数学における単元構成と授業づくりに向けて

―― 中学生に語りかけたい数学のこと ――

須　田　勝　彦
(北海道大学大学院教育学研究科)

0. は　じ　め　に

「ゆとり教育」,「学力低下」,「基礎・基本」,「習熟度別授業」など,教育をめぐって多くの議論が飛び交っている。議論だけでなく,行政が忙しく動き回り,学校も動き回っている。

対応を迫られる多くの問題があることは理解できるが,今の教育に特効薬はない。ずっと昔から教育の先輩たちが求めてきた,質の高い授業,楽しい授業,子どものひとみが輝く授業を,探求し続けることが中心課題ではないだろうか。

今,日本の子どもはほとんど皆「ゆとり教育によって学力が低下した。ゆとり教育は失敗だった」という「大人」のことばを見聞きしている。「オレたちは間違った教育を受けた失敗作だ」という意識を少しでも持つなら由々しいことである。今急がれることは,子どもたちに「心配することはない。先生たちがみんなで研究して,みんなが困らない力をつけるから」というメッセージを伝えることである[1]。

もし私が今授業の場で中学生の前に立ったら,このメッセージをどう組み立てて行くのか,どのような授業を作っていくのかという問題を,私自身のこれまでの研究に,教育の先輩たちや友人たちの作り出してきた実践的研究の成果のごく一部を加えて考えてみた。

1. 数学教育の教育方法学的側面から

1－1 「中学校数学は難しくない」≒「**まず,考えてみよう**」

以下,中学生に語りかけたいことばをこのフォント(「まず…」)で表す。

何よりも子どもに伝えたいことは「数学は難しくない」という命題だ。この命題はより正確には「学校教育で課される普通教育としての数学は特別な才能のある子どもではなく,全ての子どもに理解可能な内容が設定される」という公教育の原則ともいえる。

しかし,この命題はこのまま与えてみても効果的ではないし,有害でさえある。公教育の原則はそのまま現実であるとは限らず,不当に難しい内容が含まれているかもしれないし,難しくないことを故意に難しく教えようとしていることもあろう。その結果わからなかった子どもに「数学は難しくない」ということばを与えるのは教育者のなすべきことではない。難しくないものとするのは,第一義的に教える側の教育内容研究・教材研究の課題[2]であり,時には学校

---

[1] 大野栄三「小学生の学力は『下がった』か?」『日本物理学会誌』Vol.60, No.6, 2005

[2] 今日の学力をめぐる議論の中には,この課題の存在にさえ気がついていない,または無視する意見も散見される。

数学の常識を覆す必要さえあろう。その結果として子どもがこの命題の内容を具体的な形で体験することを目指すのである[3]。

この命題を子どもが体験できる必要条件は自分で考えることである。考えること，そして理解することを抜きに憶えることは単なる苦痛であり，非常に困難な課題である。

1－2．「***授業は君たちの発見から構成される***」

「児童ノ発見シ得ル所ノモノハ決シテ之ヲ説明スベカラズ」[4]

これは，日本の教師たちが常に追究し続けてきた教育方法の原則といえる（無論，「児童」は「子ども」に拡張できる）。筆者はこれまで多くの学校で多くの先生方と授業づくりの議論を重ねてきたが，論点のほとんどはこの点に関わっていたと思う。

もとより，一方が説明をし，他方が聞くだけで理解されることは稀であること，教わる側の能動的な関与が必須であることは，近代教育学を持ち出すまでもなく，人間が他の人に何かを伝えるとき常に実行されていることである。素朴には聞き手のあいづちなどとして日常的に現れている。会話の中で，または著書の中で問答法が古くから用いられてきたこともその例であろう。だが，学校で，教えるプロによる授業において，ひたすら説明し，ひたすら教え込むというスタイルが多いのは興味深い現象である。特に中等教育においてこの傾向が著しいように思われる[5]。

普通の人間関係から推論すれば，話者が聞き手と共有空間を持たない場合は会話自体が成立せず，従って聞き手も存在しない。あえて誤解の生ずる言い方を採れば**「子どもは，先生の説明など聞いていない」**のである。この命題は私自身の授業づくりの足場である。

授業の主要部分が発見から構成されてはじめて，本来発見の課題に属さない**ことばや記号の定義，科学史，数学史的事項の説明等も自然な流れの中に位置づけ可能となる。**

仮説実験授業は，教育内容の中心となる概念・法則の実質的内容を問題，予想，実験などの系列に組織するという、優れた教育方法を具体化した一例である。

1－3．単元を単位とする研究方法≒「***これがひとつの数学だ***」

小学校，中学校そしておそらくは高等学校までを含めて，日本の数学カリキュラムには根本的な欠陥がある。それは全体として，どのような数学を教えたいのか，という理念が存在しないことである。「数学はこんなに楽しく，すばらしいものである」という思想がカリキュラムの中に見えない。あるのは教えるべき項目の集合だけだ。

