



Title	5. 貝殻の形を示す方程式とその地質學（特に古生物學）への應用（第1報）
Author(s)	福富, 孝治; FUKUTOMI, Takaharu
Citation	北海道大學地球物理學研究報告, 3, 63-82
Issue Date	1953-12-31
DOI	https://doi.org/10.14943/gbhu.3.63
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/13798
Type	departmental bulletin paper
File Information	3_p63-82.pdf



5. 貝殻の形を示す方程式とその地質學（特に古生物學）への應用（第1報）*

福 富 孝 治

（北大理学部地球物理学教室）

—昭和28年8月受理—

I. 序 言

地質時代の相対時の決定は主として化石によつて行われているが、これらの化石の中では軟体動物の貝の化石が圧倒的に多い。頭足類（Cephalopoda）の Ammonit, オーム貝, 巻貝類（Gastropoda）及び二枚貝類（Pelecypoda）の如き軟体動物（Mollusca）に属する貝殻は周知の如く極めて規則正しく興味深い形をしているものが多い。然しこれらの形に就て定量的に調べた研究は少ない様である。

又東北地方北上川下流域に産する中生代頭足類の化石セラタイトは¹⁾その形が略々楕円形をしているが、これは横圧力のためにそれを包含する地層とともに圧縮変形されたものと考えられている。従つて若し変形前の貝殻の形が判つておればその変形量を知ることができる理で地球物理学的にも興味が深い。

嘗つて上野謹五郎氏は²⁾或る種の貝殻の或る截口が対数螺線に甚だ近いことに注意し、対数螺線の式に就て比例項の求め方、中心の求め方、切線の引き方、求長求積法等主として対数螺線の数学的性質につき論じられたということである。筆者は以上に述べた様な理由から、貝殻の一断面だけでなく、一般に規則正しい貝殻の螺管の方程式を求め、実際の貝殻がこれを満足することを証明し、その諸常数を求め且つその形の変化と常数との関係等を論じ、地質時代の貝殻化石についても多少その常数を測定し、或る種の個体成長等から多少進化の問題にも触れた。筆者は生物学や地質学には門外漢であり、従つて以下に論じた所も専門家の眼から見れば不都合な点も少なくないことと思う。御教示御叱正を賜りたい次第である。若しこの研究が多少なりとも貝類学、地質学又は岩石変形学の研究発展への捨石となれば望外の幸である。

* 昭和22年5月11日の日本物理学会年会において発表。

1) 楨山次郎； 岩石変形学（昭和19年）

2) 上野謹五郎； 昭和22年物理学会年会における本研究発表の際、藤原映平博士より上野氏の研究につき御教示を得た。

II. 貝殻の形の一般的性質

貝殻の中にはときとして不規則な形のものもあるが、規則正しい形をしているものも多い。そして例へばカキの様に不規則な形の貝も幼虫の時代には規則正しい二枚貝の形をしているものもある。一般に規則正しい貝は次の様な特徴をもっていることが観察される。

1) 貝殻は胚殻を有する。そしてその附近に貝殻の中心点があり、中心点を通つて一本の中心軸がある。

2) 貝殻は胚殻を起点とする一連の螺管からなり、螺管は中心軸の廻りに構成せられている。螺管は初めは細く段々太さを増す。螺管は管の長さの方向に並列した多くの側線の集合から出来ていると考えられる。側線は互に交わることはない。貝殻の成長は主として側線に沿うてのみ行われ、或る時代の先端は成長線として残つている場合がある。即ち、多くの貝はその前の時代の貝殻はそのまゝにしてその先端に新しい継ぎ足しを行うだけであつて、“仕事を最小にする”と言う自然法則にかなつていていると言える。又或る場合には側線方向又は成長線方向に巖や突起が存在することがある。

3) 最も著しい性質は個々の貝は一般に成長の各段階における形が相似形をなしていることであり、吾々が貝殻の識別をなしうるのは主としてこの性質によるのである。但し成長の最後の段階では多少形がくづれるものも見受けられる。

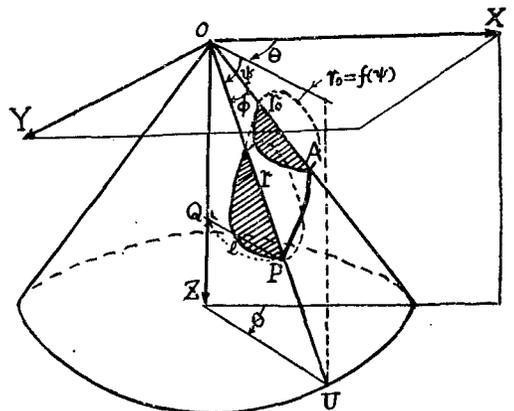
4) 貝殻の形には大別して平面巻貝、円錐巻貝及び二枚貝があり、螺管の巻いた程度からは直殻、曲殻、緩巻殻、密巻殻等がある。

5) 螺管の断面の形は円形や楕円形の規則正しいものもあり、又不規則な閉曲線をしたものや、一部が欠除したものもある。

III. 螺管の形を示す基礎方程式

上に述べた貝殻の一般的性質の中、個々の貝が成長の各段階においてその形が常に相似形であることは最も大切な性質であると思われるが、このことから理論的に螺管の基本的方程式を次に求めてみよう。

今第1図において O を貝殻の中心点、 OZ を中心軸、 O を通り OZ 軸に直角に交はる XY 平面を基準面とし、 OZ 軸を含み胚殻の口の1点を通る平面を XZ 平面とする。此の平面によつて切られた胚殻上の一点を A とし A を通る螺管の側線を AP とし、その側線上の任意の一点を P 、動径 OP の長さを



第1圖 貝殻の構造を示す略図

r , OP と XY -基準面とのなす角を Ψ , (Ψ は XY -平面から Z 軸の方向を正, Z の負の方向を負とする) OP の XY -平面への正射影と X 軸とのなす角を θ (θ は時計の針の進む方向を正とする) とし, 又 P 点と Z 軸とを含む平面を UZ -平面とする. 又 P 点から Z 軸に垂線 PQ を引いてその長さを l , $OQ=Z$ とする.

貝殻の相似の条件としては種々考えられるが, ここでは次の3条件を与えることにする.

先づ一側線の形が其の長さに関係なく相似である条件として次の2条件を与える.

$$i) \quad \frac{Z}{l} = \text{一定} \quad (1)$$

ii) 側線の起点を $\theta=0$ から $\theta=\theta_1$ に轉換しても側線の方程式の形は変化しない.

次に螺管の相似の条件として次の条件を与える.

iii) $\theta=\theta$ 即ち UZ -平面で螺管を切つた断面の形は θ の異なる螺管の断面の形と常に相似形をなしている.

以上の3条件を満足する様な螺管の方程式を求めると胚殻を除いた部分に対して

$$r=f(\Psi) e^{\frac{\theta}{\tan \lambda_0}} \quad (2)$$

が得られるのである. 但し $r_0=f(\Psi)$ は $\theta=0$ なる XZ -平面で切つた螺管の切口即ち胚殻の口の断面の形 (これは必ずしも胚殻の口附近の成長線の形を意味しない) であり, λ_0 は任意の側線の XY -平面への投影 (この形は等角螺線である) の等角螺線角であつて一つの貝殻に就いては総べての側線に対して一定値である.

以下にこれを証明してみよう.

先づ第1図において

$$\left. \begin{aligned} Z &= r \sin \Psi \\ l &= r \cos \Psi \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

であるから, これを i) の条件に代入してみると

$$\frac{Z}{l} = \frac{r \sin \Psi}{r \cos \Psi} = \tan \Psi = \text{一定} \quad (4)$$

となつて一側線では Ψ が常に一定であり, 即ち一側線は OZ 軸を軸とした一円錐面上にあることが判るのである.

