもとに，より小さな整数の組についての最大公約数を求める操作に還元する。この操作は有限回で終わる。

本授業プランでは，これら3つの命題の理解を幾何的方法と代数的方法で促している。ユークリッドの互除法の操作を，フローチャートを使って単純に示すのではなく，長方形を敷き詰める正方形を考えることで視覚に訴える幾何的操作[2]によって説明することで，その本質をより明確にする。さらに，ユークリッドの互除法の代数的方法による証明では，ある数の倍数同士の和，差もまたその数の倍数という除法原理から導かれる定理を使っている。

アルゴリズムとは，「ある類に属するすべての問題を，有限回の操作で必ず解く手続きの体系」[3]のことである。本授業プランではユークリッドの互除法がひとつのアルゴリズムであるということを重要な教育内容として取り扱い，最後にアルゴリズムの他の例としてエラトステネスのふるいを紹介する。

1.2. 先行事例の批判的検討

戦後，小中学校ではユークリッドの互除法はもちろん，初等整数論を体系的に教えるカリキュラムは公的には存在していなかった。自主的な実践的試みは現代化カリキュラムの時期に行われたことがある。高校数学では，かつて多項式におけるユークリッドの互除法が教科書で取り上げられたことがある。現在は，高校教科書ではコンピュータの節のところに見られるが，その内容は計算操作が主で，除法原理のことは何も出てこない。もちろん約数や倍数は定義されていない。長方形を正方形で敷き詰める図が載っているものもあるのだが，そこにある幾何的操作を代数的操作と対応させてはいない。単に計算ができるようになればいいといった感じを受ける。また，フローチャートが載っているものもあるが，幾何的操作の図との対応はない。ユークリッドの互除法がアルゴリズムであり，有限回の操作で終わることが重要な教育内容として意識されていない。アルゴリズムの指導としては致命的といえる。

ここでは先行研究として，本論作成のために参考にした実践プランの中から小学生対象の実践プラン，中学生対象の実践プランをそれぞれ1つずつ検討する。

1.2.1. 『現代化算数指導法事典』におけるユークリッドの互除法

現代化カリキュラムの時期に，小学生を対象とした初等整数論の指導の中で，しばしばユー

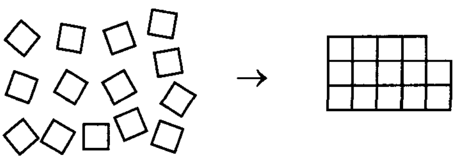
クリッドの互除法の指導は行われていた。その代表的なプランが『現代化算数指導法事典』に載せられている。その中でも，ユークリッドの互除法に直接関わりのある本間博「約数と倍数」[4]と松井幹夫「互除法」[5]の項を検討してみる。

本間博「約数と倍数」

本間は，約数と倍数の指導内容を次のようにしている。

§1 約数と倍数
（1）約数と倍数の意味
（2）約数
（3）倍数
（4）特別な数の倍数
§2 公約数と公倍数
（1）公約数
（2）公倍数

本間は§1（1）で除法原理をタイルを使って



14 という数を 3 をもとにして組み立てる
$14 = 3 \times 4 + 2$

と説明している。これは $a=bq+r\ (b\neq 0)$ で $0\leqq r<b$ ということを見事に表現している。これをもとに $r=0$ のとき $a=bq$　このとき a は b の倍数，b は a の約数と定義している。そしてそれらを使って丁寧に公倍数，公約数を導いている。小学生が対象なので一つひとつ丁寧に進めているのが特徴である。

松井幹夫「互除法」

松井は，互除法の指導内容を次のようにしている。

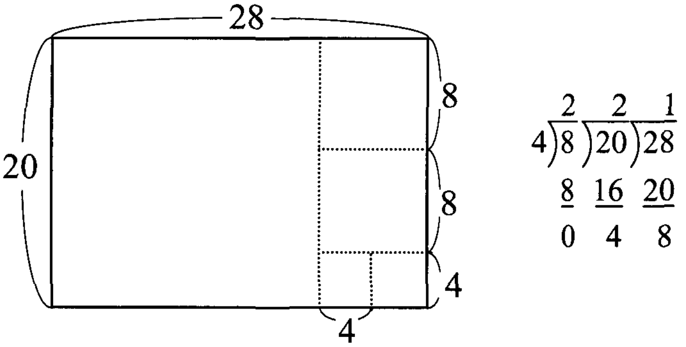
互除法による GCM，LCM の指導
（1）長方形を敷き詰める最大の正方形の 1 辺の長さは，長方形の 2 辺の長さの最大公約数であることに気づかせる
（2）$a\times b$ の長方形を敷き詰める最大の正方形をみいだす一般的な方法
（3）除法の計算（GCM の求め方）と（2）の方法を結びつける
（4）互除法の計算練習
（5）長方形を敷き詰めて作った正方形の 1 辺の長さが，長方形の 2 辺の公倍数であることに気づかせる
（6）（5）の発展として，長方形を敷き詰めて作る最小の正方形の 1 辺の長さ（つま

り最小公倍数）の一般的な求め方
（7）最小公倍数（LCM）の求め方の練習
（8）GCM，LCM の応用問題

このうち，（1）は長方形という図形と最大公約数とを結びつける段階である。ここが理解できないと，最大公約数を出すのになぜ長方形を使うのかがわからないまま先へ進んでしまうので，必要な段階だ。このとき使う長方形は，縦と横の長さの比が整数比になっていなければならない。そうでないと，正方形で敷き詰める作業が有限回で終わらないのである。だから何らかの形で整数比になることを保障しておくことが重要である。

（2）から互除法の指導であるが，最初は $a=3b$ つまり長方形の一辺が他方の整数倍の場合で指導する。その後に余りが出る場合を指導する。この順序はユークリッドの互除法を教える上で最善の順序だろう。すべての場合を $a=bq$ の形に還元するのがユークリッドの互除法なのだから，出発点として長方形の一辺が他方の整数倍の場合を最初に指導するのがよいだろう。この（2）で問題なのは，余りが出る $a=bq+r(r\neq 0)$ の場合に，1辺の長さが $\frac{b}{2}$ の正方形で余った部分を敷き詰めようとすることである。それでも敷き詰められなければ $\frac{b}{3}$, $\frac{b}{4}$ と小さい正方形を考えていくのである。これは論理的必然性から導かれた作業ではない。不要な試行錯誤より，すぐに余りで割る方が自然で，アルゴリズムに結びつきやすい。フローチャートも簡潔になる。そもそも長方形を，その長方形の短い辺を1辺とする正方形で敷き詰めようとしていくというのがユークリッドの互除法なのである。