単元の概念は本来，カリキュラムがたんに教えるべき項目の羅列となっていることへの批判から生まれたものである。ヘルバルト派の方法的単元「methodische-Einheit」は認識過程を分析･総合の累層的な発展としてとらえた上で，そのひとまとまりを，教材の導入，展開，比較，概括，応用などの教師と子どもの活動に即して組織しようとしたものである。アメリカで発展を見た経験単元，作業単元の概念は認識活動の源泉としての子どもの活動や生活経験に焦点を

---

[3] 例えば丹尾春彦は北大数学教育グループの作成した授業プラン「中学校数学へようこそ」を卒業前の6年生で実践して次のような報告をしている。「最初の時間は，不安げな表情。ちょっと緊張気味でしたが，進むにしたがって『なあんだ簡単だー！』と笑顔が生まれてきました。」（北大算数サークルでの報告）

[4] 若林虎三郎・白井毅『改正教授術』1（『資料日本教育実践史』1，1979年，三省堂による。）

[5] 大学教育はもとより教えるプロではないことを自慢とする教員が担ったので，反省されることは稀だった。

あてながら，「子ども」と「学問」とをいかに一体のものとして組織しうるかということを課題として産みだされた[6]。デューイの次のことばはその端的な表現である。「我々は，子どもとカリキュラムが，同一の過程を規定する二つの極にすぎないことを認識するだろう。ちょうど，二つの点が一本の直線を規定するように，子どもの現在の立脚点と学問研究の事実と真理とが授業を規定する。授業は，子どもの現在の経験から出発し，我々が学問研究と呼んでいる真理の組織的な体系によって提示された経験へといたる，持続的な再構成である。」[7] 日本でも戦後新教育の展開過程はもちろん，戦前に於いても及川平治（明石女子師範付属小）などによって単元の思想（及川においては「題材」の単位）は豊富な発展を見ていることを忘れてはならない。単元はその構成の内部に，子どもの能動的，主体的活動，分析・総合の思考活動，体系化と応用への発展などの契機を含んでいる概念なのである。数学教育において，そのカリキュラムを構成する作業は，項目をバラバラに分解して，あれも必要だとか，これは要らないのではないか，などという何の根拠もない思索によってではなく，本来の意味で単元をいかに構成できるか，また単元の全体がいかなる希望を語ることができるかという地道な課題の検討に拠らねばならない。[8]

戦後日本の教育の再建期，単元別教科書が理科や社会科などで作成され使用された。「アメリカの単元別教科書(Uni-text)の形態にならう」[9] ってつくられたものであるが，この研究方法は私たちに残された貴重な遺産であろう。仮説実験授業は，単元作成を基礎単位として研究を進め，蓄積している点において，貴重な遺産を継承している。

このような立場から，私たち北大教育方法学研究室数学教育グループでは，くりさがりのある減法，乗法，小数の導入と加減，多角形と円，分数の導入と加減，面積，内包量，正比例関数，比，倍と分布，合同変換，相似変換，「中学校数学へようこそ」シリーズ（自然数と 2 つの演算，数・量・半直線，負の数とは何か)，1 次関数，2 次関数，2 次関数と微積分，数列，指数関数，対数関数などの単元試案を作ってきている。

1－4　「基礎・基本」[10]≒「**新たな角度から景観を楽しむ螺旋階段**」

コメニウスが「あらゆる人にあらゆる事柄を教授する」というとき，「あらゆる事柄」の内容は陶冶と訓育に関する精選され尽くした基礎・基本だった。これまでの様々な教育課程，教科カリキュラム，教育内容・方法に関する具体的提案は，基礎・基本とは何かという問いへの，各人の回答である。佐藤学は，基礎・基本という用語を使用するとすれば「学校教育のすべての内容を，生涯にわたる学習の『基礎・基本』として位置づけなければならない」と述べ，「共通教養」と同義としている。その内容としては言語の思慮深い活用，抽象的シンボルの活用，科学的探究の経験，社会的認識と公正の倫理，労働と技術の経験，芸術の享受と表現，身体の運動と経験などをあげている[11]。これまでの多くの教育学，教育実践が求めてきた基礎・基本の

[6] 詳しくは佐藤学『米国カリキュラム改造史研究』(1990 年，東京大学出版会) 参照。

[7] J.Dewey『The Child and the Curriculum,The School and Society』(PHOENIXBOOK,Chicago)，訳は佐藤学，前掲書（注 6）による。