次に螺管の方程式は一般に考えれば

$$r=F(\Psi, \theta) \quad (5)$$

で示される筈である. 今 $\theta=\theta$ と置けば (5) 式は $\theta=\theta$ 即ち UZ -平面で螺管を切つた断面の形の方程式と考えて差支えない. 今この切口上で一点 P の動径 r と, それに非常に接近した動径とについて考えれば

$$\left. \begin{aligned} r &= F(\Psi, \theta) \\ r + \delta r &= F(\Psi + \delta \Psi, \theta) = F(\Psi, \theta) + \frac{\partial F}{\partial \Psi} \delta \Psi \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

である。この比を求めると次式が得られる。

$$\frac{r + \delta r}{r} = \frac{F(\Psi, \theta) + \frac{\partial F}{\partial \Psi} \delta \Psi}{F(\Psi, \theta)} = 1 + \frac{\frac{\partial F}{\partial \Psi}}{F(\Psi, \theta)} \delta \Psi \quad (7)$$

iii) の条件からこの比はこの P 点と同一側線上にあつて異つた θ の値の点に就ての比と相等的な等であり、且つ (4) 式からこれらの点は Ψ の等しい面上にあるから

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial \Psi}}{F(\Psi, \theta)} = k(\Psi) \quad (8)$$

となる。但し k は θ には無関係で Ψ に関係する常数である。従つて

$$\frac{dF}{F(\Psi, \theta)} = k(\Psi) d\Psi \quad (9)$$

となるから、これを積分すれば

$$\log F = \int k(\Psi) d\Psi + q(\theta)$$

$$\therefore F = e^{\int k(\Psi) d\Psi} \cdot e^{q(\theta)} \quad (10)$$

即ち、 $F(\Psi, \theta)$ は (11) 式に示した様に一般に Ψ だけの函数と θ だけの函数の積の形で表わし得ることが判かる。

$$\therefore r = F(\Psi, \theta) = f(\Psi) \cdot x(\theta) \quad (11)$$

今 $\theta = 0$ 即ち胚殻の口の所の断面の形 (これは口のところの成長線とは必ずしも一致しない) の方程式を

$$r_0 = f(\Psi) \quad (12)$$

とすれば (11) 式から

$$|x(\theta)|_{\theta=0} = 1 \quad (13)$$

でなければならない。

次に螺管の方程式を螺管の起点を $\theta = 0$ から $\theta = \theta_1$ の点に転換してみよう。先づ (11) 式から次式が得られる。

$$r_1 = f(\Psi) \cdot x(\theta_1) \quad (14)$$

又 (11) 式の θ の代りに $\theta_1 + \theta$ を代入すれば

$$r = f(\Psi) \cdot x(\theta_1 + \theta) \quad (15)$$

となるが、ii) の条件から他方

$$r = r_1 x(\theta) = f(\Psi) \cdot x(\theta_1) \cdot x(\theta) \quad (16)$$

でなければならないから、(15) と (16) とから

$$x(\theta_1 + \theta) = x(\theta_1) x(\theta) \quad (17)$$

となる。(17) 式と (13) 式とを満足する $x(\theta)$ の形は当然

$$x(\theta) = e^{c\theta} \quad (18)$$

である。但し c は Ψ , θ には無関係な常数である。今 $c \equiv \frac{1}{\tan \lambda_0}$ と置けば螺管の方程式は

$$r = f(\Psi) e^{\frac{\theta}{\tan \lambda_0}} \quad (2)$$

で表わされ、証明ができた。一側線の方程式も (2) 式で表わされるが、只 Ψ が一定であり、この場合は所謂 helical spiral である。

今 λ_0 の意味を考えるために一側線を XY-基準面上に投影した形を考え、全く同様に r の投影を l とすれば $l = r \cos \Psi$ であるから次式が得られる。

$$l = f(\Psi) \cdot \cos \Psi \cdot e^{\frac{\theta}{\tan \lambda_0}} \quad (19)$$

$$l_0 \equiv f(\Psi) \cos \Psi \text{ とおけば } l = l_0 e^{\frac{\theta}{\tan \lambda_0}} \quad (19)'$$

となる。即ち、この形は等角螺線であつて、この線上の任意の一点と中心 O を結んだ radius vector がこの曲線となす角を λ_0 とすれば、 λ_0 は常に一定である。 λ_0 は等角螺線角である。ここに注意すべきことは (19)' 式から判る様に螺管の側線は何れも皆等しい λ_0 の値をもつことである。

次に (4) 式から一側線では Ψ が一定で円錐面上にあることが判つたが、 $r = r_0$ を起点として θ の代りに円錐面上の ϕ なる角（第1図参照）を用いれば

$$\phi = \theta \cdot \cos \Psi \quad (20)$$

であるから、側線の方程式は

$$r = f(\Psi) e^{\frac{\phi}{\tan \lambda_0 \cos \Psi}} \quad (21)$$

と書くこともでき、一側線では Ψ は一定であるから、これも円錐面上で等角螺線をしてゐる。然し、この場合の円錐面上の等角螺線角を λ とすれば

$$\tan \lambda = \tan \lambda_0 \cos \Psi \quad (22)$$

であり、 Ψ の異なる円錐面上の側線では λ の値が異なつてゐる。

IV. 実際の貝殻に就て前章の方程式が成立することの證明

平面巻貝、円錐巻貝、二枚貝の貝殻に就いて (2) 式が成立つてゐることを実測して次に証明する。

実際の貝殻では $\theta = 0$ 即ち胚殻の口の断面の位置は小さく、しかもあまり明瞭でないから $\theta = \theta_1$ なる任意の断面を基準として θ の代りに θ を用いれば、 $r = r_1$ であるから (2) 式は

$$r = r_1 e^{\frac{\theta}{\tan \lambda_0}} \quad (23)$$

となる。10 を底とした対数をとれば

$$\log_{10} r = \log_{10} r_1 + \frac{M}{\tan \lambda_0} \theta \quad (24)$$

となる。但し $M = 0.4343$ である。従つて実際の貝殻に就て θ とそれに対応する r の値を実測

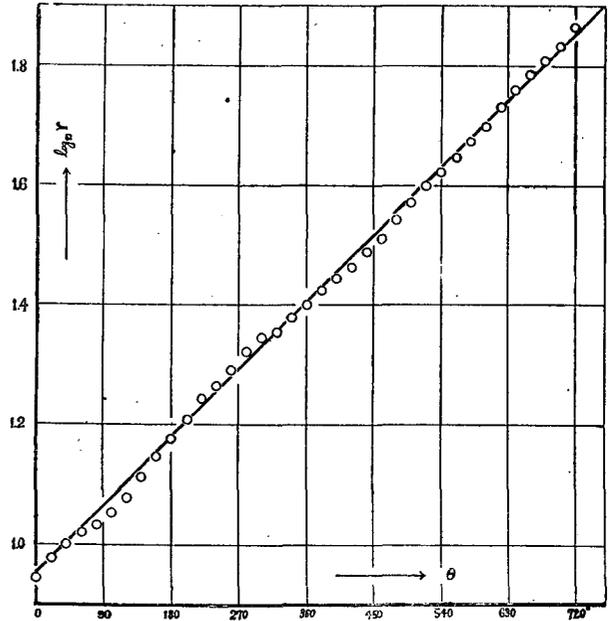
し、縦軸に $\log_{10} r$ の値をとり、横軸にそれに対する θ の値をとつて点を記入すれば、(2) 式の関係が成立つならば両者の間には (24) 式に示される如く正の直線関係が存在する筈である。

そして λ_0 の値はその直線の傾斜から求められるのである。

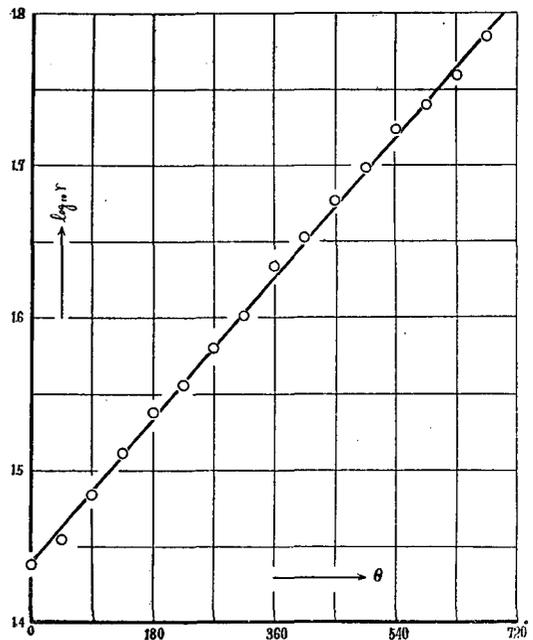
第2図は第4図(a)に示した平巻貝殻に属するアウム貝 (*Nautilus pompilius*) の対称面(第1図のXY-平面)で切つた断面の形に就てこれらの関係を吟味したものである。即ち、両者の関係はかなり綺麗な正の直線関係となつて居り、(24)式から期待せられることとよく一致してゐる。従つてこの貝殻の形は等角螺旋線であり、等角螺旋線角 λ_0 の値を求めると $\lambda_0 = 79.1^\circ$ が得られた。