（3）は，すでにいくつかの正方形に分けられた長方形の図と，それに対応した計算が書かれている。（数字は例）



割り算の筆算の書き方は，割る数が次の段階で割られる数になっていて工夫があってよいと思う。しかし，これだと図形のここの手順が計算だとここにあたるといった対応関係がはっきりと見えてこない。我々のプランでは，フローチャートと対応させて長方形がどのように正方形で敷き詰められるかが分かるようになっている。そこがこの指導内容と我々のプランの対比すべき点の1つである。

このプランと我々のプランの決定的な違いは，ユークリッドの互除法がアルゴリズム，つまり有限回の操作で必ず終わるということを述べていないことだ。有限回で終わらないとアルゴリズムとは言えない。

1．2．2．『現代化数学指導法事典』におけるユークリッドの互除法

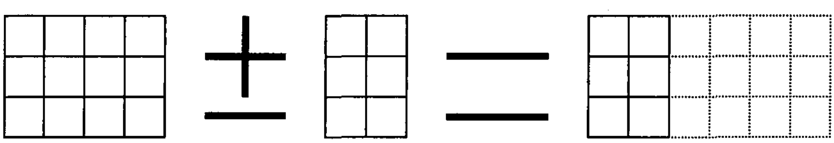
現代化カリキュラムの時期には中学生を対象とした初等整数論の指導の中で，しばしばユークリッドの互除法の指導が行われていた。その代表的なプランが『現代化数学指導法事典』に載せられている。その中でも，ユークリッドの互除法に直接関わりのある山田正直「約数と倍数」[6]「互除法」[7] を検討してみる。基本的な流れは本間，松井と同様であり互除法の指導としては大変優れたものである。

山田正直「約数と倍数」

山田は，約数と倍数の指導内容を次のようにしている。

（1）約数・倍数の定義（$a=bq+r$の式により）
（2）$a|b$の記号の使い方
（3）約数の性質
　（d_1）ある数の約数の個数は有限
　（d_2）$a|a$
　（d_3）$1|a$
　（d_4）$a|0$
　（d_5）$a|b, b|c \to a|c$
（4）倍数の性質
　（m_0）0の倍数は0だけ
　（m_1）0でない数の倍数の個数は無限
　（m_2）$a|a$
　（m_3）$1|a$
　（m_4）$a|0$
　（m_5）$a|b, b|c \to a|c$（または，$a|b \to a|mb$）
　（m_6）$a|b, b|c \to a|b \pm c$（または，$a|b \to a|mb$）

ランダウの記号「｜」は，約数と倍数の相互関係を見やすくするために$a=bq$という式を$b|a$と書くための記号である。ランダウの記号を使うことで，aはbの倍数，bはaの約数ということを$b|a$で表現できるのだ。このことから，（3）（d_2）～（d_5）と（4）（m_2）～（m_5）はまとめることができる。約数と倍数を別々にしてしまうと，ランダウの記号の有用性が見えなくなってしまう。倍数と約数とは，$a=bq$をaを主語とするのかbを主語とするのかの違いだけなのである。また，（m_6）は本論でも参考にしたが，タイルを使って



と理解しやすく書かれている。

山田正直「互除法」

山田は，互除法の指導内容を次のようにしている。

（1）公約数と最大公約数の定義
（2）(a, b)の記号の使い方
（3）公約数の性質
・公約数の個数は有限
・1はどんな2数でもその公約数
（4）ユークリッドの互除法
・定理
・算法
（5） 最大公約数の性質
(D_1)　公約数は最大公約数の約数
(D_2)　$(ma, mb)=m(a, b)$

このうち，（1）（2）（3）は同時に学ぶようになっている。本間と同様，ここで長方形という図形と最大公約数とを結びつけていて，必要な段階である。ここでは使う長方形の縦と横の長さの比が整数比になっていることを保障しているので問題はない。

（4）から互除法の指導である。最初は$a=3, b=21$つまり長方形の一辺が他方の整数倍の場合で指導する。その後に余りが出る場合を指導する。本間と同様ユークリッドの互除法を教える上で最善の順序で指導していると言えるのだ。また，定理のところではこのように書かれている。

次のように整除をつぎつぎと行ない，

$b=q_1a+r_1$

$a=q_2r_1+r_2$

$r_1=q_3r_2+r_3$

………………

$r_{n-1}=q_{n+1}r+0$

となるとき，$d=(b, a)=(a, r_1)=(r_1, r_2)=\cdots=(r_{n-1}, r_n)=r_n$となる。

証明する場合は次のようにすると理解できるかと思われる。

① $a|b \to d=(b, a)=a$

② $a|b$のとき，$b=qa+r$，$r|a \to (b, a)=r$

証明

（イ）$r|a$　　$\therefore r|qa$（m_5より）

　　　　　　$\therefore$　$r|qa+r=b$（m_6より）

（ロ）$d=(b, a)$とすると，

　　$d|a,$　　$\therefore$　$d|qa$，また$d|b$（m_5より）

　　　　　　$\therefore$　$d|b-qa=r$（m_6より）

(ハ) $r|a$, $r|b$だから r は a, b の公約数。しかも (ロ) より $d|r$ で d は a, b のGCM。だから$d=r$

(ニ) $r|a \therefore (a, r)=r$ (①より)

(ホ) まとめて$d=(b, a)=(a, r)=r$

③同様にして, $d=(b, a)=(a, r_1)=(r_1, r_2)=\cdots=(r_{n-1}, r_n)=r_n$

この定理は, $b=q_1a+r_1, a=q_2r_1+r_2, \cdots, r_{n-1}, =q_{n+1}+0$ としているが, n本の式を立てることは本質的ではない。「b と a の公約数= a と r の公約数」を示すほうが倍数·約数の性質を使うという意味で自然である。また, 余りがn回目の整除で0になるという保証をしていない, すなわち有限回の操作で必ず終わるということを述べていない。にもかかわらずいつか余りが0になるということを前提にしている証明なので, 完全なものとは言えない。定理の証明では, 幾何との対応関係を表す図がない。これは代数で何をやっているのかがわからなくなる原因である。