[8] 須田勝彦「数学教育における基礎・基本」日本教育方法学会編『総合的学習と教科の基礎・基本』2000 年，図書文化

[9] 板倉聖宣『日本理科教育史』1968 年，第一法規

[10] 日本教育方法学会編『現代教育方法事典』，「基礎・基本」の項，（須田勝彦執筆）2004 年，図書文化参照。

[11] 佐藤学『カリキュラムの批評』1996 年，世織書房

内容の概括として首肯できよう。むろんこれらが教育内容・方法の問題として具体化ずみ，というわけではない。基礎・基本とは何かという問いは教育方法学のアルファであり，オメガである。

通常，基礎と基本は次のような意味で区別される。基礎は「読み・書き・算」のように，子どもの現在および将来のあらゆる生活に必要とされる知識・技術・技能であり，基本は教科に対応する学問・文化領域の中で適用範囲が広く，それをもとに多くのより高度の知識等が構成される知識等である。前者は要素的知識，後者は学的知識という意味もあろう。しかし，いかに初等的な内容，例えば簡単な１つの文であっても，その習得は１つの文法形式の習得であり，無限に広がる知識を獲得したのであって，要素的知識が１個増加しただけではない。基礎と基本を区別することの有効性はあろうが，普通教育における基礎・基本は両者の共通部分にあるとみることもできよう。この見地から，学校で教えることは「たくさんの知識」ではなく「たくさんのことが見えてくる知識」であろう。基礎・基本は常に，新たな角度から景観を楽しむことのできる螺旋階段を構成する。従って基礎・基本の習得は子どもの学ぶ楽しさの形成と一体であり，けっして「たたき込む」ものではない[12]のである。新学習指導要領における教科内容の大幅削減は基礎・基本の危機ともいえようが，真の問題は教科内容の量にある以前に，授業の質にある。教育方法学には，生涯にわたる学習の基礎・基本となる具体的内容を，授業実践を通して積み上げることが求められているのである。研究の方略としては，教育課程と授業実践を結ぶ双方向的研究が不可欠であり，各教科内容に対して，子どもの活動を通した発見の過程，あるいは問題の系列として再構成していく，換言すれば「単元」の構成を基礎単位とする研究が有効だろう。

２．数学教育における数学論的側面から

数学教育研究，とりわけその教育内容研究は，数学という学問そのものの本質に照応するものであろう。しかし，数学という学問は自らの本質について語ることはない。強いていうなら，それは数学に関する哲学的研究としての数学論の領域に属する。

数学のカリキュラムや教育内容についての理論や実践は，数学論の中身を数学教育の立場から具体的に提案することに他ならない。その道は数学という学問とは何か，人間が数学を獲得するとは何か等の，永久に解きつくされることのない数学論的課題群につながっている。ここでは数学と現実の関連に関する立脚点を確認することを課題としたい。

２－１　「数学は現実から出発し，現実に帰る」

小寺隆幸は，中学校の関数指導における新しい内容と方法の開拓に取り組んでいる。その目的はなにより，今の中学校の生徒たちに学ぶことの意味をつかませることにある。「生徒は解き方を理解し，できるようになっても，何のために学ぶのかをつかみあぐねている。それは数学

[12] 例えば計算練習に限定しても，子どもはその習得の一定の過程で習熟することを切望する。広田虎之助は「基礎的教材さえ確実に教授したらんには，他は同一理法によって了解するものである。…これさえ出来ればいかなる大数にても如何なる複雑なる数にても何の苦もなく出来る者である。」このようなときに数の範囲に恣意的な制限を加えることは「児童を見くびり過ぎたるより来たりし失敗」であると規定している。（広田『聚楽式算術教授法』，1910年，寶文館）

が現実世界とどう関わるのか，そして数学を学ぶことが自分の成長にどうつながるのかという問いであるように思う」[13]。

論点自体は目新しいものではない。数学と現実の関係如何の問題ははるか以前から論じられている。古くはエンゲルスの『反デューリング論』における数学の規定が有名である。

20世紀初頭に始まる数学教育の改良運動もまた数学と現実世界を結びつける鍵となる概念を提案し，関数指導をその中心に位置づけた。初等教育に対しても生活算術という形で，あるいは「発生的指導法」の形で大きな影響を与えた。しかし，数学教育を根本から変えるものとはならなかった。改良運動自体の限界性の問題として説明できるかもしれない。例えば「実験・実測」を重視することは改良運動の共通のテーマであった。それまでの学校数学が実験・実測をほとんど無視してきた点から考えるなら，画期的な提言であったことは疑い得ない。しかし何のために実験・実測をするのか，という必然性は多くの場合明確ではなかった。