次に第3図(a)(b)は夫々第4図(b), (c)に示した円錐巻貝に属するサラサバテイ貝 (*Trochus niloticus maxmus*) 及びタガヤサンミナシ (*Conus textile*) の殻頂円錐部に見られる螺旋の境界の側線に就てこの関係を吟味したものである。この場合も図に見られる如くその関係は正の直線関係であり、(2)式が成立つてゐることが明らかである。第4図の結果から等角螺旋線角を求めるとサラサバテイでは $\lambda_0 = 80.6^\circ$ 、タガヤサンミナシでは $\lambda_0 = 85.8^\circ$ となる。円錐の頂角もついでに実測したが、夫々 $2i = 73^\circ$ 及び $2i = 88^\circ$ であつた。

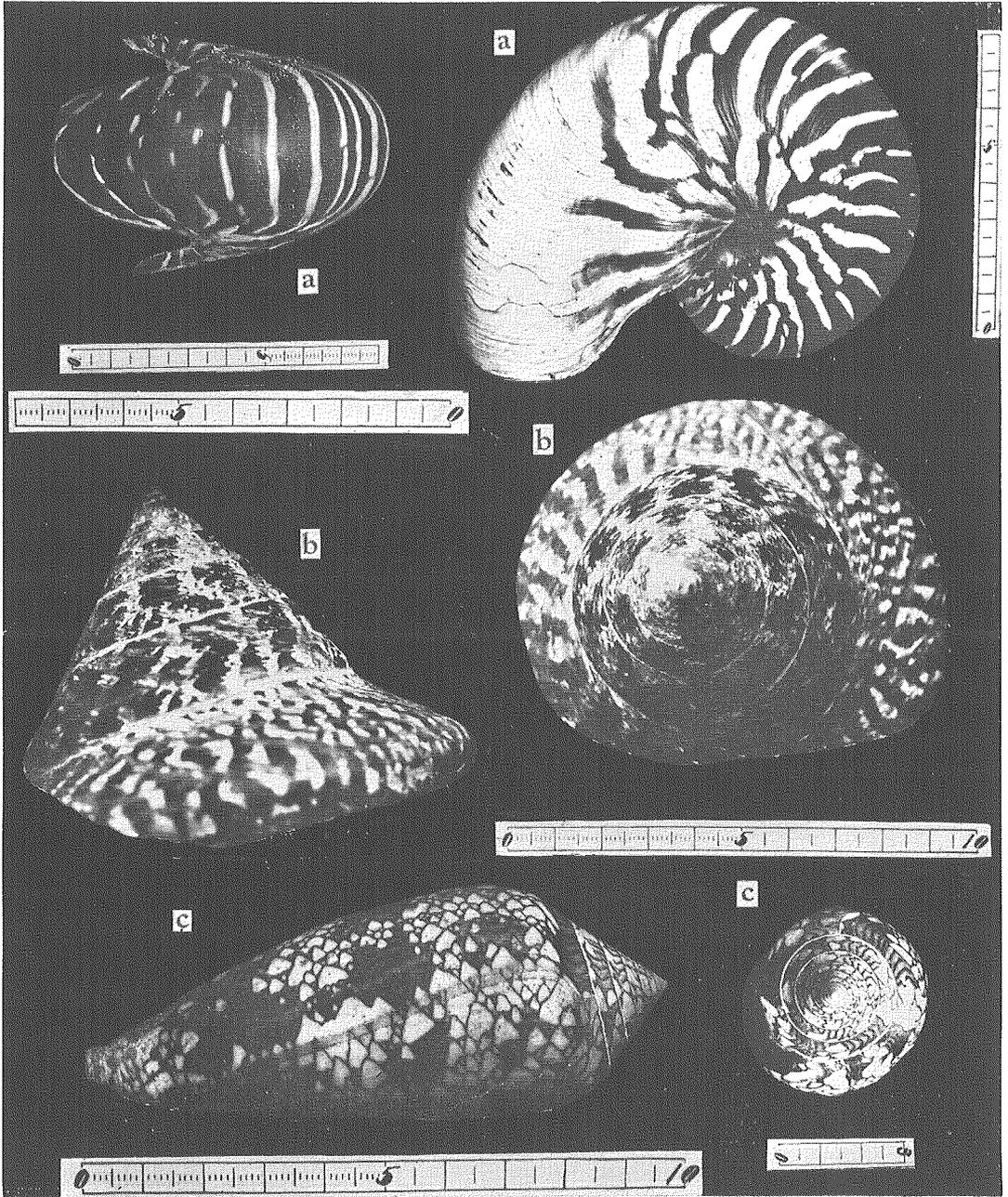
アウム貝、サラサバテイ貝、タガヤサンミナシ貝を使用したのは筆者の手もとにあつた貝殻の中、大きくて測定が容易なものを選んだに過ぎない。次に二枚貝の場合であるが、ここでは一枚の貝殻が基準面に対し対称に近い貝について確かめることにした。この場合



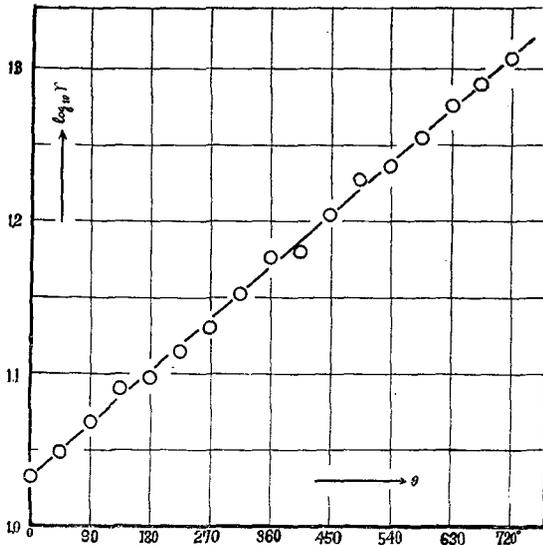
第2図 オウム貝の貝殻の基準面断面における r と θ との関係 (r の単位は mm)



第3図 (a) サラサバテイの円錐部の螺旋の境界側線について r と θ との関係 (r の単位は mm)



第4圖 オウム貝 (a), サラサバテイ (b) 及びタガヤサンミナシ (c) の横及び上方から見た写真(物指の単位はcm)



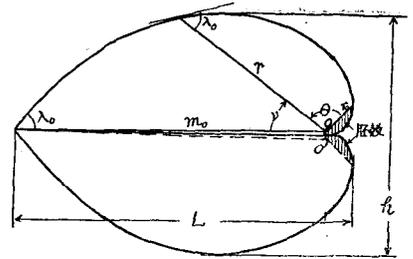
第3圖 (b) タガヤサンミナシの円錐部の螺管の境界側線についての r と θ との関係 (r の単位は mm) の値である。従つて

$$\log_{10} r = \log_{10} m_0 - \frac{M}{\tan \lambda_0} \nu \quad (25)$$

となる。この場合も (24) 式の場合と同様に、縦軸に $\log_{10} r$ をとり、横軸にそれに対応する角 ν をとつて図示すれば両者の関係は負の直線の関係となる筈であり、 λ_0 の値は直線の傾斜から求められるのである。

第6図、第7図は南伊豆、下田港柿崎附近で採集したハマグリ、シホフキ、アサリの貝殻の一片の基準面に近い中央断面の形についてこの関係を吟味したものである。ハマグリ、シホフキ貝に就ては異つた個体に就ても図示した。その結果は何れの場合にもやはり期待せられた様に負の直線関係が見られ、(25) 式の関係即ち (2) 式が成立つてゐることが判つた。等角螺線角 λ_0 の値はアサ

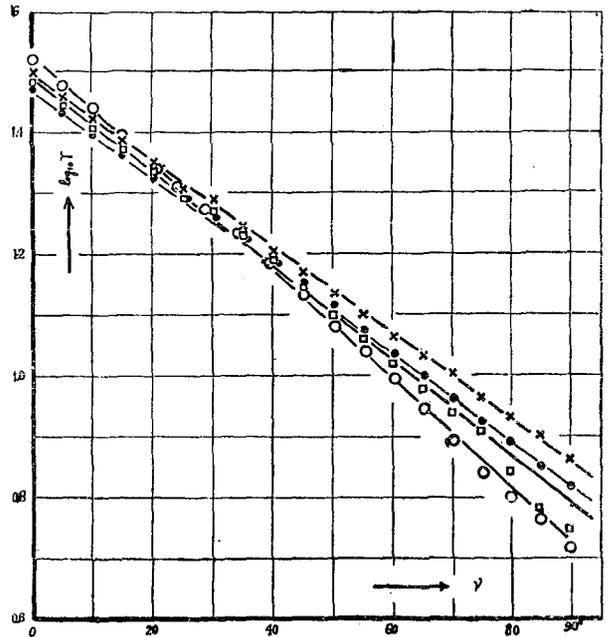
には (2) 式の θ を用いるよりも第5図において二枚の貝の境界面から動径までの角 ν を用いる方が便利であるから、(2) 式を書換えると



