



Title	7. 空知川の縦の乱流拡散について
Author(s)	柏村, 正和; KASHIWAMURA, Masakazu
Citation	北海道大学地球物理学研究報告, 5, 79-90
Issue Date	1957-10-25
DOI	<a href="https://doi.org/10.14943/gbhu.5.79">https://doi.org/10.14943/gbhu.5.79</a>
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/13811">https://hdl.handle.net/2115/13811</a>
Type	departmental bulletin paper
File Information	5_p79-90.pdf



## 7. 空知川の縦の乱流拡散について

柏村正和

(北海道大学工学部理学第一研究室)

— 昭和 32 年 7 月受理 —

### 序

河川の鉛直方向の乱流拡散に関しては、古くから理論が発達し、観測も数多く行われている。鉛直乱流拡散係数の決定には、川の断面の流速分布を測定する事により容易に得る事が出来<sup>1)</sup>、多くの河川に於ける値が求められている。是に対して流下方向即ち縦方向の乱流拡散現象は、拡散する物理量の追跡方法に実施困難な場合が多くその資料も少ない。その物理量が水塊である場合の一例としては洪水波現象がありそれについては水理学的な研究が行なわれているが、理論的取扱は難しく実際との比較には近似解を以てせねばならない<sup>2)</sup>。

1956年11月に筆者は空知川中流域延長45 kmに亘つて平水時の水塊移動速度の観測を行なつた。観測方法を述べると、上流の或地点で工業用粗塩の溶液を投入し、下流に於て川水の電気抵抗を刻々測定して塩分を検出し、流下時間を測定するものである。此の結果塩水は縦の乱流拡散によつて拡り検出地点の塩水濃度は時間的に変化し或時刻で一つのピークを持つ。此の塩水法は室内実験や小規模の水路以外には余り行なわれていない方法である。

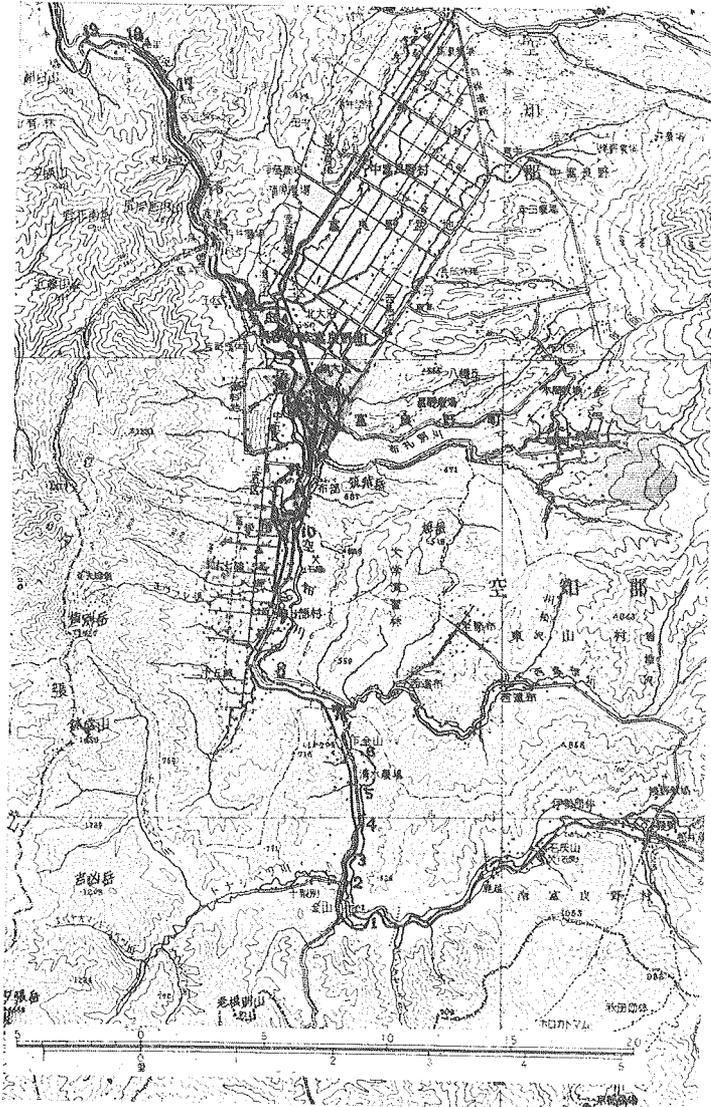
筆者は定常流に於ける縦の乱流拡散方程式を観測条件にあてはめて解き上記の結果と比較しその最大濃度の値から縦の乱流拡散係数を求めた。2, 3の仮定を設ける為それによる誤差は予期されるが概略の値は得られたものとする。