山下兼秀は生活算術を批判し「実験実測をさせたからといってそれは教授の出発点にはならうが，単にそれらの事実，現象の集合や堆積のみでは此れ又一種の抽象にすぎない」と述べ、関数概念の動的把握こそが児童数学の中核とすべきこと，それによって児童の「自由実現」に向けた「人間教育」が可能となることを述べ，そのための実践的体系を提案している。山下の構想は自由実現の児童数学に止まるものではなく，児童倫理，児童文学，児童美術などを含み「今までのごとき概念の堆積である教育学を廃棄し…下からの文化発展の綜合としての新しい意味における児童教育学の構成と誕生の発生的地盤が構成される」ことにまで広がっていた[14]。しかし「概念の堆積」である教育学は今だ「廃棄」されていないように思われる。

この点に関して小寺は「子どもが学びがいを感じる数学は，また現代社会が必要とする数学である。特に今，変化をとらえ将来を考える力を育むことが，数学教育として求められている」と述べ，子ども自身の現代社会に生きる主体形成の問題として論じていることに注目したい。「特に環境問題の判断には，変化の様子を分析し，このままいくと将来どうなるのかをシミュレーションする力や，様々なものとの相互関係において変化を見る力が必要」[15]という提案も稔り多いものとなるだろう。

最近の『数学教室』を見るだけで数学を現実の中に見出す新しい試みが多数見いだされる。[16]

---

[13] 小寺隆幸「現実事象を扱う中学校関数教材の開発とその授業実践について」『数学教室』NO.634，2004年9月，国土社

[14] 山下兼秀『関数指導　児童数学原論』1938年，成美堂。この書の序文に小原国芳は次のようなことばを寄せている。「全国の先生がたが試験だ，準備だ，入学率だ，席次だとホントに教育の邪道に迷ってゐられる時にまじめに教育の正道にたちかへり，しかも正しき物を，最も効率高く上げて行くことによって，初めて教育の効果を挙げ得るのです。」

[15] 小寺隆幸，前掲（注12）論文

[16] 例えば小林俊道「カーテンレールで2乗比例の授業を」『数学教室』NO.638，05年1月，川上公一「身近な資料を生かして数量関係を考える」同NO.640，05年3月，足立久美子「震源地はどこだ？」同NO.642，05年5月など。なお，これらは「数学を現実の中に見出す」という点において新しいわけではない。これまでの，例えば黒表紙教科書も含めてあらゆる初等数学教育で実行されてきたことであり，それゆえに初等数学教育は存在可能だったのである。抽象化すれば，現実世界の問題→数学的問題→数学的解答→現実的解答となるようなサイクルそれ自体が新しいものではない。新しいのは具体的問題や課題及び提示方法の質に他ならない。さらに言うなら，このプロセスにおける「数学」とは一体何なのか？プロセスの一部に数学があるのではなく，初等，中等数学教育においてはこのプロセスの全体が数学ではないのか？という疑問も生ずる。この点は他の機会に詳論したい。

2－2　「諸学の中の数学」…塚本明毅『筆算訓蒙』について

社会が数学教育に何らかの希望や期待を寄せるとき，数学教育は新しい現実との関わりを開拓するのではないだろうか。明治初期，「学制」の時の「小学教則」に教科書として例示された塚本の教科書はこの点から興味深い。[17]

「凡そ設題の多くは，我国の度量衡を主として，万国歴史地理並びに天文，究理等，諸学に関渉せるものを載す。これ幼学の者をして，傍らこれを諳熟せしめて，前途の稗益たらしめん事を欲するなり。」

算術教科書を諸学との関わりで構成するという考えは当時にあって新鮮であったばかりでなく，今日もなお教科書改善の重要な指針たりえよう。この視点は四則算法の指導後の「設題」(いわゆる「応用問題」)の工夫に著しい。例えば加法，減法には次のような問題が見られる。

「西洋人其の輿地里法にて，日本国を算するに，畿内，中国，二道及び東北三道ともに四千二百七十八方里なり，南海四国は三百二十八方里，西海九州は八百十二万里，蝦夷及び其諸島は一千六百三十九方里なりという。然る時は全国方里，幾何なるや。」

同様に地球上５大州(アジア，ヨーロッパ，アフリカ，アメリカ，オーストラリア)の面積の総計，人口の総計を求める問題などの地理的な問題が配せられている。また，今日的な意味で「諸学」とはいえないが，フランス陸軍の歩兵，騎兵，砲兵などの人数の合計，ヨーロッパ諸国の海軍の艦船数を求める問題などもこの時代，多くの人の興味を引く問題であったろう。歴史的な分野では例えば西ローマ帝国の滅亡からコロンブスのアメリカ検出まで何年か，とかワシントン，ナポレオン，マゼランなど豊富な話題と登場人物が見られる。乗法の問題には次のようなものがある。