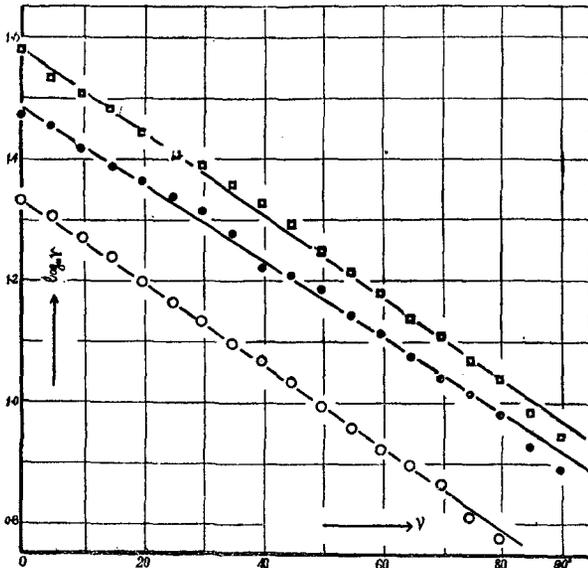
第5圖 対称性巻貝に近い二枚貝の基準面における断面図

$$r = m_0 e^{-\frac{\nu}{\tan \lambda_0}} \quad (24)$$

となる。但し m_0 は $\nu=0$ のときの動径 r



第6圖 ハマグリ4箇につき貝殻の一片の基準面に近い中央部断面の形における r と ν との関係を求めたもの (同一印は同一箇体、 r の単位は mm)



第7図 シホフキとアサリにつき貝殻の一片の基準面に近い中央部断面の形における r と v との関係を求めたもの(上2つはシホフキ, 下はアサリで, r の単位はmm)

でも個体により数度位の範囲で変化のあることは第6図のハマグリの場合からも判るし, 第1表に示したハマグリ2枚の角の接触角から求めた螺線角の頻度分布からも判る。

第1表 南伊豆下田港附近産のハマグリ等の等角螺線角 λ_0 の変異

λ_0	頻	度
<38°	0	0%
38°~40°	1	4
40°~42°	8	33
42°~44°	6	26
44°~46°	7	29
46°~48°	2	8
48°<	0	0
計	24	100%

りでは $\lambda_0=48.2^\circ$, ハマグリでは平均 $\lambda_0=44.6^\circ$, シホフキでは平均 $\lambda_0=49.4^\circ$ であつた。 λ_0 の値は同じspecies

V. 螺管の基礎方程式から推定せられる貝殻の諸性質

一般に総ての整形貝殻の螺管の方程式は

$$r=f(\Psi) e^{\frac{\theta}{\tan \lambda_0}} \quad (2)$$

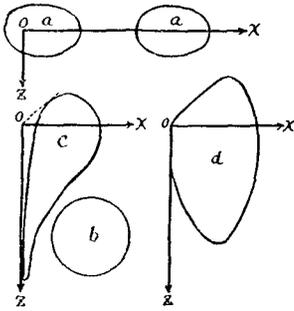
で表わされる。貝殻には種々の形があるが, これは $f(\Psi)$ の形($f(\Psi)$ はある時の成長線又は口の形とは必ずしもならない, 注意すべきである)と等角螺線角 λ_0 の値によつてきまるのである。

§ 1. $f(\Psi)$ と平面巻貝, 円錐巻貝, 二枚貝との関係

現生の貝殻の形を大別すると頭足類のアウム貝類に見られる対称巻貝(平面巻貝), 巻貝類(Gastropoda)の貝に多くに見られる不對称巻貝(円錐巻貝等), 二枚貝類の二枚貝がある。其他掘足類等に見られる曲殻, 巻貝類の傘貝に見られる円錐形の貝殻等変つたものもあるが, ここでは対称巻貝, 不對称巻貝, 二枚貝と $f(\Psi)$ との関係に就いて述べる。その他の貝殻については後報に述べるつもりである。

(i) 対称巻貝(平面巻貝)

$r_0=f(\Psi)$ がXY-基準面に対し対称で, 即ち Ψ が $(+\Psi_i) \geq \Psi \geq (-\Psi_i)$ なる範囲に貝が存在する(第8図a)。



第8圖 XZ平面における $r_0 = f(\Psi)$ の形が貝殻の種類により異なることを模型的に示す図。
 a: 対称巻貝, b: 対称巻貝中の円錐巻貝, c: 対称巻貝, d: 対称巻貝.

(ii) 対称巻貝

$r_0 = f(\Psi)$ が XZ-基準面に対し対称でない。従つて $\Psi_1 > |\Psi_2|$ で $-\frac{\pi}{2} > \Psi_1 > \Psi > \Psi_2 > -\frac{\pi}{2}$ なる Ψ の範囲に貝殻が存在する。但し Ψ_1 の側に軸の正方向を選ぶものとする。現生の貝殻の多くは Ψ が $-\frac{\pi}{2} \cong \Psi_1 > \Psi > \Psi_2 > 0$ の範囲に貝殻が存在する。これは円錐巻貝（塔状巻貝）（第8図b）と呼ばれている。しかし稀にミスガヒ、ナツメガヒの様に Ψ_2 が0か負のこともある。（第8図c）。又現生の貝殻の多くは右巻であるが、マイマイの中には左巻のものがある。第1図において θ の正方向（時計の進む方向）の増加に対し r が増加する貝は右巻、 θ の負方向の増加に対し r が増加する貝は左巻である。この種の貝殻には $r_0 = f(\Psi)$ の形の極めて不規則なものもある。

(iii) 二枚貝

形の上からは多くは右巻と左巻の $f(\Psi)$, λ_0 とともに等しい貝殻が向き合わせに発達せるもので、片方の貝殻は平面巻貝に近い対称巻貝（しかも多くは内接巻或は内接巻に極めて近い完全内巻）である（第8図d）。従つて一片毎に中心軸が一つ宛あり、この2つの中心軸は互に平行で且つこの距離は極めて接近している。 λ_0 の値は対称巻貝や円錐巻貝に比較して可成り小である。

以上の3種類の貝殻は夫々多くの種類に細分されるが、これは λ_0 の値, $r_0 = f(\Psi)$ の形, Ψ_1, Ψ_2 の値によつてきまると考えられる。次にこの問題に関し少し論議する。

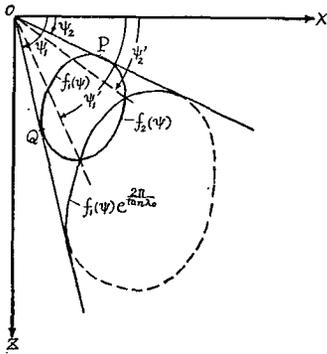
§ 2. 貝殻における緩巻, 密巻等の区別

貝殻には螺管の巻き方の程度により緩巻, 密巻があり, 尙細分すれば密巻は外接巻, 不完全内巻, 内接巻, 完全内巻に分けることができる。

第1図に於て $\theta = 0$ 即ち XZ-平面で切つた螺管の断面を考えれば, 螺管の切口の形 $r_0 = f(\Psi)$ は一般に閉塞曲線（密巻では一部欠除している）であるが, 貝殻の中心 O がこの曲線の外部にある場合は貝殻は不完全内巻（従来用いられている外巻とは異つた意味で不都合とは思ふが便宜上以下には外巻と称した）, 外接巻又は緩巻となり, O が丁度曲線の上にある場合は内接巻となり, O が曲線の内部に存在する場合には完全内巻（これを以下には便宜上内巻と称した）となる。

これらを以下にもう少し定量的に考えて見よう。先づ外巻, 外接巻, 緩巻の区別について吟味する。この場合貝殻の中心 O は $f(\Psi)$ の外にある。

第9図は第1図に於て $\theta = 0$ 即ち XZ-平面で切つた螺管の断面図である。 $r_0 = f(\Psi)$ に O から切線 OP 及び OQ を引けば $\angle XOQ = \Psi_1$, $\angle XOP = \Psi_2$ である。今 $f(\Psi)$ を両切点で2つに



第9圖 緩巻, 外接巻, 外巻の説明図

分けて中心Oに対して内側を $f_1(\psi)$, 外側を $f_2(\psi)$ とすれば, $\theta=2\pi$ に対する螺管の断面では $f_1(\psi)$ に対するものは $f_1(\psi) e^{\frac{2\pi}{\tan \lambda_0}}$ となる. 今

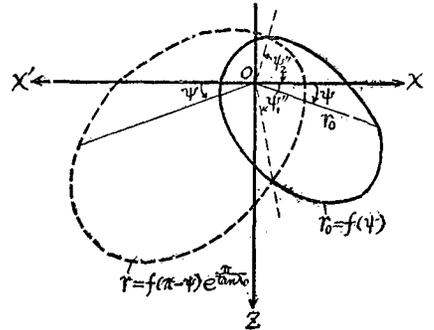
$$f_1(\psi) e^{\frac{2\pi}{\tan \lambda_0}} - f_2(\psi) = 0 \tag{26}$$

なる方程式を考えればこれは $r=f_1(\psi) e^{\frac{2\pi}{\tan \lambda_0}}$ と $r_0=f_2(\psi)$ との交点を求める方程式である. この式は一般に2つの根をもつ筈である. この根が虚根であれば緩巻となり, 実根であれば外巻となり, 実数の等根であれば外接巻となるのである.