### 1. 観測方法とその結果

第1図に見られる如く空知川中流域を各区1~4 kmの19区間に分割し、各区间毎に水塊到達時間を調べた。一区间の観測方法を述べると、上流で40~200 kgの工業用粗塩を予めドラム罐中で充分攪拌して水に溶かし、一度に川の中央部に注ぎ入れる。同時にストツブウオッチを押し、下流側ではその時計に従つて刻々変化する水の電気抵抗を測定して塩分濃度のピーク時を求めるのである。検出地点の塩分濃度の最大変化量は此の観測を通じて僅か0.03%に過ぎず、従つて塩水と川水の相対運動は無視出来るものと仮定すれば、此の塩分濃度のピーク時は水塊の平均移動時間を与える。川水の電気抵抗測定には Kohlrausch 電橋を使用した。電極

1) 野満隆治・河川学；地人書刊，p. p. 81~83.

2) S. Hayami; "On the Propagation of Flood Waves" Bull, Disaster Prev. Res, Inst., Kyoto Univ. No. 1 (1951).



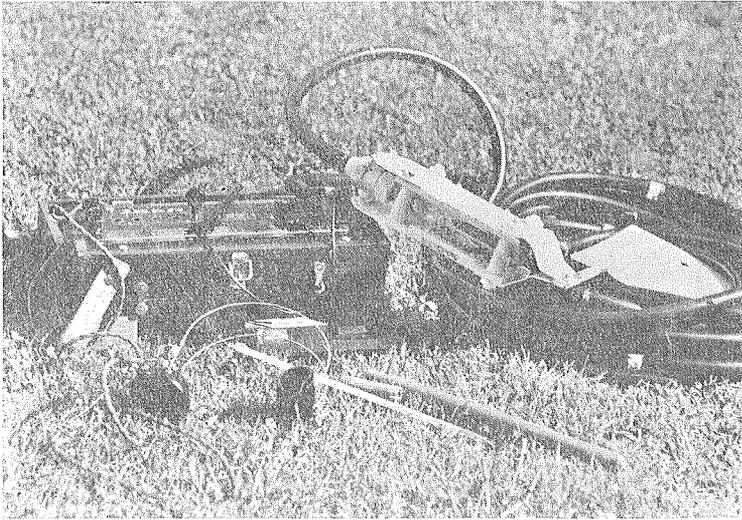
第1図 空知川中流域観測地点

には縦横各4cmの白金薄板を3cm間隔に対向させて絶縁物のフレームに固定したものを用いた(第2図)。Kohlrusch電橋の回路略図は第3図の通りである。

電極間に現れる抵抗値は電源が直流の場合はpolarizationにより著しく大きな値になっていく。交流を使用する場合でも周波数が低いと同じく大きな値を示す。交流を使用する場合の見掛けの抵抗 $R$ は次式で与えられる。

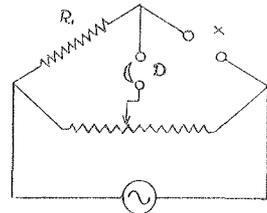
$$R = \sqrt{\left(R_0 + \frac{\sin \Psi}{\omega C}\right)^2 + \left(\frac{\cos \Psi}{\omega C}\right)^2} \quad (1.1)$$

$R_0$ は実抵抗で $\omega$ は周波数の $2\pi$ 倍を表す。 $1/C$ は分極常数と呼ばれ電極の形状、大きさ、



第2図 Kohlrusch 電橋と白金電極

電解液の種類，濃度により変る。 $\psi$  はやはり電解液の種類濃度によつて変る常数である。従つて， $R=R_0$  なる為には， $\omega$  を大きくすればよい。通常市販の Kohlrusch 電橋は 800~1,000 サイクルのプザー発振による交流電圧を使用しているが，濃厚溶液では，これでは満足でない。一例として硫酸銅 5% 溶液の極間抵抗  $R$  と周波数の関係を第 4 図に掲げる。(1.1) 中に於ける  $C$  は濃度が高くなると小さくなるものであつて，高濃度では周波数が相当に大きくなると polarization の影響を無視する事が出来ない。逆に濃度が低くなると  $C$  が大きくなるので， $\omega$  は比較的小さくても  $R=R_0$  が近似的に成立つようになる。