「凡そ物の響きは一秒間に一百八十七間に達す。今敵営の砲煙を見て，八秒の後其の音を聞く時は，其の距離幾何なるや。」「地球の周囲は輿地里にて五千四百里なり。地球自転する毎に，其の光輝これに先立て走る事，一秒時中に凡そ八倍なりという。然る時は光力の速なる事，一秒時中に幾万里なるや。」

音の速さ，光の速さなどは常識的直観を越えている。人知はいかにそれを知り得たのかという疑問も含めて，自然に対する新たな目を開くことができよう。日本社会が世界に向けて新たな展開を試みるという背景のもとに，この教科書が生まれたように思われる。子どもたちにより広い時空を提示するためにも，塚本の思想を継承したい。

3　数学教育における認識形成論的側面から―「媒介」の論理

認識についての研究は古くからある。論理学が数学的論理学として数学の領域に確固とした位置をしめ，心理学が実験科学として確立された流れの中でも，認識論や論理学において議論されてきたことは解決されたわけではなく，ほとんどそのまま残されているように思われる。

その中で特に，認識論や古典的論理学が取扱ってきた問題について，授業において認識の形成を目標とする教育方法学の問題として論ずる領域を，仮に認識形成論と呼ぶことにする。認

[17] この教科書は明治２年に沼津学校の教科書として作られたものである。須田勝彦「明治初期算術教科書の自然数指導」，北大教育方法学研究室『教授学の探究』第 15 号，1998 年参照。「諸学」の中に数学の素材を求めることは，私たちも単元講成の重要な視点としている。

識形成論は哲学だけではなく，現代の論理学，心理学，さらには生物学や生理学，社会学などの学問的成果との対話の中から，その対象と方法を確立して行くだろう。ここでは「媒介」の概念に焦点を当てることにする。

ヘーゲル論理学によれば，或るものは他のものとの関係において或るものである。この命題の始めの「或るもの」は直接的なものであり，次の「他のもの」は媒介されたものである。そして高次の「或るもの」を媒介する。認識は，否定を媒介とした肯定へ，直接的なものから媒介されたものへと発展する。「或るもの」の「もの」は「者」であっても，「物」であっても，それぞれ授業づくりに重要な論点を提供してくれる。

3－1　個別と普遍を媒介するもの

人間の認識はすべて，ボトムアップとトップダウンの巧みな協力によって成立している。個別の認識はそれだけをいくら積み重ねても普遍にはならないし，トップダウンだけの認識は公理的な整理が完成した数学の記述にのみ見いだせるにすぎない。両者は個別と普遍を媒介する特殊という環で結ばれているのである。

3－1－1　知恵ぶくろ≒「わからないときはここに立ち帰って」

数教協には水道方式と呼ばれる自然数指導に関する理論・方法がある。決して完結したものでも，固定的なものでもなく，多様な実践を展開する足場となっている。特に自然数とその演算を説明する「半具体物」としてタイルの有効性は広く認められているといえるだろう。

高村泰雄は，自然数指導におけるタイルの役割を認識形成論に組み込む理論の構築を次のように試みた。「われわれは…１つの仮説を設定してみたい。それは『科学的概念形成の全過程にわたって，実体的イメージの形成こそが決定的な役割を担っている』というのである。すなわち，真の意味の科学的概念は，実体的イメージを媒介にしてはじめて形成されるのである。ここで実体的イメージというのは『認識対象の本質的な構造を正確に反映した感性的イメージであり，それはあくまでも感性的でありながら，対象の本質的認識を媒介する実体的特質をそなえたもの』と規定する。」[18]

数学教育の先輩たちは古くから「半具体物」ということばを作り出している。現実世界に「半分は具体的で半分は抽象的なもの」があるわけではないのだが，高村の規定する実体的イメージに近い意味合いが込められていると思われる。また，実体的イメージという語は，「典型的具体」というより広い語にも近いが，理論の出自は異なっている。近代教育が始まって以来，教師たちは常に「典型的具体」や「半具体物」などということばで実体的イメージに相当するものを求めてきたのであり，その実践の蓄積に学ぶべきだろう。

私は高村の仮説を基本的に支持するが，視覚的イメージに限定されるとは限らないことなどの理由からこれを「知恵ぶくろ」と呼んでいる。このような認識によって子どもたちに「わからないときはここに立ち帰ってみよう」という地点を提供することができる。