外巻の場合に (26) 式の実根を夫々 ψ_1', ψ_2' とすれば $f_1(\psi)$ は ψ が ψ_1' から ψ_2' の範囲で貝が欠除している.

次に内接巻又は内巻の場合を考える. 但し, この場合には貝殻の中心Oは $r_0=f(\psi)$ なる曲線の上又は内部に存在する.

第10図に於て実線を内巻の場合の $\theta=0$ の断面即ち XZ 平面での螺管の切口の形 $r_0=f(\psi)$ とし (ψ は OX 軸から時計の針の進む方向を正とし $+\pi$ まで, OX 軸から時計の針の進む方向と逆の方向を負とし $-\pi$ までの範囲の値を考える), 点線を $\theta=+\pi$ 断面即ち X'Z 平面での螺管の切口の形とすればこれは $r=f(\psi) e^{\frac{\pi}{\tan \lambda_0}}$ となるが, これを XZ 平面に直せば $r=f(\pi-\psi) e^{\frac{\pi}{\tan \lambda_0}}$ で与えられる. 今 XZ 平面上でこの2つの形の交点の ψ の値を夫々 ψ_1'', ψ_2'' とすれば $r_0=f(\psi)$ は ψ が $0 \sim \psi_1'', 0 \sim \psi_2''$ の範囲では実在するが, この範囲以外では $f(\psi)$ は実在せず, この場合 $f(\psi)$ は閉塞曲線ではなく一部が欠除しているのである. ψ_1'', ψ_2'' の値は



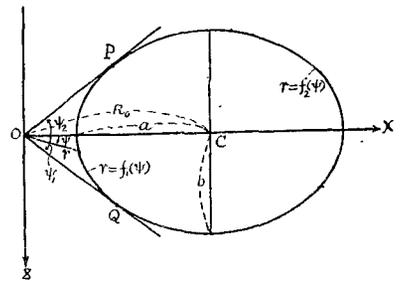
第10圖 内接巻, 内巻の説明図

$$f(\psi) - f(\pi-\psi) e^{\frac{\pi}{\tan \lambda_0}} = 0 \tag{27}$$

を解けばその根として求められる. 換言すれば (27) 式の両根が共に実根であれば内巻であり, 実数の等根であれば内接巻であり, 虚根であれば斯様な貝は存在しないのである.

上に述べたことを判りよくするために, 一例として平面巻貝で $r_0=f(\psi)$ の形が楕円又は円の場合に就て議論を進める.

第11図を第1図に於て $\theta=0$ の断面とし $r_0=f(\psi)$ を楕円とすれば



第11圖 XZ 平面で切った平面巻貝螺管の断口の形が楕円である場合

$$r = \frac{R_0 \cos \psi \pm \sqrt{a^2 - (a^2 + R_0^2 e^{\frac{\pi}{\tan \lambda_0}} - a^2 e^{\frac{\pi}{\tan \lambda_0}}) \sin^2 \psi}}{e^{\frac{\pi}{\tan \lambda_0}} \sin^2 \psi + \cos^2 \psi} \tag{28}$$

で表わされる。但し R_0 は貝殻の中心 O と楕円の中心 C との距離、 a 及び b は楕円の径（ a は OC 線上にある径）、 $e = \frac{a}{b}$ である。（円の場合には $e=1$ と考えればよい）従つて (26) 式の $f_1(\Psi)$ 及び $f_2(\Psi)$ は (28) 式の負符号の式である筈であるから (26) 式は

$$\{R_0 \cos \Psi - \sqrt{a^2 - (a_2 + R_0^2 e^2 - a^2 e^2) \sin^2 \Psi}\} e^{\frac{2\pi}{\tan \lambda_0}} - \{R_0 \cos \Psi + \sqrt{a^2 - (a^2 + R_0^2 e^2 - a^2 e^2)}\} \sin^2 \Psi = 0 \quad (29)$$

$$\therefore \sin \Psi = \pm \sqrt{\frac{\left(\frac{a}{R_0}\right)^2 - r^2}{\left(\frac{a}{R_0}\right)^2 - r^2 + e^2 \left\{1 - \left(\frac{a}{R_0}\right)^2\right\}}} \quad (30)$$

但し $r = \frac{e^{\frac{2\pi}{\tan \lambda_0}} - 1}{e^{\frac{2\pi}{\tan \lambda_0}} + 1} < 1$ (31) である。

貝殻の中心 O が楕円の外にあれば即ち $\frac{a}{R_0} < 1$ であれば、外巻・外接巻・緩巻の場合であり、(26) 式即ち (30) 式の両根が実根であれば外巻、実数の等根であれば外接巻、虚根であれば緩巻であることは前に述べた通りである。結局

局

$$\left. \begin{aligned} 1 > \frac{a}{R_0} > r &: \text{外巻} \\ 1 > \frac{a}{R_0} = r &: \text{外接巻} \\ 1 > r > \frac{a}{R_0} &: \text{緩巻} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

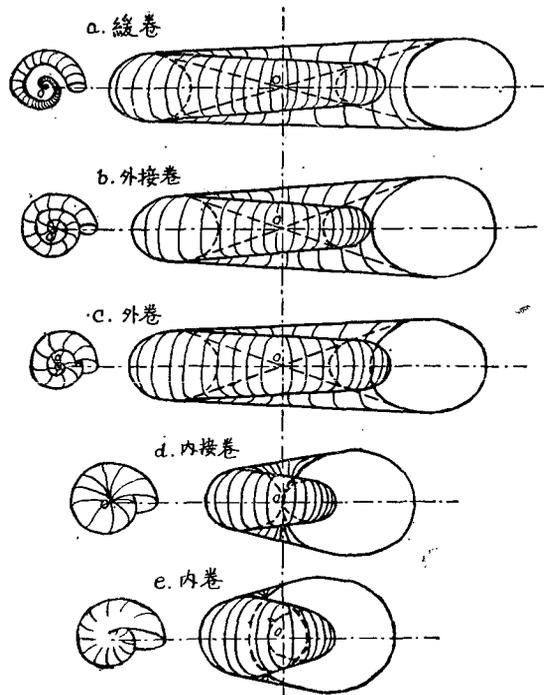
が $f(\Psi)$ が楕円の平面巻貝の外巻・外接巻・緩巻をきめる判別式である。 $f(\Psi)$ が円の場合も此の判別式は全く同様である。第12図には断面が楕円である場合の緩巻 (a)、外接巻 (b)、外巻 (c) の貝殻を模型的に示した。

又この場合 O から $f(\Psi)$ への切線の長さ r' 及び Ψ_1, Ψ_2 の値は

$$\begin{aligned} r' &= R_0 \cos \Psi / (e^2 \sin^2 \Psi + \cos^2 \Psi) \\ \sin \Psi &= \pm \left(\frac{a}{R_0}\right) / \sqrt{c^2 - \left(\frac{a}{R_0}\right)^2 (e^2 - 1)} \end{aligned} \quad (33)$$

で与えられる。

次に貝殻の中心 O が $r = f(\Psi)$ の上又は内部にあつて即ち $\frac{a}{R_0} \geq 1$ の場合は内接巻又は内巻の場合であり、何れであるかをきめる判別式は (27) 式であることは前に述べた通りであるが、



第12圖 螺管の断面が楕円である場合の緩巻，外接巻，外巻，内接巻，内巻を示す図

$f(\Psi)$ が、楕円で平面巻貝である場合には (27) 式は

$$\{R_0 \cos \Psi \pm \sqrt{a^2 - (R_0^2 e^2 + a^2 - a^2 e^2) \sin^2 \Psi}\} + e^{\frac{\pi}{\tan \lambda_0}} \{R_0 \cos \Psi \mp \sqrt{a^2 - (R_0^2 e^2 + a^2 - a^2 e^2) \sin^2 \Psi}\} = 0 \tag{34}$$