算法は, ただ2つの数字の最大公約数を計算して出しているだけである。定理の証明同様, 幾何との対応関係が見えない。

2.「アルゴリズムとは何か」による授業実践

2.1. 「アルゴリズムとは何か」の授業プランと授業実践記録

・授業形式

異なった高校から来た高校生を, 無作為に1グループ5, 6人として3グループに分け, 各グループに1人ずつ学生をティーチングアシスタントとして配置し, 学生1人が講師として授業を行い, 各グループで講師が出した質問 (問題) に対する議論を行ったうえで解答を発表するという形式で授業を実施した。授業時間は1時間である。

高校生の様子について, 授業開始時は, 異なる高校から来た高校生を無作為にグルーピングしたため, グループ内での議論はほぼ皆無に等しく, 講師およびティーチングアシスタントの発話を聞き, 単独で黙々と解答している状態であったが, 長方形の紙を折る作業を始めた頃から次第に同じグループ員と相談をする姿が見受けられるようになり, それ以降は徐々にグループ内での議論が進展していった。

・問題1

除法原理を理解することを目的とし, その方法として条件付加問題を提示する。「$a \geqq b$とします。すべてのa, b ($b \neq 0$) に対して, $a=bq+r$となるq, rが1組だけ決まります。このqを商, rを余りといいます。」という文に欠けている条件を答えさせるのである。

問題提示直後は相当数の高校生が混乱状態となり, 当初の予定より早く「割り算の商と余り」を例にした「ヒント」を提示せざるを得なかったが,「ヒント」を与えた後でも, アシスタントの補助発言を聞かないと答えを出せないグループが散見された。普段から当然だとみなし, 気にも留めなかった割り算の事実を概念化することは, 私たちの予想以上に困難であったと思われる。問題1は予定より大幅に時間を使った。

・用語

「$a=bq+r(b\neq 0)$で$r=0$のとき$a=bq$　このときaはbの倍数，bはaの約数と言います。」という用語の説明を行う。

・問題2①

公倍数，公約数，最小公倍数，最大公約数を言葉で説明する問題。これら4つのものが$a=bq$から自然と導かれることを理解するための問題。

自明と思っていたことを言葉で説明するという作業にかなりの高校生が戸惑いを示していたが，ティーチングアシスタントの助言等によって，「公倍数」を説明した後は，比較的順調に以降の公約数，最小公倍数，最大公約数にも解答していった。

・問題2②

a，b（$a\geqq b$）が共にmの倍数であるとき，$a+b$，$a-b$がmの倍数であることを証明する問題。①で確認したことの重要な性質に触れながら，互除法に必要な中心命題を証明することを意図する。

問題用紙下段に「ヒント」となる図が提示してあったが，図の意味を理解できている高校生はごく少数であった。しかし，アシスタントの誘導等により，かなり正解に近い証明をすることができた高校生が相当数見受けられた。この種の問題は普段から学校の授業の中でも行われているため，正解率が高かったと思われる。

・問題3

ある長方形を一辺ができるだけ大きな正方形で敷きつめるとき，どんな正方形になるかという問題。問題を確認後，裏面が方眼になっている長方形の紙とはさみを配布する。紙を対角線に折って正方形を作っていくという作業を通して，この作業が長い辺で短い辺を割り，最大公約数を求めているのだということを理解するための前段階の問題である。「どのような方法でも良い」という条件を提示する予定だったが，当日は縦と横が整数比であることが分かりにくい方眼を配布してしまったため，急遽「方眼を数えてはいけない」と条件を変更した。

第一段階においては縦14センチメートル，横28センチメートルの紙を配布し求めさせた。この紙は，対角線で一回正方形を折れば求められる長さに設定していたため，高校生はあまり悩むことなく，紙を対角線で一回折って正方形を求めることができたが，紙を切ろうとしたり，方眼を数えようとした高校生も若干名見受けられた。

続いて，縦15センチメートル，横20センチメートルの紙を配布し，同じ試行を求めた。この紙の場合は，対角線で折って，余った長方形をさらに対角線で折って正方形を求めるという試行を意図していたものの，一度折って長方形が余った後に手が止まる高校生が多数見受けられた。しかし，ティーチングアシスタントの助言等により，（授業作成者側の予想より）比較的短時間で求められる高校生が多数を占めた。

最後に，縦20センチメートル，横28センチメートルの紙を配布し，同じ試行を求めた。この紙の場合は対角線で折るという作業を3度繰り返す必要があるが，前段階の試行の効果もあり，比較的手際良く正方形を求めている高校生が数多く見受けられた。

・問題4①～④

ユークリッドの互除法と題し，問題3の作業を最大公約数を求めるフローチャートにして空欄を補充する問題。①で最初の長方形の28，14を例として示す。②からは実際にフローチャートの空欄補充を行う。20・15の後28・20，そして最後に a・b の最大公約数のフローチャートを完成させる。この問題の意図は，問題3で行った長方形を折るという作業が，最大公約数を求めていることと同義であることの確認である。

まずは①で28，14の最大公約数を求めると題し，完全なフローチャートを提示して講師が解説を行った。

続いて②では20，15の最大公約数を求めると題し，①を例としてフローチャートの穴埋めを試行させた。GCM＝（　　）に商を書き入れる高校生も見受けられた（これは次の③でも若干見受けられた）が，ティーチングアシスタント等の助言によって，比較的スムーズにフローチャートの穴埋めを進めていた。この流れは③で28，20の最大公約数を求める時点でも途切れることは無かった。

最後に，a，b の最大公約数を求めるという問題も出題したが，これ以前の試行によって要領を得ていたため，ある程度順調に解答していたが，「No」の場合の（　　）に適切な言葉を入れる際に戸惑いを見せる高校生もいた。この（　　）の中に「b を r で割る」という解答を書き入れる高校生もかなり見受けられた。