[18] 高村泰雄『物理教授法の研究』1987年，北大図書刊行会

[19] 氏家英夫「一次関数と二次関数の指導」『数学教室』NO.644，2005年7月，参照

3－1－2　単元の知恵ぶくろ，諸単元をつらぬく知恵ぶくろ

北大数学教育グループの作成してきた単元の中で，内包量，正比例関数，1次関数[19]などに関して高村の云う「実体的イメージ」，私の云う「知恵ぶくろ」として等速運動を用いている。内包量は基本的物理量として子どもの自然認識を支える。同時に小数・分数の乗除により深い意味づけを与える。さらに内包量は正比例関数の量的基礎であり，解析学のスタート地点の基礎を形成する。このような内包量指導の中心に等速運動を位置づける。

負の数の導入から加減までの知恵ぶくろ[20]は1次元線形空間における移動とその合成であり，乗除の知恵ぶくろとしては等速運動を用いている。[21]

3－2　否定を媒介とした肯定

3－2－1　「学びは，学びあい」

人間は社会・歴史的存在であり，子どもの発達もまた社会・歴史の中で実現される。この論点を哲学の中に確立したのはマルクス，エンゲルスだろう。このような視点は現代心理学，特にヴィゴツキー学派に継承されている。また，仮説実験授業では「科学的認識は社会的認識である」[22]という見地を授業づくりの基本において成果を収めてきた。

数学という学問においても，自己にとって明白なことは他者にとって明白とは限らず，自己と他者の共有し得る広場を設定することが不可欠であることが意識されてきた。数学は対象となる幾何学的量や数について万人に共有可能な知識を追究するとともに，方法においても論理的であることによって万人の共有可能性が追究されたのである。古代ギリシアの数学はそれを「公理的方法」として完成させた。公理は自己による他者への「要請」[23]であり，そこから論理的に導かれることはすべて，自己と他者の共有財産となる。数学は「学びは学びあい」という人間の認識の本質に根ざしているのである。

3－2－2　「まちがえることのたいせつさ」―小数の授業から

或る物は他の物との関係において或るものである，という視点は授業において，どんな間違いも，何らかの形でクラスの共有財産となりうることがその例となり得る。

私たちの作成した小数の導入と加減の授業では，十進小数がどのような論理的必然性によって生まれてきたのかを追究する。そのため，メートル法など，既存の単位系が存在しない「大昔」を舞台として設定した。論理性と同時に，数学的認識の歴史性・社会性という契機をも指導過程に内在させている。

指導は次の様な過程をたどる。1）連続量の測定とは，単位を定め，その何倍かを知ること

---

[20] 中学校教科書では通常，負の数を理解するために様々な量が使われている。しかし，そのことによって「知恵ぶくろ」の所在が見えないことが多いのは大きな難点といえるだろう。

[21] 須田勝彦他「中学校数学カリキュラム再構成への試み一第III単元『負の数とは何か』の授業プログラムについて」『教授学の探究』NO.18，01年参照。

[22] 板倉聖宣『科学と方法』1969年，季節社

[23] 「『原論』には‘定義’についで‘公準’とよびならわせられている五つの‘アイテーマタ’がある。…‘アイテーマタ’とは対話のはじめにおかれる命題で，論者が相手に対しその措定を要請するものにほかならない。」伊東俊太郎「ギリシア数学」，伊東ほか編，数学講座18，『数学史』，1975年，筑摩書房

である，２）より詳しい測定値がほしいときは，より小さな単位を用いればよい，３）しかし，もとの単位と小さな単位の間に等分の関係がなければ加法ができないので，換算が可能なような単位系に改める，４）等分は系統的等分であることが望ましい（ここから７進小数を導入する），５）７進でも大変便利だが，整数部分が十進なのだから，系統的に十等分することに決めるのが最善である。次の記録は３）の部分に関するものである。[24]

４時間目，５時間目〜たし算出来ないぞ！

となりのウンマ村との合同運動会。幅跳びは３人の代表選手の記録の合計で勝敗を決めることにしたという設定です。

単に足し算をするとドン・ガバチョ村は15Ｇ５Ｐ26Ｕ，ウンマ村は14Ｇ15Ｐ７Ｕとなりました。

ここで＜質問５の①＞

「どちらが勝ったと思いますか？」

見事にドン・ガバチョ村29名に対してウンマ村０名となりました。

ここでワークスペースに出て，実際にその長さをテープで班ごとに作り出してみました。すると，

「えー」「うわっ」「あれっ」「そんなはずじゃ……」「☆◎△」と驚きの叫びの大合唱！　そうその通り。実はウンマ村が１ガバチョ以上の差をつけて勝ってしまうのです。

ここで＜質問５の②＞

「どうしてこんな結果になったと思いますか？　長さの判定を簡単にする，何か良い方法はありませんか？」

もうすっかり放心状態の子どもたち……。でも，そこで等分関係が必要なことに気がつくのです。

「繰り上がり……。」

と言うつぶやきがあちこちから聞こえてきます。そう繰り上がるシステムを作ればよいのですね。前に半端を等分すればよいという考えが出てきたことを扱い，ドン・ガバチョ村では単位の相関関係から以下のように定めることになります。