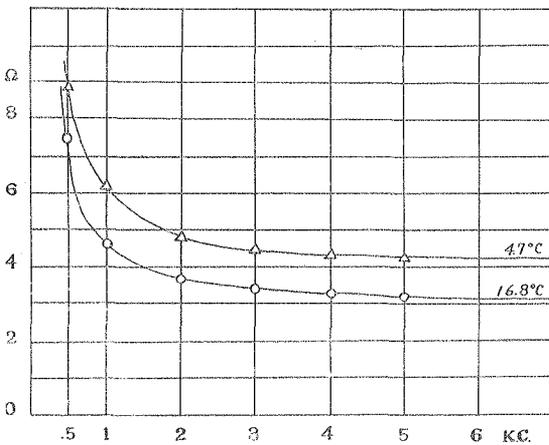


第3図 Kohlrusch 電橋回路  
X に白金電極を接ぐ  
D はレシーバー

空知川に於いて行なつた観測中の塩分濃度は極めて小さく，500 サイクルでも充分  $R=R_0$  としてよい事が確認された。

従つて Kohlrusch 電橋によつて測られた川水の電極間抵抗はそのまま実抵抗を表すものと見てさしつかえない。

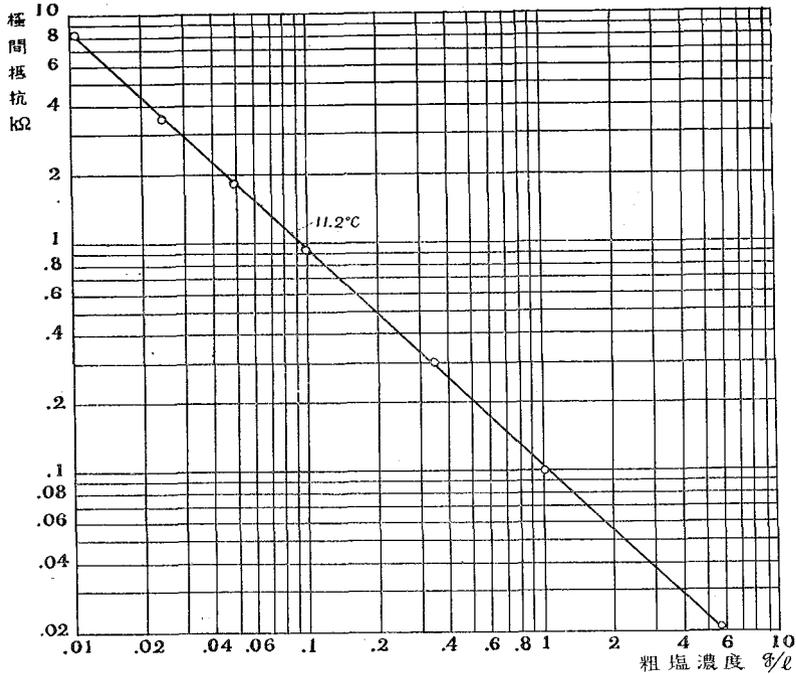
海水の塩素量と電気伝導度との関係はよく知られているが<sup>3)</sup>，観測



第4図 硫酸銅 5% 溶液の周波数による見掛けの抵抗値変化  
電極常数  $0.0552 \text{ cm}^{-1}$  の白金電極を用う

3) 例えば海洋観測常用表，日本海洋学会，p. 90.

に使用した工業用粗塩はその組成が不明であつたので、粗塩濃度と極間抵抗との関係を調べてみた(第5図)。



第5図 粗塩濃度と極間抵抗の関係  
電極常数は  $0.146 \text{ cm}^{-1}$  である

一般に電解液の比抵抗は温度係数が大きい。上記粗塩溶液の場合その温度係数として  $5^{\circ}$  ~  $10^{\circ}\text{C}$  附近で 0.025 を得ている。

使用した白金電極の電極常数  $k$  は

$$k = 0.146 \text{ cm}^{-1}$$

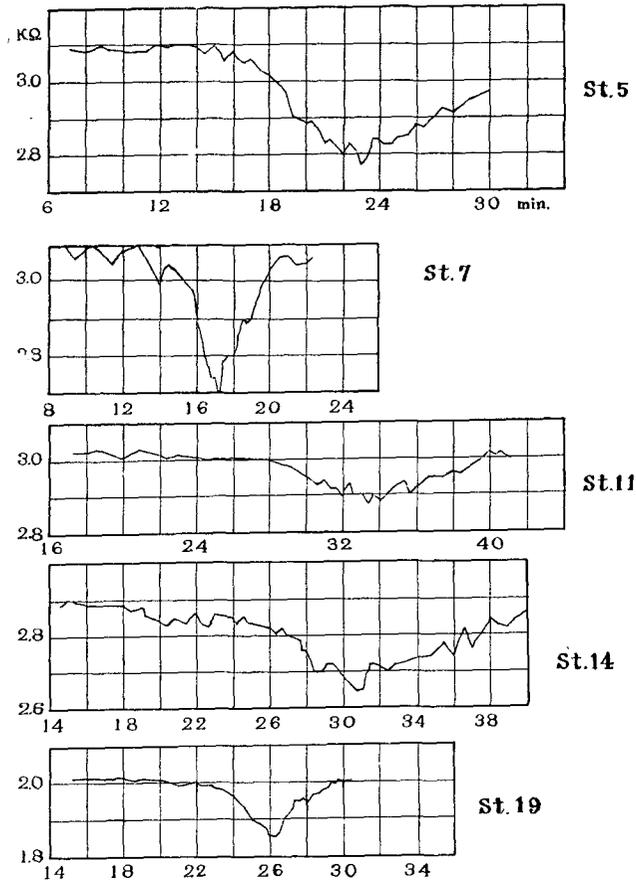
であつて、極間抵抗を  $R \text{ ohm}$  とすれば液の比抵抗  $\sigma \text{ ohm cm}$  は