・証明

フローチャートがなぜ b と r に関して繰り返すことができるかを証明する。これはあらかじめプリントに証明が記入してある。この証明の意図は，必ず繰り返すことができることを証明することで，ユークリッドの互除法がアルゴリズムであるという事実に連結させることである。

この時点で予定時間を経過していたため，各自読んでおくようにという指示だけを与えた。

・問題5

GCM (4998, 2184) を求める問題。ここまで行ってきたことを確認するための問題である。

直前に行ったフローチャートによってGCMの求め方を理解していたため，計算間違いをしたり，フローチャートを書き始めたりする高校生も若干名見られたが，比較的スムーズに解答に辿り着いた場合がほとんどであった。

・問題6

ユークリッドの互除法が有限回で終わるかを確認する問題。この問題の意図は有限回で終わることの確認と同時に，整数という条件が必要であることの確認も兼ねている。

制限時間が迫っていたこともあり簡単な説明で終わらせた。

・結論

「アルゴリズムとは何か」と題された文を読み上げて，ユークリッドの互除法はひとつのアルゴリズムであるという説明をし，本授業実践を終了した。

・感想アンケートの内容

1．性別

男：３人　　女：12人

2．学年

２年生：６人　　３年生：９人

3．授業は理解できましたか？

とても理解できた：12人　　まあまあ理解できた：３人

あまり理解できなかった：０人

4．長方形を切る作業は楽しかったですか？

楽しかった：11人　　そんなに楽しくなかった：３人

まったく楽しくなかった：０人　（無回答：１人）

5．ユークリッドの互除法は便利だと思いましたか？

とても便利だと思った：13人　　まあまあ便利だと思った：２人

便利ではないと思った：０人

主な自由記述回答（任意抜粋）

・正方形の作り方とユークリッドの互除法が結びついてわかりやすかった。
・高校の授業とは違う。原理の成り立つ理由が分かると原理を理解しやすい。
・このような授業が学校で行われるととても楽しいし盛り上がる。
・数学は苦手であまり好きではなかったが，今回は楽しかった。
・途中でよく意味が分からなくなった。
・自分の頭の硬さが分かった。
・グループ学習に最初は戸惑ったが，慣れれば楽しいものなので高校でもやりたい。
・頭だけを使わず，手を使って考えるのはいい。
・頭で考えるのは簡単なのに，文にするのは難しかった。

2．2．「アルゴリズムとは何か」による授業実践の経過と改訂点

授業プラン「アルゴリズムとは何か」は，高校生１日体験入学での授業実践から見えてきた問題点，高校生の授業感想を踏まえて改訂した。ここでは，実践した改訂前のプランを順を追って検討し，その問題点をあげ，改訂後のプランではどのように取り扱われているかを述べる。

授業の構成は「Ⅰ　整数論の入り口」「Ⅱ　図形の中の量」「Ⅲ　ユークリッドの互除法」となっている。この大きな構成は，改訂前のプランと改訂後のプランでも変わっていない。

まず，「Ⅰ　整数論の入り口」の冒頭で，プランの前提として授業で用いる数を「負でない整数」と指定している。改訂後のプランでは，これに加えて，「整数の加法，減法，乗法」「長方形」という言葉を既知とするという条件を追加した。

問題１は，$a=bq+r$が商と余りを示すためには，$0\leqq r<b$という条件が必要であるということを発見することをねらいとした。しかし，授業では多くの高校生が何を考えてよいのかわからないといった様子で高校生自身が$0\leqq r<b$という条件を導き出すのは難しく，ヒントを提示して各班数名がやっと答えを出すことができたぐらいであった。そこで改訂後のプランでは，除法原理をそのままの形で提示することにした。そしてその後，この条件があるのとないのではどのように異なるのかということを学ぶために，実際にa，bの値を与え，商と余りを求める問題を最初にした。そしてその後$0\leqq r<b$という条件を除き，同じa，bの値で他のqとr

を求める問題を配置した。それによって，小学校以来学んできた整数の除法には，除法原理が用いられていることを明確にしたい。

問題2の①は，公倍数，公約数，最小公倍数，最大公約数を定義する問題である。この問題をはじめ，全体を通じて高校生は，知識を問われる問題を解くのは得意であるが，既知と思っていた事柄を定義するのは苦手であるという印象があった。また，高校生の感想文にも「頭で考えるのは簡単なのに，文にするのは難しかった」という感想が見られ，どのように答えてよいかわからない者が多かったこともうかがえる。②の代数を用いた証明は，高校で行ってもいるので，大体の生徒が式を組み立てて形にすることができていた。改訂後のプランでは，①はそのまま問題として残して，②を定理として説明することを求めている。①の問題文で公倍数の定義を例示し，まず公倍数の定義をどのように表現したらよいのかを明確にし，生徒達が，公約数，最小公倍数，最大公約数の定義を導きやすいようにした。

また，問題2の説明図として，どんな3の倍数同士をたしても，3の倍数となることを示す図を載せていた。これは授業の時にヒントにするようにとは指示したものの，図が何を意図するかがはっきりせず，どのようにこの後の授業につながっていくのかがわかりにくかった。改訂後のプランでは，平面だった図を立体的にし，立方体の数を12個，6個とし，意図を明確にした。

次に「II　図形の中の量」であるが，問題3として「ある長方形を1辺ができるだけ大きな正方形で敷き詰めるにはどんな正方形で敷き詰めればいいか」という，実際に高校生が手を動かし，答えを見つけていく問題を配置している。授業では，初め緊張していた高校生たちもこの問題あたりから緊張がほぐれて少しずつ授業に参加する様子が見られた。また，この作業を「楽しかった」「分かりやすかった」と評価する高校生が多く，改訂後のプランではこの部分はそのまま残されている。なお配布する長方形の紙は，次章の分も含めて裏に方眼があり，2辺が整数比であることを確かめるうるものに直した。それによって，方眼の数を数えて整数の問題に変換することも可能にした。