で表わされる。

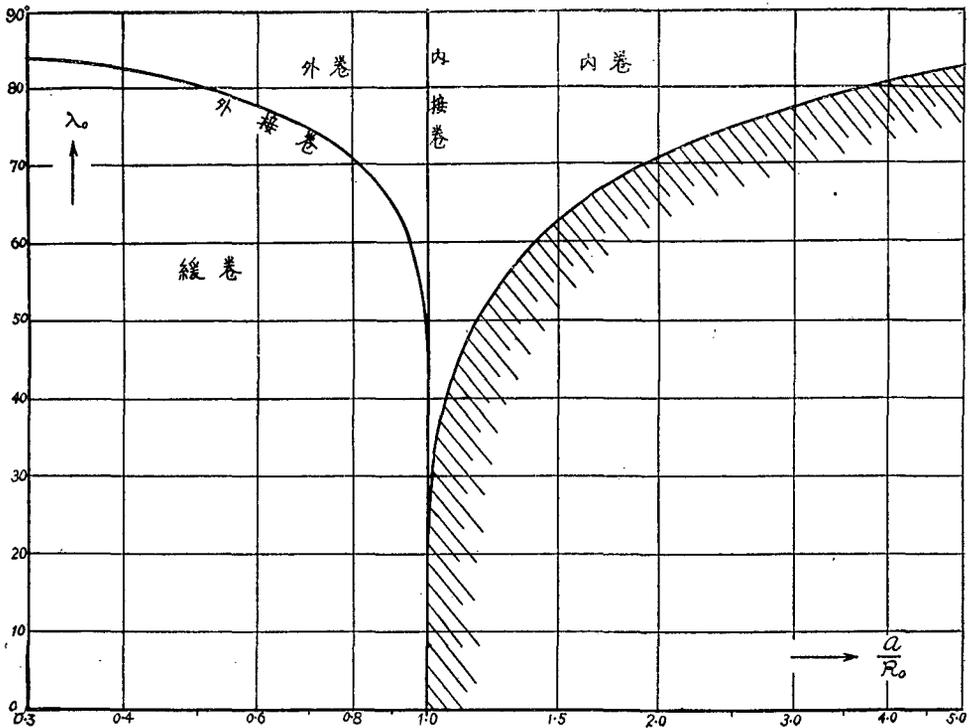
$$\therefore \sin \Psi = \pm \sqrt{\frac{\beta^2 - \left(\frac{a}{R_0}\right)^2}{\beta^2 - \left(\frac{a}{R_0}\right)^2 + e^2 \left\{\left(\frac{a}{R_0}\right)^2 - 1\right\}}} \tag{35}$$

但し $\beta = \frac{1 + e^{-\frac{\pi}{\tan \lambda_0}}}{1 - e^{\frac{\pi}{\tan \lambda_0}}} > 1$ (36) である。

従つて (35) 式の両根が実数であれば内巻，実数の等根であれば内接巻であるから，結局

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{a}{R_0}\right) = 1 & : \text{内接巻} \\ \beta > \left(\frac{a}{R_0}\right) > 1 & : \text{内巻} \\ \left(\frac{a}{R_0}\right) > \beta > 1 & : \text{実在せず} \end{aligned} \right\} \tag{37}$$

が内接巻・内巻をきめる判別式である。 $f(\Psi)$ が円の場合も全く同様である。第 12 図には切



第 13 圖 緩巻，外接巻，外巻，内接巻，内巻のとるべき λ_0 ， $\frac{a}{R_0}$ の値の範囲を示す図

口が楕円である場合の内接巻 (d), 内巻 (e) の模型を示した。

r, β は λ_0 だけの函数であるから, 平面巻貝で $f(\psi)$ が楕円又は円の場合には λ_0 の値と $\frac{a}{R_0}$ によつてその貝が緩巻であるか, 外接巻であるか, 外巻であるか, 内接巻であるか内巻であるかが決定されることになる。この関係を明らかにするために第13図には横軸に $\frac{a}{R_0}$ をとり (便宜上対数尺で表わした), 縦軸に λ_0 の値をとつて (32) 式 (37) 式の関係を一緒に図示した。第12図は上述の各種の外形を図示したものである。アンモン貝・アウム貝類の多くは $f(\psi)$ が楕円又は円に近い平面巻貝であるから此の場合に相当する。

§ 3. 貝殻表面の襞や模様

貝殻において成長線に平行な襞 (刻り) や突起のあるものが見られるが, これは1側線における λ_0 の値に小さい周期的変化が加つていると考えれば説明されるであらう。特に襞の場合は相隣つた側線における λ_0 の変化の位相が略々合致している場合である。又側線に平行な襞や突起のあるのは $f(\psi)$ 形が単純な形に小さい周期的変化即ち波型が加つていると考えれば説明される。

表面の模様の場合は上の場合と相似で側線上の λ_0 の小周期的変化や $f(\psi)$ の形の波型の代りに周期的色素の分泌が行われているものと考えれば説明される見込がある。

VI. 実際の貝殻の λ_0 の値に就て

実際の貝殻に就て λ_0 の値を求めるには第IV章に述べた方法を適用すればよいのであるが, 筆者の手元には貝殻の多くの種類の資料もないし, 且可成り繁雑でもあるので次の如き方法により其の概値を求めた。

§ 1. 平面巻貝の λ_0 の値

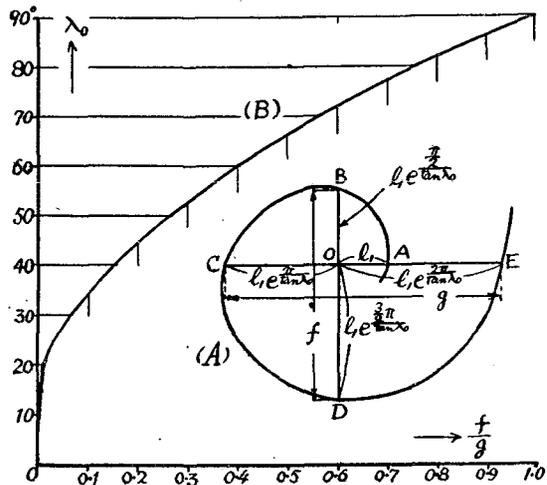
第14図 (A) に於て曲線 ABCDE を貝殻の任意の外側線の基準面への投影とし貝殻の中心 O を通り基準面内で任意に直交する二直線を引きこの外側線の投影との交点を逐次 ABCDE とし, $\overline{OA} = l_1, BD = f, \overline{CE} = g$ とすれば (19)' 式から

$$f = l_1 e^{\frac{\pi}{2 \tan \lambda_0}} \left(1 + e^{-\frac{\pi}{\tan \lambda_0}} \right)$$

$$g = l_1 e^{-\frac{\pi}{\tan \lambda_0}} \left(1 + e^{\frac{\pi}{\tan \lambda_0}} \right)$$

$$\therefore \frac{f}{g} = e^{\frac{\pi}{\tan \lambda_0}} \text{ 又は } \lambda_0 = \tan^{-1} \left\{ \frac{0.2172 \pi}{\log_{10} (g/f)} \right\} \tag{38}$$

なる関係式が得られる。従つて実際の平面巻貝に就て f, g の長さを測定して f/g の値を計算



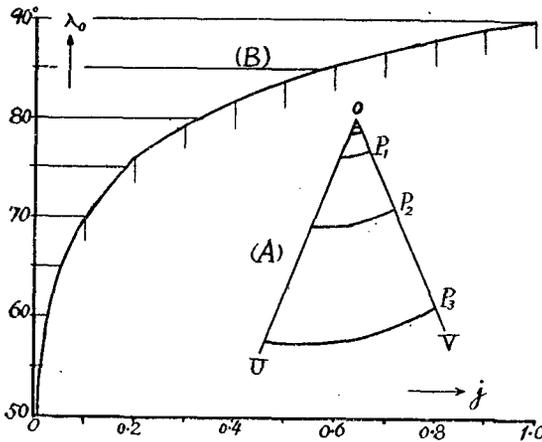
第14図 平面巻貝の等角螺旋線角 λ_0 の求め方

すれば、(38) 式から λ_0 の値が求められるのである。第 14 図 (B) は縦軸に λ_0 の値をとり、横軸に f/g の値をとつて (38) 式の関係を図示したものである。

この方法を用いて鹿間氏著日本化石図譜其他化石に関する諸論文中のアンモン貝の写真から其の種別に λ_0 の値を求めた。第 2 表はその頻度分布である。即ちアウム貝やアンモン貝類の平面巻貝では λ_0 の値が $78^\circ \sim 86^\circ$ のものが極めて多いことが判る。