１Ｇ＝７Ｐ，１Ｐ＝12Ｕ，それに伴って物差しも変更しました。

３－２－３　「Ａの理解は非Ａとの対比て」―その（１）　等速運動の指導から

上の例は或る物に対する他の物一般として考えたが，教材構成論の立場からは他の物一般ではなく，或る物に固有の他の物との関係で考えることができる。ここではＡの理解は非Ａとの対比で成立する，と考える。この命題もまた，私の発見でも発明でもない。およそ人が誰かに何かを教えるとき，いつでも用いられてきたに違いない。

先に述べたように，「等速運動」の理解は中学校数学においても重要課題である。次の例は次の２つの問題は速さ（小５）の導入部分であるが，中学校においても同様の展開が可能だろう。問題１は２つの等速運動を比較する方法を見つける問題で「いっしょに走らせる」「スタートをずらせて，差が広がるか縮まるかでわかる」「同じ距離を走らせて時間をはかる」「同じ時間にどれだけ走るかを調べる」などの意見がでてくる。通常の速さの指導では，はじめから距離，時間などの語が使われることが多い。子どもにとって速さはそれ以前に存在し，ある速さと他の速さを比較する課題を通して時間，距離等の量を抽出できるのである。

問題２は，等速運動Ａと不等速運動Ｃの比較によって，等速運動の概念の内実を形成することにある。単一の現象から等速性を示そうとしても誤差の問題を克服できないだろう。問題２の後，等速運動ということばを導入し，空欄となっていた節の題名に書き込ませる。定義はその内容の実質を理解した上で，それを表現することばとして与えられるべきである。[25]

なお，§２の題名が空白なのは，「等速運動」ということばを与えること自体が発見の意義を小さなものにすることへの配慮である。

---

[24] 丹尾春彦「ドン・ガバチョ村の真実…の数々」『数学教室』第624号，2003年11月

[25] 須田勝彦「実践記録『速さ』の指導」『数学教室』第503号，1993年10月

§2 $\boxed{}$

問題1 二つのまっすぐに動く物体A，Bがあります。二つの速さを比べることができると思いますか。

ア できる

イ できない

アの人はくらべる方法，イの人はその理由をかいてみましょう。

道具が必要なら，何を使ってもよいことにします。

問題2

① 物体Cは，4秒間に(　　　)cm 進みました。8秒間では，どれくらい進むと思いますか。

____

② 物体Aは，4秒間に(　　　)cm 進みました。8秒間では，どれくらい進むと思いますか。

3－2－4 「Aの理解は非Aとの対比で」—その(2) 或る物に固有の他者

上の例は或る物に固有の他者を非Aで表したが，教育内容構成論の問題としてはより高次の他者を考えることもできる。例えば，数の代数的法則の指導では加法と乗法を比較・対比させながら進めること，変換では変わる性質と変わらない性質を対比すること，関数の指導では，連続と離散を対比させること，さらに多くの場面で有限と無限の対立をより意識的に持ち込むことなどの有効性について今後検討して行きたい。

次の例は佐藤敬行による中学校数学入門シリーズの小学校6年における実践（連続量と分離量の項）の1コマである[26]。連続量の性質として「最小の量は存在しない」ことを考える。

T：（線分を板書）これより小さい長さは考えられるか？　C：考えられない。　C：考えられる。

T：（より短い線分を下に板書）できるね。これよりさらに短い長さは？　C：考えられる。

T：（さらに短い線分を書いて）これより短い長さを考えることは？　C：できる。

T：こういう風に考えて行くと　C：永遠にできる　C：永遠ではないけど…

T：見えるか見えないか、はあるね。永遠なのか？永遠ではないのか？　C：（数人）永遠

T：永遠にできるっていう人？（11人）では、やがてこれ以上短い長さは考えられないと思う人？　C：え？考えられるよ T：問題分っているのか？どこまでいったって、もっと小さな長さがあるんだ、だから永遠にこれより短い長さはないんだ、ということにはならないって思う人？　C：(15人挙手)　T：じゃ、やがてもうおしまいっていう所に行くだろうっていう人？C：(15人挙手)　T：おう、なんだか知らないけれども、半々でいいですよ。これは人間が世界を考えるようになってから、永遠のテーマなんです。

少なくとも，何が問題かは理解されている。その上で，まったく未知の世界の入り口に立っているのである。このような，今は答えのわからない世界の入り口を探検させたい。佐藤は次の様なできごとを報告している。中学校数学入門シリーズの別な場面（累乗を累加と対比しながら考える場面）でのことである。[27]