$$\sigma = R/k \tag{1.2}$$

で表される。

前述の如く空知川では 19 の station に分割して観測したが<sup>4)</sup>、その中から観測グラフ数例を第6図に示す。川水には種々の溶解物質が混入しているから塩水投入前に極間抵抗は既にある値を示している。第5図から容易に判るように此の back ground の抵抗が高い程塩分検出能力は大きい。下流に行くに従つて川水の汚染量は増加し電気抵抗は減少して行くから下流程塩分検出能力が低下する事になる。その上流量は下流に向つて増加するから、下流は更に塩分

4) 千里治男；空知川流下時間の研究(その1, 2, 3), 昭和32年1月, 北電土木部計画課刊。



第6図 川水の極間抵抗の時間的变化を示す

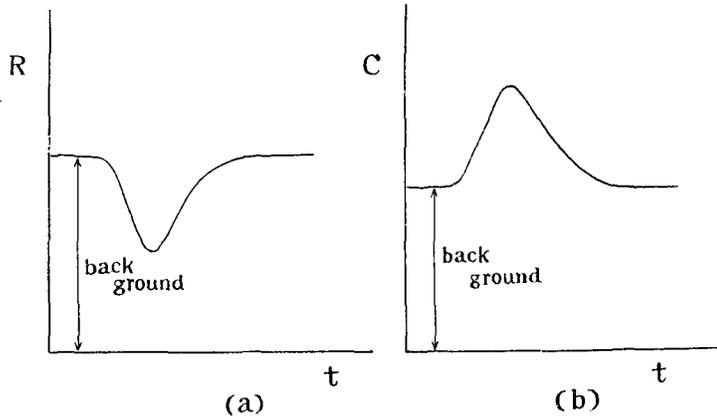
検出能力が下る。従つて今回の観測では下流に行くに従つて投入粗塩の量を増したのである。此の観測が成功をした大きな原因は観測地域が川の比較的中流域で川水の汚染量がまだ少なかったからである。下流に行つて川水が著しく汚染され更に海からの塩分拡散のある所では<sup>5)</sup>、相当多量の粗塩を投入しても、実際に投入塩分の検出は不可能であろうと思われる。

## 2. 観測結果の理論的考察

第6図に示した結果は投入塩量や検出地点迄の距離、平均流速等夫々異つているから夫等のグラフをそのまま比較する事は出来ない。従つて比較に便利ならしめる為各量を無次元化して考える。 $R$  (極間抵抗)  $-t$  (時間) の曲線は第3図を参照し更に温度係数を考慮して  $C$  (塩分濃度)  $-t$  (時間) の関係に直すことが出来る (第7図  $a \rightarrow b$ )。

今、塩分濃度に対して川水の back ground を除いて考察をすすめる。投入塩量を  $S$ 、流

5) 柏村正和；河口に於ける二重水層 (1), 北大工学部研究報告, 第15号, 昭和31年12月, p. 267.



第 7 図

量を  $Q$ , 投入地点から検出地点迄の平均到着時間を  $t_0$  とすると

$$S = \int_0^{\infty} CQ dt$$

$$\therefore \int_0^{\infty} C \frac{S}{Qt_0} \cdot d\left(\frac{t}{t_0}\right) = 1 \quad (2.1)$$

となる。故に縦軸に濃度の無次元量  $C \frac{S}{Qt_0}$  を、横軸に時間の無次元量  $t/t_0$  をとると、種々の観測曲線の比較は容易である。 $t_0$  は如何にして決めるかが問題となるが、その為には縦方向の乱流拡散の理論的考察を進めて行かねばならない。

理想的状態として川を定常等流で水路を一様と考える事にする。縦方向の乱流拡散係数を一定としこれを  $A$  とする。又平均流速を  $U$ , 流下方向を  $x$  軸とすると、塩分濃度の拡散に対し次式を得る。