次に「III　ユークリッドの互除法」であるが，ここでは問題4として「II　図形の中の量」の長方形をできるだけ大きな正方形で敷き詰めるという作業をフローチャートで書くという問題があげられている。問題4は，①から④までである。そのうち①は例として実際にフローチャートを埋めたものであり，②から④は高校生が解く問題となっている。②③の問題は具体的な数であったため，大半の高校生が解くことができていたが，④の「a，bの最大公約数を求める」という問題では手が止まってしまう高校生が多かった。また，フローチャートに対応させた長方形が横に載せられているが，長方形とフローチャートとどこが対応しているのかがわかりにくかった。改訂後のプランでは，対応させる図に色を加え，対応している部分を太枠で囲ってどこと対応しているのかを見やすくした。

その次に「フローチャートでなぜスタートに戻れるのか」という問いに対し，図を用いた考え方と，公約数を用いた考え方の二つを載せている。授業では時間の制約があり，この考え方の説明をほとんど行わず，また載っている説明も簡単に終わらせた。高校生が充分に理解したとは思われない。そこで改訂後のプランでは，「$r \neq 0$のときなぜ$\mathrm{GCM}\ (a,b)=\mathrm{GCM}\ (b,r)$となるのか」と問題を明確に示し，図を用いた考え方については図をさらに見やすくし，また倍数の性質を用いた考え方を穴埋め形式の証明問題とした。

問題5では，4998，2184の最大公約数を求める問題があげられている。これまで習ったこと

を生かし，大きな数の最大公約数を求めるという問題であるが，大半の生徒が答えを導き出すことができていた。中には割る数を余りで割るところを，もとの数を余りで割ってしまう高校生や，割る数を商で割ってしまう高校生もいた。問題4の解説の図を見やすくすることによって改善できると予想している。

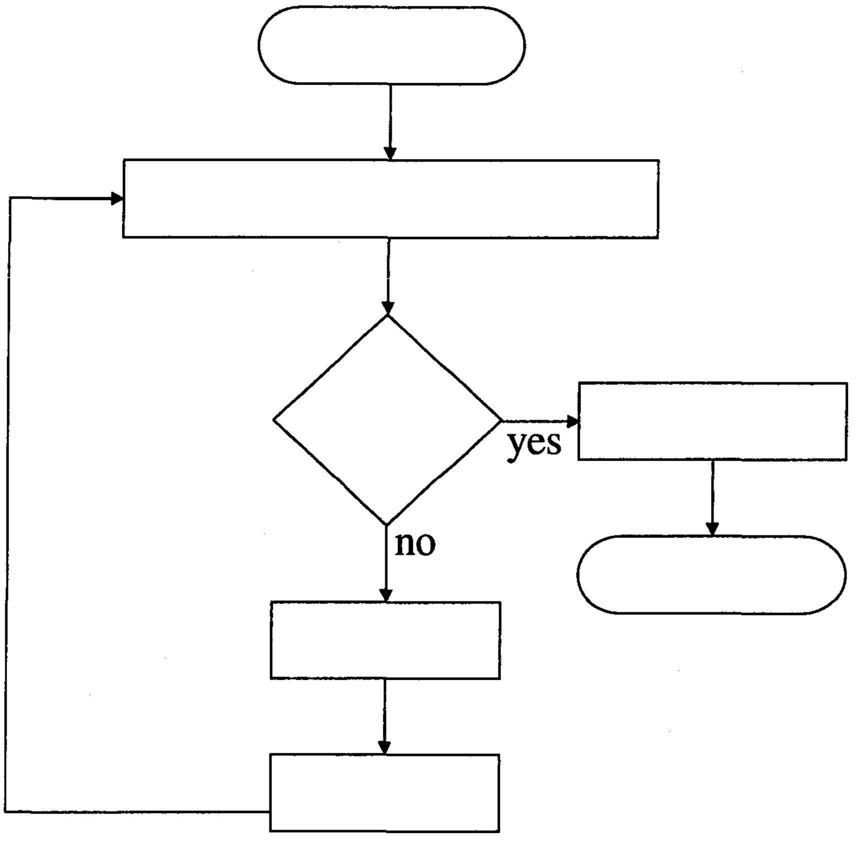
改訂後のプランでは，問題を練習とし，練習の下に問題④で行ったGCM (a,b) を求めるフローチャートを載せ，解答するのに役立つようにした。

問題6は「ユークリッドの互除法は有限回で終わるか」という問題であったが，授業実践では時間の関係で，教師が口頭で説明し，高校生に発言させることがなかった。改訂後のプランでは「有限性の問題」と題し，「流れ図は有限回でENDに行くのだろうか」と改め，更に「ア，どんな場合でも有限回でENDにいく」「イ，有限回でENDにいかない場合がある」と解答を選択式にした。a，bの比は整数比であり，ユークリッドの互除法で続く余りの列は真に減少していく。したがって，いずれ$r=0$となる。このような筋道で，整数比の場合は有限回で終わることを高校生に発見させたい。

その後，「アルゴリズム」の語の由来として，アルクワリズミの仕事に触れるとともに，それよりずっと以前から，「ユークリッドの互除法」や「エラトステネスのふるい」など，様々なアルゴリズムの例が知られていたことをまとめとして説明した。

3．「アルゴリズムとは何か」の改訂版

アルゴリズムとは何か



高校名 ________________________________

氏名 ________________________________

Ⅰ　整数論の入り口

- この授業では次の言葉を既知とします。
  - ・整数の加法、減法、乗法
  - ・長方形
- この授業で扱う数は「**負でない整数**」とします。

除法原理

次の定理は整数論の入り口となる定理で、商と余りを定義しています。

「すべてのa,b（$b \neq 0$）に対して、$a=bq+r$（$0 \leqq r<b$）となる

q,rが1組だけ決まる。このqを商、rを余りという。」

（1）　i）　$a=14,b=3$のときのq,rを求めてみよう。
　　　ii）　$a=48,b=6$のときのq,rを求めてみよう。

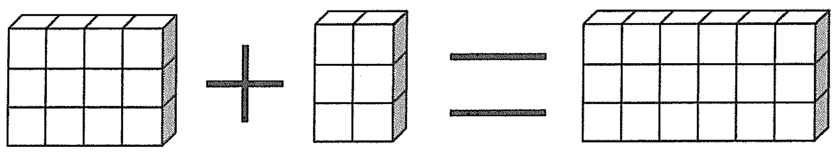
（2）　i）　$0 \leqq r<b$という条件を除き、$a=14,b=3$のときのq,rをすべて求めよう。
　　　ii）　$0 \leqq r<b$という条件を除き、$a=48,b=6$のときのq,rをすべて求めよう。