「3の2乗は9，2の3乗は8だけど，2乗して6になる数はあるの？」とたずねてきた。脱線するが取り上げた。T:「2の2乗は4，3の2乗は9だから。2乗して6になる数があるとしたら，どれくらいだと思う？」C:「2と3の間，2てんなんぼ」T:「ためしに2.5を2乗

[26] 須田勝彦・佐藤敬行「中学校数学入門　『数・量・半直線』の小学校における試みから」『教授学の探究』第22号，2005年

[27] 須田勝彦・佐藤敬行「中学校数学入門　単元Ⅰ『自然数と2つの演算』の小学校における実践から」『教授学の探究』第20号，2003年

してみて」C:「(電卓で計算して) 6.25」T:「ってことは，2.5 では？」C:「大きすぎる」T:「じゃ，2.4 だったら？」C:「5.76」T:「ってことは，2乗して6になる数は？」C:「2.4 と 2.5 のあいだ」T:「じゃあ，仮に 2.45 で計算してみたら，とやって行けば見つけられるかも知れない。」この日の授業はこれ以上進めなかったが，話はここでは終わらない。次の日，彼はメモ帳に 2.4494897427831 と書いてきた。前日からずうっと暗算または手計算で，どこかでぴったり行くのではないかと予想して，それを求めたそうなのだ。彼の結論は「これは絶対に終わらない！」であった。途中，循環しないことにも気づいていた。これだけ苦労したからこそ「終わりも循環もしない」と確信できたのだろう。

有理数，無理数，実数の概念は数学教育の中心課題であるにもかかわらず，現在きわめて浅い扱いしかなされない。しかるに子どもは実数概念の本質に迫ることができるし，数学の実用性とは違った側面から数学そのものを楽しむことが決して不可能ではないことをこのエピソードは示唆しているといえよう。

3－3　完全性≒「すっかりわかって，未知のことが見える」

J. ペリーは 1901 年の講演で，数学教育の有用性を次の７つの点にまとめている。

「私は数学の学習において有用なもののうち、明白なものとして私の心に浮かんだものを、大急ぎでまとめてみた。1）高尚な情緒を作り、知的喜びを与える。このことは従来、ほとんどすべての子どもの教育において無視されてきた。2）物理学の学習において、数学の武器によって助けが与えられる。このことも従来、~~このことも従来、~~ほとんどすべての子どもの教育において無視されていた。3）試験に合格することにおいて。これは、これまで無視されていなかった唯一のものであり、教師たちによって実際にみとめられていた唯一のものである。4）手足のように自由に使える知的道具を人々に与える。人々がその生涯を通じて、自分自身を教育し続け、精神と知力を発達させることができるようにする。5）これはあるいは 4）に含まれるのかも知れないが、一人の人間に、自分のため以外のことがらを考える重要性を教えそれによって、現在の権力の恐ろしい支配から自分自身を解放し…彼が最高の存在の一人であることを確信させる。このことは通常、数学の学習以外の仕事だとされていることである。6）応用科学に従事している人々に、その基礎的な原理を知れせること。7）鋭い哲学的知性の持主に、完全性についての、まったく魅力的で満足な論理的忠告を与え、それによって、彼らが何らかの哲学的問題を純粋に抽象的立場から展開しようとする企てを阻止する。」[28]

これらはすべて今日そのまま生かしたいことであるが，学生への講義の経験では 7）が理解されにくい。私はこの点をこそ今日の中学生に強く語りかけたい。

青年期の入り口は，哲学的思考の入り口である。既成の哲学や哲学史への入り口ではない。自分の体験をもとに，自分の学びを自分のことばで体系づければよいのだ。既成の哲学は完全性について誰にも満足を与えない。

それに比して数学は「すっかりわかった」という貴重な心的体験の宝庫である。数計算の指導における，計算の意味づけ，計算のアルリズムの理解，計算の習熟による自動化，そして現実への適用，という一連のプロセスは「すっかりわかった」という状態を可能とするサイクル

[28] ペリー，クライン，丸山哲郎訳『数学教育改革論』，1972 年，明治図書

の身近な例である（このサイクルの各項は，順序に多少の可換性はあっても，いずれも必須の条件である)。そして例えば多角形の面積論がすっかりわかった子どもは，曲線に囲まれた図形ではどうなるのか，３次元ではどうなるのか，といった問題へと自然に進んで行く。数学は，条件を限定することによって完全な理解を可能にする。そして完全な理解こそが，未知の世界への飛翔の原動力となるのである。

小論は2005年10月に開催された日本教育方法学会課題研究II「子どもの学習意欲と授業づくり」において筆者が提言を行ったさいの配布資料に若干の修正を加えたものである。