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = A \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (2.2)$$

(2.1) に示したように  $C \frac{S}{Qt_0}$  と  $t/t_0$  との関係を得る為(2.2) 式を次の如く無次元化する。

$$\frac{\partial \left( C \frac{S}{Qt_0} \right)}{\partial (t/t_0)} + \frac{\partial \left( C \frac{S}{Qt_0} \right)}{\partial (x/Ut_0)} = \frac{A}{Ux_0} \frac{\partial^2 \left( C \frac{S}{Qt_0} \right)}{\partial (x/Ut_0)^2} \quad (2.3)$$

但し  $x_0 = Ut_0$  である。 $C \frac{S}{Qt_0} = C_*$ ,  $t/t_0 = \tau$ ,  $x/Ut_0 - t/t_0 = \xi$ ,  $A/Ux_0 = a$  と置換えると  $C_*(x, t) = C_*(\xi, \tau)$  となるから (2.3) 式は簡単に

$$\frac{\partial C_*}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 C_*}{\partial \xi^2} \quad (2.4)$$

となる。塩水投入の初期及境界条件に対し,  $t=0$ ,  $x=0$  で、川の長さ  $2\epsilon$  に亘つて塩水濃度を

同様と考えその無次元化したものを  $C_{*0}$  とする。これは次式にて表される。

$$\begin{cases} \tau = 0, & |\xi| > \varepsilon/x_0 \text{ で} & (\varepsilon > 0) \\ & C_*(\xi, \tau) = 0 \\ \tau = 0, & |\xi| \leq \varepsilon/x_0 \text{ で} \\ & C_*(\xi, \tau) = C_{*0} \end{cases} \quad (2.5)$$

(2.4)は熱伝導や拡散の方程式と知られて居り、その解は

$$C_* = \int_0^\infty d\mu \int_{-\infty}^\infty K(\lambda) e^{-\mu^2 a \tau} \cos[\mu(\xi - \lambda)] d\lambda$$

で与えられる。 $C_*(\tau=0)=f(\xi)$ として Fourier 積分を用いると次式の如くなる。

$$\begin{aligned} C_* &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\mu \int_{-\infty}^\infty f(\lambda) e^{-\mu^2 a \tau} \cos[\mu(\xi - \lambda)] d\lambda \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi a \tau}} \int_{-\infty}^\infty f(\lambda) e^{-\frac{(\xi - \lambda)^2}{4a\tau}} d\lambda \\ \begin{cases} f(\xi) = C_{*0} & |\xi| \leq \varepsilon/x_0 \\ = 0 & |\xi| > \varepsilon/x_0 \end{cases} \end{aligned}$$

であるから、更に

$$C_* = \frac{2\varepsilon/x_0 C_{*0}}{\sqrt{4\pi a \tau}} e^{-\frac{\xi^2}{4a\tau}}$$

となる。 $a$ を川の断面積とし  $C_{*0} = \frac{S}{2\varepsilon a} / \frac{S}{Qt_0}$  と考え、 $Q=Ua$ ,  $x_0=Ut_0$ なる事に注意すれば、上式は

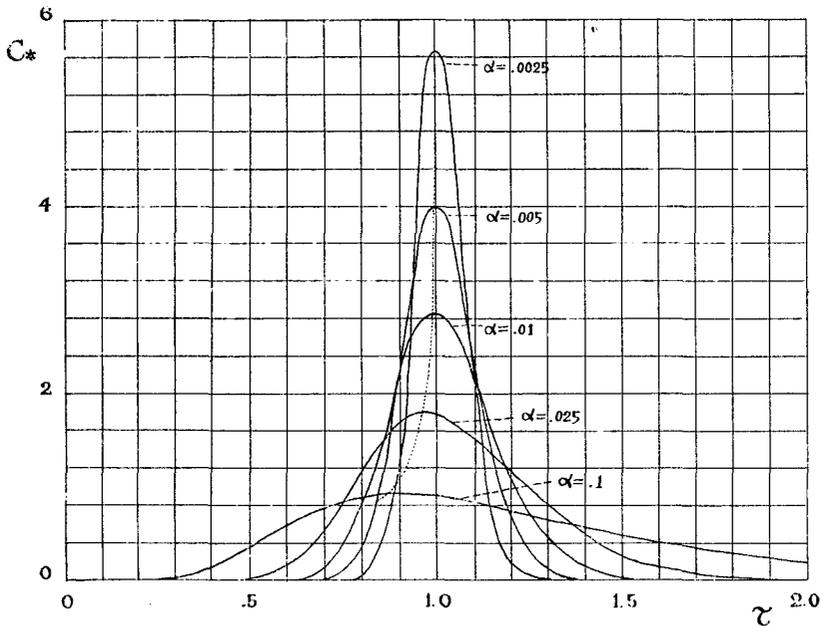
$$C_* = \frac{1}{\sqrt{4\pi a \tau}} e^{-\frac{\xi^2}{4a\tau}} \quad (2.6)$$