§ 2. 円錐巻貝の λ_0 の値

第 15 図 (A) に於て O を貝殻の中心、UOV を円錐形をなす頂殻の部分とし、任意の外側線上の一点を P_1 、 OP_1 直線がその同一外側線の延長との交点を逐次 P_2 、 P_3 とする。 $OP_1=r_1$ 、 $OP_2=r_2$ 、 $OP_3=r_3$ と置けば (2) 式から (但し OP_1 線の θ を θ_1 とする)



第 15 図 円錐巻貝の λ_0 の求め方

第 2 表 アンモン貝の種別
等角螺旋線角 λ_0 の頻度分布

λ_0	頻	度
$<76^\circ$	0	0%
$76^\circ \sim 78^\circ$	1	3
$78^\circ \sim 80^\circ$	5	14
$80^\circ \sim 82^\circ$	8	22
$82^\circ \sim 84^\circ$	11	31
$84^\circ \sim 86^\circ$	7	19
$86^\circ \sim 88^\circ$	3	8
$88^\circ \sim 90^\circ$	1	3
計	36	100%

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= r_0 e^{\frac{01}{\tan \lambda_0}} \\ r_2 &= r_0 e^{\frac{5\pi + 01}{\tan \lambda_0}} \\ r_3 &= r_0 e^{\frac{4\pi + 01}{\tan \lambda_0}} \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

$$\therefore j \equiv \frac{r_1}{r_2} = \frac{r_2}{r_3} = \frac{r_2 - r_1}{r_3 - r_2} = e^{-\frac{2\pi}{\tan \lambda_0}} \quad (40)$$

$$\therefore \lambda_0 = \tan^{-1} \left(\frac{0.4343 \times 2\pi}{-\log_{10} j} \right) \quad (41)$$

なる関係がある。従つて実際の円錐巻貝に就て r_1 、 r_2 又は r_3 を測定し j の値を (40) 式によつて求めれば、(41) 式から λ_0 の値を計算できるのである。第 14 図 (B) は縦軸に λ_0 をとり横軸に j の値をとつて (41) 式の関係を図示したものである。

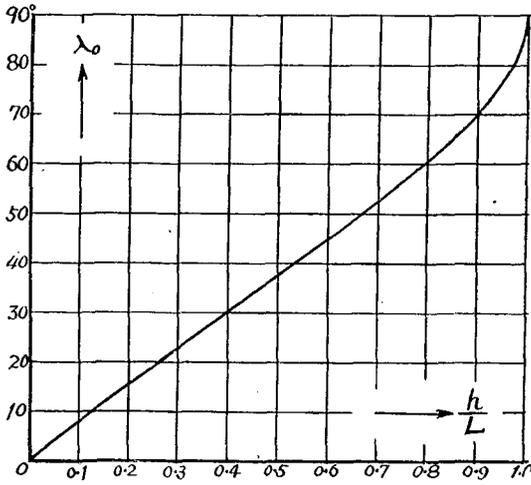
此の方法を日本貝殻図譜に記載の現生種の写真における円錐部の輪郭線に適用して λ_0 の値を求めた。第 3 表は其の頻度分布である。即ち λ_0 の値は $70^\circ \sim 85^\circ$ の範囲内のものが多いが、特に $75^\circ \sim 82^\circ$ 附近のものが極めて多い。

§ 3. 二枚貝の λ_0 の値

第 16 図 (A) に於て 2 片の貝殻が対称である二枚貝の貝殻の幅を L 、厚さを h とすれば、

3) 鹿間時夫；日本化石図譜（昭和 18 年）

4) 平瀬信太郎；日本貝殻図譜（昭和 9 年）



第16圖 二枚貝の λ_0 の求め方

(24) 式から近似的に次の関係がある（平面巻貝とみなして推論した）。

$$h = 2m_0 \sin \lambda_0 \cdot e^{-\frac{\lambda_0}{\tan \lambda_0}} \tag{42}$$

$$L = m_0 \left(1 + \sin \lambda_0 \cdot e^{-\frac{\frac{\pi}{2} + \lambda_0}{\tan \lambda_0}} \right) \tag{43}$$

$$\therefore \frac{h}{L} = \frac{2 \sin \lambda_0 \cdot e^{-\frac{\lambda_0}{\tan \lambda_0}}}{1 + \sin \lambda_0 \cdot e^{-\frac{(\frac{\pi}{2} + \lambda_0)}{\tan \lambda_0}}} \tag{44}$$

第16図(B)は(44)式によつて λ_0 と $\frac{h}{L}$ との関係を計算して図示したものである。従つて二枚貝の厚さと幅との比 $\frac{h}{L}$ が判ておれば(44)式即ち第16図(B)から λ_0 の値が近似的に求められる理である。2片の貝殻が対称でない場合(例へばホタテ貝等)には1片の貝殻の厚さの2倍を h として(44)式に代入して λ_0 の値を求めればよい。

二枚貝の多くの種の h 及び L の値は日本貝殻図譜に記載されてゐるので、これから $\frac{h}{L}$ を求め355種に就て λ_0 の値を得た。第4表はその頻度分布である。即ち二枚貝の λ_0 の値は可成り広い範囲に亘つてゐるが、25°~60°の範囲の値が多く、アンモン貝等の平面巻貝や円錐巻貝とは非常に異なつてゐるのは注意に値

第3表 円錐巻貝の種の等角螺線角 λ_0 の頻度分布

λ_0	頻	度
>70°	0	0.0%
70°~72°	2	0.7
72°~74°	1	0.4
74°~76°	1	0.4
76°~78°	3	1.1
78°~80°	6	2.2
80°~82°	20	7.4
82°~84°	67	24.9
84°~86°	104	38.6
86°~88°	49	18.2
88°~90°	16	5.9
計	269	100.0%

第4表 二枚貝の種の等角螺線角 λ_0 の頻度分布

λ_0	頻	度	λ_0	頻	度
0°~5°	0	0.0%	50°~55°	38	10.7
5°~10°	3	0.8	55°~60°	33	9.3
10°~15°	5	1.4	60°~65°	21	5.9
15°~20°	9	2.5	65°~70°	16	4.5
20°~25°	10	2.8	70°~75°	7	2.0
25°~30°	33	9.3	75°~80°	6	1.7
30°~35°	33	9.3	80°~85°	0	0.0
35°~40°	38	10.7	85°~90°	2	0.6
40°~45°	42	11.8	計	355	100%
45°~50°	59	16.7			

する。

VII. 圓錐卷貝の殻頂角 $2i$ 及頂角と等角螺線角 λ_0 との関係

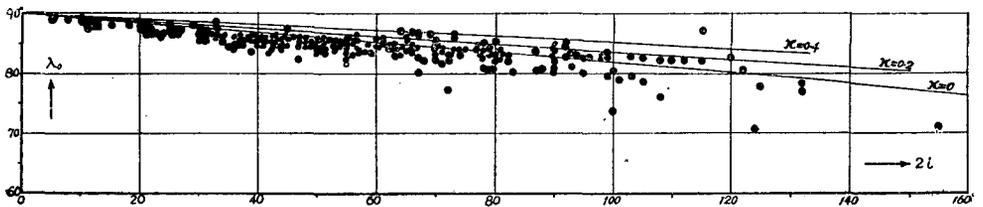
圓錐卷貝の殻頂角の半分 i は $i = 90^\circ - \Psi_2$ なる物理的意義をもつてゐる。種々の圓錐卷貝に就て殻頂角 $2i$ を測定し、その頻度分布を調べてみると第 5 表が得られた。即ち i は種類により 0° から 90° 附近まで広い範囲の値があるが、 $10 \sim 45^\circ$ 位の値が多いことは注意に値する。

第 5 表 圓錐卷貝の殻頂角 $2i$ (種別) の頻度分布

$2i$	頻	度	$2i$	頻	度
$0^\circ \sim 10^\circ$	6	2.4%	$90^\circ \sim 100^\circ$	16	6.3%
$10^\circ \sim 20^\circ$	13	5.1	$100^\circ \sim 110^\circ$	8	3.1
$20^\circ \sim 30^\circ$	21	8.2	$110^\circ \sim 120^\circ$	4	1.6
$30^\circ \sim 40^\circ$	36	14.1	$120^\circ \sim 130^\circ$	3	1.2
$40^\circ \sim 50^\circ$	37	14.5	$130^\circ \sim 140^\circ$	1	0.4
$50^\circ \sim 60^\circ$	35	13.7	$140^\circ \sim 150^\circ$	0	0.0
$60^\circ \sim 70^\circ$	31	12.2	$150^\circ \sim 160^\circ$	1	0.4
$70^\circ \sim 80^\circ$	27	10.6	$160^\circ <$	0	0.0
$80^\circ \sim 90^\circ$	16	6.3	計	255	100%