$a=bq+r(b\neq 0)$ で $r=0$ のとき $a=bq$ 　このとき a は b の倍数、b は a の約数といいます。

問　a の倍数かつ b の倍数となる整数を a と b の公倍数といいます。
a と b の公約数、最小公倍数、最大公約数をそれぞれ定義してみよう。

1 倍数の性質

2つの数 a,b $(a\geqq b)$ は共に m の倍数とします。
$a+b, a-b$ は m の倍数であることを証明してみよう。



II　図形の中の量

2 長方形を正方形で敷き詰める

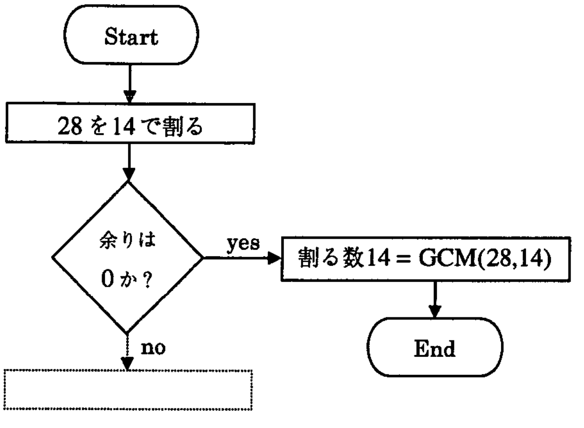
ある長方形を、一辺ができるだけ大きな正方形でぴったり敷き詰めたいとします。
どんな正方形で敷き詰めればよいでしょうか。
（なお、この長方形は大きな方眼紙から切り取ったものです。この長方形の辺は方眼と同じ向き、長方形の頂点は方眼紙の格子点上にとっています。）