となる。観測地点について  $C_*$  を考えると、 $x=x_0$ であるから、 $\xi=x_0/Ut_0-t/t_0=1-\tau$ となる。故に

$$C_* = \frac{1}{\sqrt{4\pi a \tau}} e^{-\frac{(1-\tau)^2}{4a\tau}} \quad (2.7)$$

となり、これが観測される曲線を代表する式となる。(2.7)を種々の  $a$  について画くと第8図の通りである。又(2.7)について  $\sqrt{\tau/4a}=y$  とすると

$$\begin{aligned} \int_0^\infty C_* d\tau &= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{4\pi a \tau}} e^{-\frac{(1-\tau)^2}{4a\tau}} d\tau \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-(y - \frac{1}{4ay})^2} dy \\ &= 1 \end{aligned} \quad (2.8)$$



第8図  $C_* = \frac{1}{\sqrt{4\pi a \tau}} \exp\left\{-\frac{(1-\tau)^2}{4a\tau}\right\}$   
濃度と時間の関係を無次元化したものを表す

となり、(2.7)式は、(2.1)を満足している。

次に(2.7)を用いて、 $C_*$ が極大となる $\tau$ を求めると

$$\tau(C_{*max}) = \sqrt{a^2+1} - a \tag{2.9}$$

である。又 $C_*$ の極大値 $C_{*max}$ は

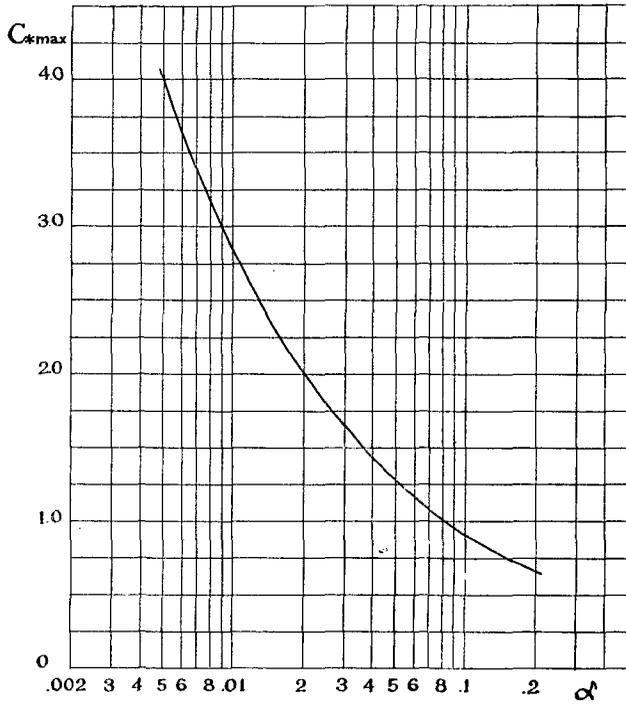
$$C_{*max} = \frac{1}{\sqrt{4\pi a(\sqrt{a^2+1}-a)}} \exp\left\{-\frac{\sqrt{a^2+1}-1}{2a}\right\} \tag{2.10}$$

である。(2.9)から判るように $\sqrt{a^2+1}-a \leq 1$ であるから、 $C_*$ の極大は $t_0$ より小さい $t$ に対して存在する。即ち塩分濃度のピークの時刻よりも平均到着時間は後なのである。然し、後に判るように、我々の観測では、 $a$ は0.005~0.02程度で(2.9)から直ちに $\tau(C_{*max})=1$ と見做しても大差のない事が判る。即ち我々の観測では、塩分濃度のピーク時刻を以て平均到着時刻としてもさしつかえない。又實際上フロートによる表面流速の観測や流速計による平均流速の算出結果から、此のピーク時刻を以つて平均到達時間としてよい事が認められている<sup>9)</sup>。

(2.10)は $C_{*max}$ と $a$ との関係を与えるものであつて一部は第9図の如き曲線となる。故に実測結果から $C_{*max}$ が求まれば逆に $a$ を算出する事が出来るわけである。

(2.7)は上記の如く観測曲線を代表するものであるが、実際の観測曲線は河道の不整、中州

6) 尾崎 晃；空知川流下時間の研究(その1, 2, 3), 昭和32年1月, 北電土木部計画課刊。



第9図 
$$C_{*max} = \frac{\exp\left\{-\frac{\sqrt{\alpha^2+1}-1}{2\alpha}\right\}}{\sqrt{4\pi\alpha(\sqrt{\alpha^2+1}-\alpha)}}$$