次に殻頂角 $2i$ と等角螺線角 λ_0 との関係をしらべるために、横軸に i をとり縦軸にそれに対応する λ_0 をとつて種々の貝殻について点をとれば第 17 図が得られた。図に見られる如く λ_0 と $2i$ との間には可成り規則正しい関係があるのであつて、 $i=0^\circ$ では $\lambda_0=90^\circ$ であるが i が段々増加するに従つて λ_0 は減少する。

簡単なために螺管の断面は平均して円



第 17 圖 圓錐卷貝の λ_0 の値 (実測値) と殻頂角 $2i$ (実測値) との関係

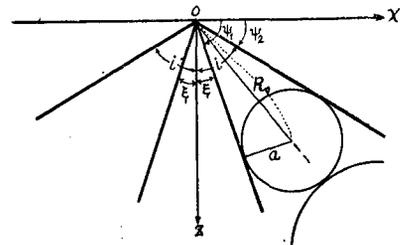
形であるとし、而かも外接してゐると仮定する。

今第 18 図を圓錐卷貝の中心軸を含み胚殻の口を通る断面とし、頂角の半分を i 、螺管の内接圓錐の頂角の半分を ξ とすれば次の関係がある。

$$\left. \begin{aligned} i &= \frac{\pi}{2} - \Psi_2 \\ \xi &= \frac{\pi}{2} - \Psi_1 \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

又胚殻の口の円形断面の半径を a 円の中心の radius vector の長さを R_0 とすれば図から

$$\sin \frac{i - \xi}{2} = \frac{a}{R_0}$$



第 18 圖 圓錐卷貝の螺管の切口が円形で外接巻である場合の XOZ 平面の断面図

であり、他方 (32) 式の中央の式と (31) 式とから

$$\frac{a}{R_0} = \frac{e^{\frac{2\pi}{\tan\lambda_0}} - 1}{e^{\frac{2\pi}{\tan\lambda_0}} + 1}$$

であるから

$$\sin\left\{\frac{i}{2}(1-\kappa)\right\} = \frac{e^{\frac{2\pi}{\tan\lambda_0}} - 1}{e^{\frac{2\pi}{\tan\lambda_0}} + 1} \quad (46)$$

又は

$$\tan\lambda_0 = \frac{2\pi}{\log_e \left\{ \frac{1 + \sin\frac{i(1-\kappa)}{2}}{1 - \sin\frac{i(1-\kappa)}{2}} \right\}} \quad (47)$$

が得られる。但し円錐巻貝に於ては一般に ξ は i に比較して極めて小さいから $\xi = \kappa i$ ($\kappa \ll 1$) と置いて $\frac{i-\xi}{2} = \frac{i}{2}(1-\kappa)$ で表わして置いた。

今 $\kappa = 0, 0.2, 0.3$ とし、 i に種々の値を代入して (47) 式から λ_0 の値を計算し第 18 図中に実線でその値を記入した。

円錐巻貝に就ての実測値は図から判るやうに斯様な計算値特に $\kappa = 0$ の場合に可成りよく一致してゐる。即ち近似的には多くの円錐巻貝に於て斯様な仮定に近い関係が成立つてゐると考えることが出来るであらう。

VIII. 第1報の總括と結語

現生の軟体動物に見られる規則正しい貝殻の形に就いて定量的考究を試みた。先づ第 II 章に於て貝殻の形に共通に見られる特徴を指摘し、特に個々の貝殻が一般に成長の各段階に於て相似形であることに注目して第 III 章に於て貝殻の螺管の基本形が、胚殻の部分を除いて一般に

$$r = f(\Psi) e^{\frac{\theta}{\tan\lambda_0}} \quad (2)$$

なる方程式で表わされることを理論的に求めた。而して第 IV 章に於て平面巻貝、円錐巻貝、二枚貝に就いての 2~3 実例を挙げて此の方程式が成立つことを証明した。又一種の貝の異つた個体に対しては λ_0 及び $f(\Psi)$ がほとんど一定なることを示した。

次に第 V 章に於て此の方程式から推定せられる貝殻の諸性質に就て述べ、特に平面巻貝 (gyral shell)、円錐巻貝 (heteromorphic shell)、二枚貝の相異、緩巻 (gyroceracone)、密巻 (nautilicone) の區別、密巻では外接巻、不完全内巻 (serpental)、完全内巻 (involute or occulal) 等の差異に就て論じた。又成長線方向、測線方向に平行に生ずる襞や模様についても注意した。

第 VI 章においては平面巻貝、円錐巻貝、二枚貝について等角螺線角 λ_0 を簡単に求める方法

を述べ、実際に異つた種の貝殻について λ_0 を求めてその頻度分布をしらべた。その結果平面巻貝や円錐巻貝では λ_0 の値は $80^\circ \sim 88^\circ$ 位のものが多いこと、二枚貝では $40^\circ \sim 50^\circ$ 位のものが多いことが判つた。第VII章では円錐巻貝について殻頂角 $2i$ の頻度分布をしらべ、又 i と λ_0 との関係についても実測値と理論値とを比較した。

尙、地質時代を異にする同種類の貝殻の λ_0 の変化、掘足類の曲殻その他の稍不規則性の貝殻、アンモン貝に見られる曲殻、緩巻、外巻、内巻等の変化と貝殻常数の変化との関係、貝殻の成長速度の問題等についての補足的な研究は第2報に述べたいと思う。しかしながら、種の差違による $f(\Psi)$ の変化、貝殻の形の進化の問題等残された問題は沢山あると思われるが、門外漢の筆者には到底よく為し得ないことであり、専門家の研究を切に希望する次第である。

終りに臨み、種々激励を賜つた小熊捍博士、故藤原咲平博士に厚く感謝の意を表す。又貝殻の実測に際しては工藤義夫氏の助力に負う所が多い。こゝに厚く感謝の意を表す。

5. A General Equation indicating the Regular Forms of Mollusca Shells, and its Application in Geology, especially in Paleontology, (I)

By Takaharu FUKUTOMI

(Department of Geophysics, Faculty of Science.)

A study was made theoretically and empirically, on the regular forms of the Mollusca shells. In Chapter II are indicated the general characteristics among the various types of shell forms. Considering that the shells at any stage of growth, except the stage of the larva, have respectively similar forms, the writer obtained theoretically the general equation of the spiral tube of the shell as

$$r = f(\Psi) e^{\frac{\theta}{\tan \lambda_0}} \quad (2)$$

where Ψ is, as shown in Fig. 1, the angle between radius vector OP ($=r$) (O: the centre of the shell, P: any point on the shell) and the standard plane XY which is perpendicular to the axis of the shell OZ; where $r_0 = f(\Psi)$ is the equation of the intersection between the shell and the XZ-plane which cuts the shell in the neighborhood of the mouth of the Larva's shell, θ is the angle between the projection of OP on the XY-plane and the X-axis, and λ_0 is the angle between any radius vector in the XY-plane and the equiangular spiral which is the projection of any generating line of the shell AP on the XY-plane.

Next, it was ascertained in the several examples, as described Chapter IV, that the equation holds, in general, for the actual forms of such Gyral Shell as Nautilus Pompilius, the Gastropoda shell and the Pelecypoda Shell, and also that the values of λ_0 and $f(\Psi)$ are respectively constant in regard with the regular shells of the same species.

In Chapter V, the writer discussed the several properties which are estimated from the equation, especially the differences among the Gyral Shell, the Heteromorphic Shell and the shell of the Pelecypoda, and also on the differences among the Gyroceracone, the Serpental, the Involute etc..

In Chapter VI, the method of measurement was considered for the values of λ_0 from the actual shells of the Gyral, the Gastropoda and the Pelecypoda. By application of this method to many actual shells, it was recognized that the values of λ_0 of such Gyral Shells as Ammonit and of the living shells of the Gastropoda are frequent in $80^\circ \sim 88^\circ$, but the values of λ_0 of the Pelecypoda Shells are frequent in $40^\circ \sim 50^\circ$.

In Chapter VII, the frequency distribution was discussed of the top angle $2i$ of the conical Gastropoda shell (Table 5), and comparison was made of measured relation between i and λ_0 of respective shells with the theoretical relation.

In the next paper, it is proposed to treat some applications of the above-mentioned

equation in Geology especially in Paleontology, and also the expansion of the equation for somewhat irregular forms of shell.