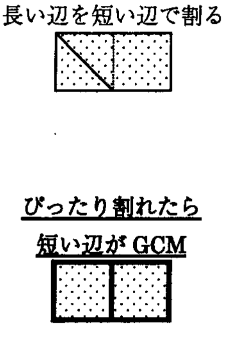
III　ユークリッドの互除法

3 フローチャート

IIの作業は下のようなフローチャートで書くことができます。
これを参考にして、①～③の空欄を埋めてみよう。

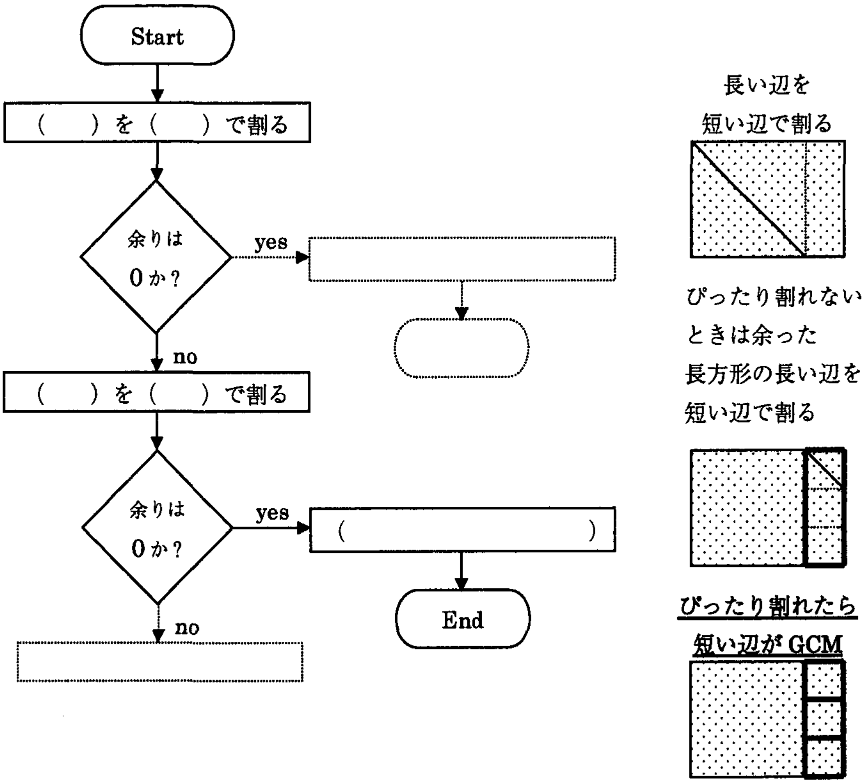
例　28,14の最大公約数を求めるフローチャート



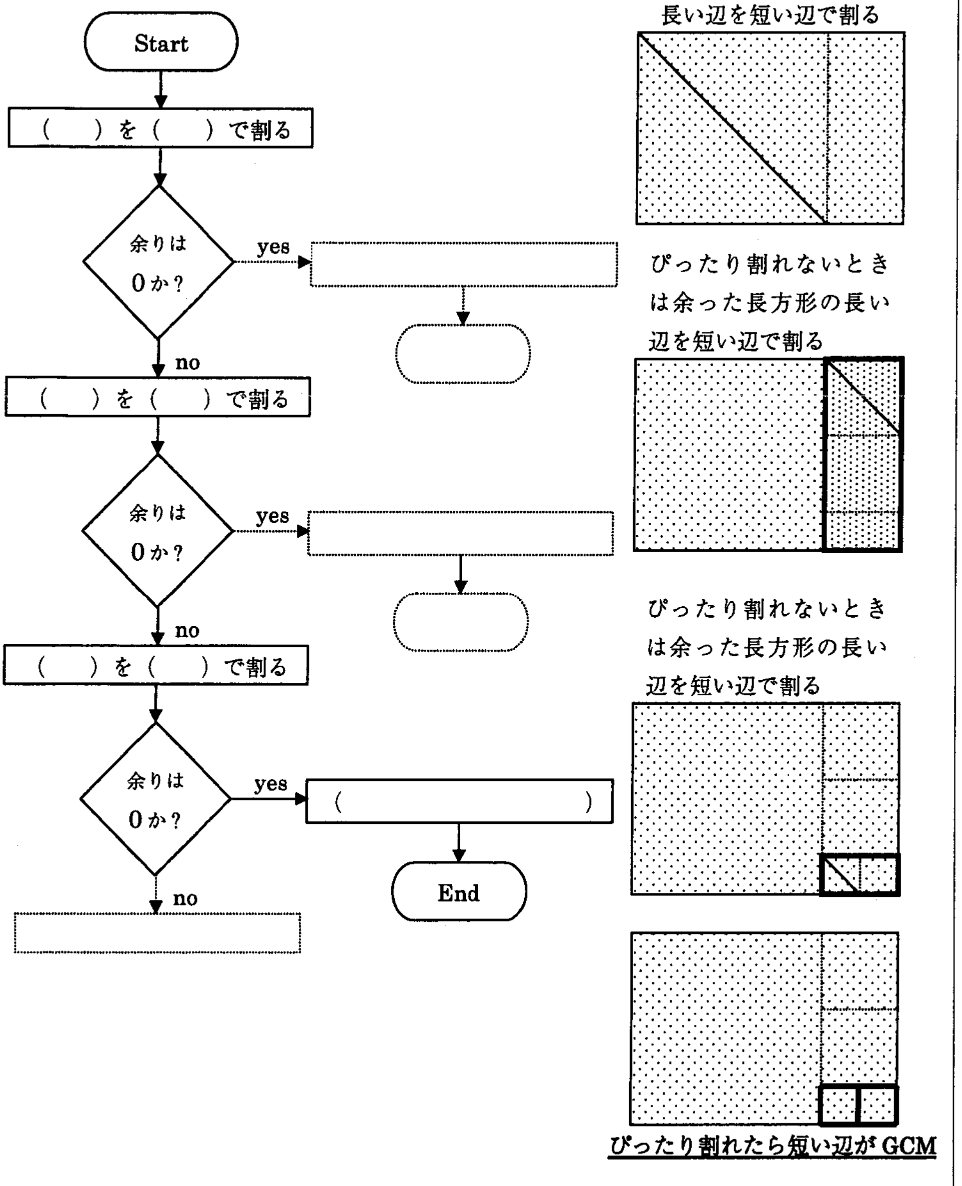


※最大公約数を英語で言うと greatest common measure、略してGCM
aとbの最大公約数をGCM(a,b)と書きます。

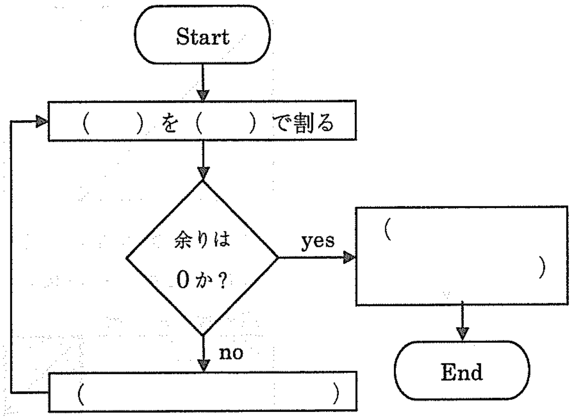
① 20,15の最大公約数を求めるフローチャート



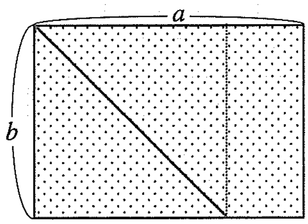
② 28,20の最大公約数を求めるフローチャート

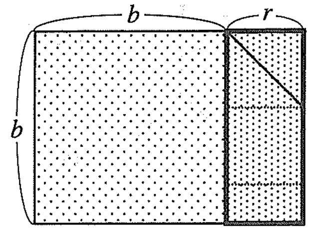


③　a,bの最大公約数を求めるフローチャート$(0<b\leqq a)$



長い辺を短い辺で割る





ぴったり割れないときは余った
長方形の長い辺を短い辺で割る

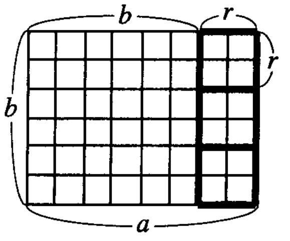
これをユークリッドの互除法という。

Euclid（ユークリッド）：ギリシャの数学者で、B.C.３００～２７０年ごろ生きた。Euclid は、その時代の幾何学と数論を編集し系統的にまとめて著名な教科書 Elements（『原論』）にした。この教科書は、およそ２０００年の間、学校で使われ，彼に「幾何学の父」という名をもたらした。

$r \neq 0$のときなぜ$\mathrm{GCM}(a,b)=\mathrm{GCM}(b,r)$になるのか？

$(a=bq+r, 0 \leqq r<b)$

証明 1



長方形(a,b)を敷き詰める正方形は
長方形(b,r)を敷き詰める。

長方形(b,r)を敷き詰める正方形は
長方形(a,b)を敷き詰める。

※　長方形(a,b)は一辺の長さがそれぞれa，bの長方形の意

4　証明 2

$a=bq+r\ (0 \leqq r<b)$

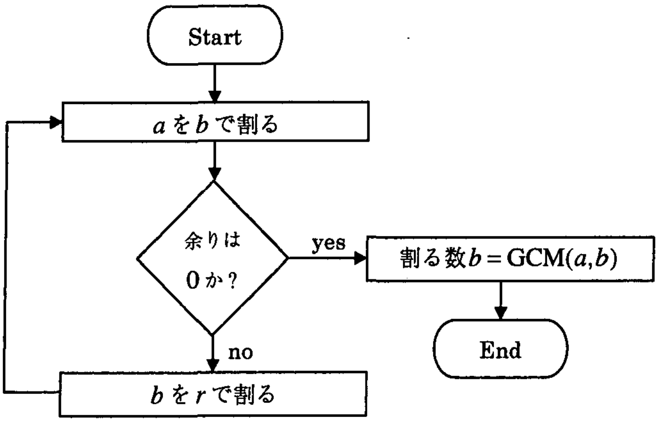
a,bの公約数はrの約数（なぜなら$r=($　　　　$)$ （　　）参照）つまりb,rの公約数