濃度の極大値と拡散係数との無次元化された関係を表す

の存在や、支流の流入等あつて第6図の如く乱れているのが普通である。従つて是等の資料と(2.7)を比較したのではαの計算は難しい。

その上第6図の如き曲線から C\*—τ 曲線を誘導するのは手順を要する。故にαの算出の為には(2.10)を用いて、実測曲線のピークから求めるのがよいと考えられる。

### 3. 縦の乱流拡散係数の導出

観測から得られるものは極間抵抗の時間による変化であるから、前節の方針に従つてαを求める為には先ず抵抗の最大変化量 ΔR から C\*max を誘導せねばならない。

先ず、各 station に於ける back ground の極間抵抗値を、温度係数 0.025 を用いて 11.2°C の時の抵抗値に直し、第5図からその抵抗値に相当する塩分濃度を求める。実際には此の塩分濃度 C に相当した塩分が含まれているわけではないが、これ丈の塩分が含まれている場合と温度係数等に大差がないからこのように扱うのである。

$$-\frac{\Delta R}{R} \doteq \frac{\Delta C}{C}$$

が成立つから ΔR を求める事により ΔC が得られる。即ち抵抗の最大変化量 ΔR を知れば塩分

の最大変化量  $\Delta C$  を求める事が出来る。此の  $\Delta C$  を無次元化したものが  $C_{*max}$  になるわけである。

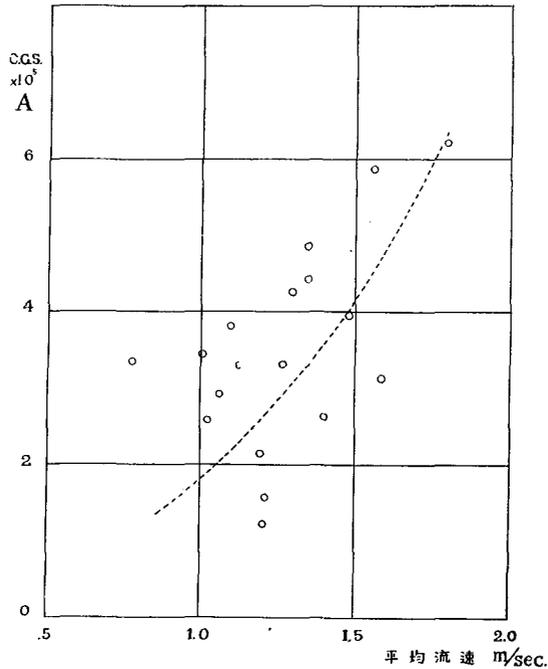
無次元化するには  $\Delta C$  を  $S/Qt_0$  で割ればよい。このようにして  $C_{*max}$  が得られたなら第9図を用いて各  $\alpha$  が計算出来る。従つて  $A = aUx_0$  であるから各区間の平均の縦方向乱流拡散係数  $A$  が求められるのである。以上の操作及び結果の各 station に於けるものを次表に掲げる(第1表)。

第 1 表

Station	$R_{KQ}$	$R_{11.2^{\circ}}$	$C$ g/l	$\Delta R/R$	$\Delta C \times 10^{-3}$	$Qt_0/S$	$C_{*max}$	$\alpha$	c.g.s. $Ux_0 \times 10^7$	c.g.s. $A \times 10^5$
1	3.09	3.62	0.0288	0.179	5.15	0.311	1.60	0.0810	1.08	3.35
2	2.22	3.61	0.0408	0.165	6.74	0.126	0.85	0.1170	0.94	1.09
3	2.77	3.08	0.0323	0.104	3.36	0.874	2.94	0.0094	1.70	1.59
4	2.80	3.10	0.0319	0.119	3.80	0.882	3.35	0.0072	1.68	1.21
5	2.83	3.10	0.0316	0.106	3.35	0.683	2.28	0.0154	2.14	3.30
6	2.86	3.10	0.0312	0.084	2.62	0.935	2.45	0.0132	3.35	4.42
7	2.87	3.10	0.0311	0.129	4.02	0.530	2.13	0.0178	2.21	3.94
8	2.80	2.90	0.0319	0.104	3.32	0.780	2.59	0.0118	4.96	5.85
9	2.80	3.23	0.0319	0.073	2.33	1.454	3.39	0.0069	4.24	2.92
10	2.77	3.13	0.0323	0.099	3.20	1.154	3.69	0.0058	5.38	3.12
11	2.71	3.02	0.0330	0.050	2.65	1.732	2.85	0.0099	6.27	6.20
12	2.59	2.96	0.0347	0.058	2.01	1.488	2.99	0.0090	2.38	2.15
13	2.60	2.95	0.0345	0.048	1.66	1.953	3.24	0.0076	5.01	3.81
14	2.52	2.86	0.0457	0.077	2.75	0.851	2.34	0.0145	3.35	4.85
15	2.04	2.30	0.0446	0.044	1.96	1.585	3.10	0.0084	3.06	2.58
16	1.97	2.16	0.0463	0.083	3.85	0.909	3.49	0.0065	4.06	2.64
17	1.94	2.12	0.0471	0.047	2.21	1.398	3.03	0.0086	4.00	3.44
18	1.96	2.13	0.0465	0.075	3.48	0.745	2.59	0.0118	3.61	4.25
19	1.86	2.01	0.0491	0.080	3.93	0.557	2.19	0.0169	1.95	3.30