b,rの公約数はaの約数（なぜなら$a=($　　　　$)$、（　　）参照）つまりa,bの公約数

よってa,bの公約数とb,rの公約数が一致するから最大公約数も一致する。

練習　GCM(4998, 2184) を求めてみよう。

GCM(a,b) を求めるフローチャート



5 有限性の問題

GCM(a,b) を求める流れ図は有限回で End に行くのだろうか。

ア　どんな場合も有限回で End に行く

イ　有限回で End に行かない場合がある

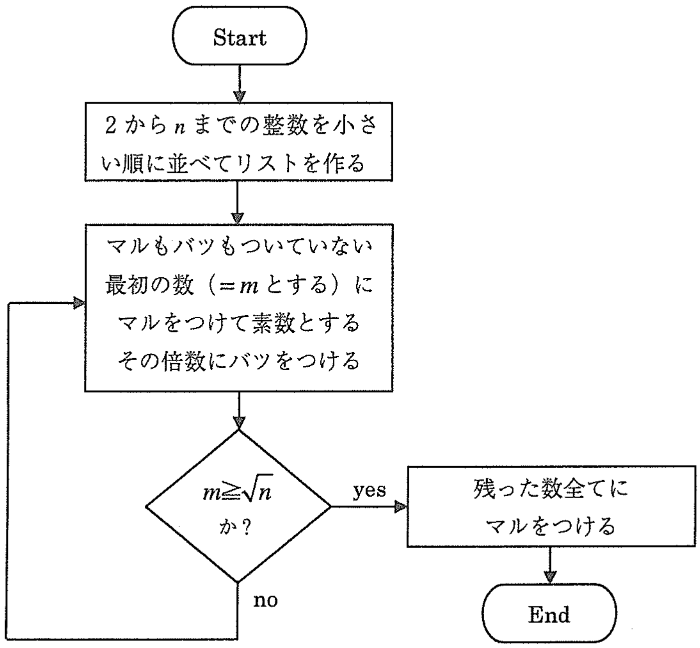
結論　アルゴリズムとは何か

ユークリッドの互除法は、２つの数の最大公約数を求める計算方法ですが、このようにある類に属するすべての問題を、有限回の操作で必ず解く手続きの体系のことをアルゴリズム（algorism）といいます。アルゴリズム過程は数学的思考の中で大きな位置を占めています。アルゴリズムという名前の由来は、アラビア数字を使って整数論を展開し、代数学の本を最初に書いた人の名前、Abu Abdullah Muhammad bun Musa al-Khwarizmi(アル＝クワリズミ A.D .900 年頃)からきています。

他のアルゴリズムの例として、エラトステネスのふるいというものがあります。

Eratosthenes（エラトステネス）：B.C.２７１年に生まれ、１９４年に没した。エジプトの西に位置し、プトレマイオス朝の支配下にあったギリシャの植民市シレネーに生まれた彼は、若い頃はアテネの Plato（プラトン）の学校で学んだ。その後、ヘレニズム世界で最も名誉ある地位の一つ、アレクサンドリアの学堂（ムセイオン）の館長に就任した。地理、哲学、歴史、天文学、数学、文学批評の著書がある。

n を超えないすべての素数を求めるための次のようなアルゴリズムを
エラトステネスのふるいという。



例　2～30までの素数を探す

①2～30のリストを作る

	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30

②2にマルをつけ、2の倍数にバツをつける。

	2	3	~~4~~	5	~~6~~
7	~~8~~	9	~~10~~	11	~~12~~
13	~~14~~	15	~~16~~	17	~~18~~
19	~~20~~	21	~~22~~	23	~~24~~
25	~~26~~	27	~~28~~	29	~~30~~

③3にマルをつけ、3の倍数にバツをつける。

	2	3	~~4~~	5	~~6~~
7	~~8~~	~~9~~	~~10~~	11	~~12~~
13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~
19	~~20~~	~~21~~	~~22~~	23	~~24~~
25	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~

④5にマルをつけ、5の倍数にバツをつける。

	2	3	~~4~~	5	~~6~~
7	~~8~~	~~9~~	~~10~~	11	~~12~~
13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~
19	~~20~~	~~21~~	~~22~~	23	~~24~~
~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~

⑤7にマルをつける。$7 \geqq \sqrt{30}$なので、残った数全てにマルをつけて終わり。

	2	3	~~4~~	5	~~6~~
7	~~8~~	~~9~~	~~10~~	11	~~12~~
13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~
19	~~20~~	~~21~~	~~22~~	23	~~24~~
~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~

授業プラン作成において参考にした文献
青木一他『現代教育学辞典』(労働旬報社，1974)
銀林浩，榊忠男『数は生きている』(岩波書店，1988)
ヴェルデン著，加藤明史訳『代数学の歴史』(現代数学社，1994)
ジョセフ・H・シルヴァーマン著，鈴木治郎訳
『初めての数論』(ピアソン・エデュケーション，2003)
宮腰忠『高校数学＋α』(共立出版，2004)
Chris K. Caldwell『素数大百科』(共立出版，2004)
吉田武『素数夜曲』(海鳴社，1995)
銀林浩『初等整数論入門』(国土社，1968)
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Euclid.html
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Eratosthenes.html

注および参考文献

[1] 1994年以降行われた授業実践の題名は，以下のものである。
94年：「ゼネコンで遊ぼう」，95：「沖縄戦を考える」，96年：「創氏改名」，97年：「公共事業」，98年：「日本に移り住んだ外国人」，99年：「小数とは何か」，00年：「進行形入門」
01年：「生類憐みの令」，02年：「抑制を考える」，03年：「n進法」，04年：「英語の態の指導」
[2] 小林優「小学校における初等整数論の導入に関する研究～ユークリッドの互除法の指導を通して～」(2004，北海道教育大学大学院教育学研究科修士論文)では，小学校において幾何的方法を中心とした指導が試みられた。
[3] 青木一他『現代教育学辞典』(労働旬報社，1974) p. 11
[4] 遠山啓『現代化算数指導法事典』(明治図書出版株式会社，1968) pp. 370～380
[5] 同上 pp. 380～388
[6] 遠山啓『現代化数学指導法事典』(明治図書出版株式会社，1972) pp. 386～388
[7] 同上 pp. 388～392