以上の如くにして縦軸方向の乱流拡散係数を求める事が出来た。各区間を比較してみると距離や、平均流速、河況、塩量等大いに異つているにもかかわらず、拡散係数  $A$  は  $1 \sim 6 \times 10^5$  c.g.s. の範囲内に収まつている。普通の大きな川で  $10^6 \sim 10^7$  c.g.s., 大陸の大川で  $10^8$  c.g.s. と予想されているが<sup>2)</sup>、空知川の此の部分は流れの規模が小さい為上記程度の範囲に止るものと考えられる。断面流速分布が一樣に近いと縦の乱流拡散は小さいと考えられるが逆に断面形状が不規則で流速分布が最大から最小迄いろいろである場合とか、中州があつて分流されている場合等は水自身の乱れによる拡散以上に、係数が大きく算出される事は想像に難くない。

鉛直方向の拡散係数については多くの資料からこれが川底附近を除いては流速の自乗に比例するという結果が出ている<sup>1)</sup>。縦方向に対してはどのようになるか試みに平均流速と  $A$  との関係を画くと第10図の如くになり、にわか結論は下せないが、平均流速の増加に伴つて



第10図 縦の乱流拡散係数と平均流速との関係

Aも亦増加する傾向をうかがう事が出来る。

#### 4. 結 論

此の論文の要旨を取まとめると次のようなものである。

- 1) 川の中流域より上流方面の汚染度の低い流れに対しては粗塩を投入し電気伝導度の変化によつて水塊の伝播時間を測定する事が出来る。
- 2) 観測結果の塩分極大値を無次元化する事により縦方向の乱流拡散係数を算出する事が出来る。
- 3) 空知川の中流域の観測では縦の乱流拡散係数は  $1 \sim 6 \times 10^5$  c.g.s. の範囲にあつた。
- 4) 水塊の平均到達時間以前に塩分濃度の極大が起るが、上記観測の場合には殆ど両者が同時であると思つてさしつかえない。

然し、これ迄の取扱を細部に亘つて検討すると次のような問題がある。

- 1) 溶解粗塩が或濃度以下に稀釈されるに至る迄、塩水と川水との相対運動はどの程度存在するのか。
  - 2) 中州のあるような場合、係数は過大に出るが、これを如何に修正したらよいか。
- 等であるが、これらの研究は更に続けて行く考である。

尚乱流拡散係数と平均流速の関係は更に多くの場合について調べて行きたいと思う。

此の観測は北海道電力株式会社の要請で行なわれたものであるが、貴重な資料の得られた

事に対し、同社土木部計画課関係各位に厚く感謝の意を表す。

尚此の研究を進めるに当つて、絶えず有益な御意見を賜つた北大工学部福島久雄教授と、実測に当つて助力を戴いた同大川原教務職員とに併せて感謝を捧げるものである。

## 7. On the Longitudinal Turbulent Diffusion of the Sorachi River

By Masakazu KASHIWAMURA

(Department of Applied Physics, Faculty of Technology, Hokkaido University)

The propagating velocity of water mass on the Sorachi River was observed by the salt-water method, which is to measure the variation of the electric conductivity occurred by the change of salt concentration and to obtain the mean velocity of the flow. Analysing the graph of electric resistance of water to time at the observing station theoretically, the dimensionless relation between salt concentration  $C_*$  and time  $\tau$  is given as follows.

$$C_* = \frac{1}{\sqrt{4\pi a\tau}} \exp\left\{-\frac{(1-\tau)^2}{4a\tau}\right\}$$

Comparing the results observed with the upper equation, the longitudinal coefficients of turbulent diffusion are computed as  $1\sim 6 \times 10^5$  c.g.s..