



Title	9. 弾性論から見たクラカトア型カルデラの形成
Author(s)	音田, 功; ONDA, Isao
Citation	北海道大学地球物理学研究報告, 7, 77-88
Issue Date	1960-03-07
DOI	https://doi.org/10.14943/gbhu.7.77
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/13825
Type	departmental bulletin paper
File Information	7_p77-88.pdf



9. 弾性論から見たクラカトア型カルデラの形成

音 田 功

(北海道大学理学部地球物理学教室)

— 昭和 34 年 11 月受理 —

I. 緒 言

火山体の中心或いは火山附近の地域に可成り急傾斜で囲まれた、直径が数 km から数 10 km に及ぶ略円形の凹地に対してカルデラの名称が与えられている。日本に存在する主なカルデラを直径と、そのカルデラ壁の平均高度と底の最深部分の高度差を 5 万分の 1 地形図及び湖底深度図より読みとつて陥没深度として併せて第 1 表に掲げる。

第 1 表 日本に存在する主なカルデラ
Table 1. Calderas existing in Japan.

名 称 Name	直 径 Diameter	陥 没 深 度 Depression
屈 斜 路 Kuttaro	20~26 km	400 m
阿 寒 Akan	13~24	450
摩 周 Mashū	6~ 7.5	500
支 笏 Shikotsu	13~15	600
俱 多 楽 Kuttara	3~ 3.5	400
洞 爺 Tōya	12~17	450
十 和 田 Towada	12~12.5	450
箱 根 Hakone	8~12	500
阿 蘇 Aso	17~25	450
哈 良 Aira	23~24	400
池 田 Ikeda	3~ 4.5	580
三 原 山 Mt. Mihara	3~ 4.5	100
磐 梯 山 Mt. Bandai	2	600

このカルデラの成因について、古くからいろいろな説が出されている。Williams¹⁾はこのカルデラを成因上から六種類に分類した。第 1 表に掲げたカルデラのうちで、磐梯山は爆発カルデラに、その他は陥没カルデラに属している。特に三原山はこのうち Glencoe 型に分類されその他の殆んどのカルデラは Krakatoa 型である。Krakatoa 型カルデラはカルデラの形成直

1) H. Williams; Calderas and their origin, Univ. Calif. Publ., Bull. Dept. Geol. Sci., 25 (1941), 239-346.

前に多量の軽石や熔結凝灰岩を噴出せしめたものである。Escher²⁾ はマグマ溜りが地下 15~50 km の深い所にあつて、始めの爆発の際にマグマ溜りから地表に達する円筒状の火口管が開けられ、その後火口管の周辺がくずれて、空になつているマグマ溜り及び火口管を埋めたと考へた。これに対し、Williams³⁾ は地下 5~6 km の浅い所にマグマ溜りがあつて、大量の軽石や火山灰を噴出した為にマグマ溜りが空になつて、天井の重みで天井が落込んだとした。最近、Kuno⁴⁾ は岩石進化に問題を取扱つて、マグマ溜りが空になつて、その天井が無数の小塊となつてマグマ溜りに落ち込んだと云う結論に達した。

ここでは特にこれら Krakatoa 型カルデラの成因について弾性論の立場から吟味して行こう。

II. 山体の影響

まず始めに、山が存在する時、その下には応力や歪エネルギーの集中のみられる事が期待されるので、それらの order を調べてみよう。

一般に弾性方程式は

$$(\lambda + \mu) \text{grad div } U + \mu \nabla^2 U + \rho F = 0 \quad (2.1)$$

で表わされる。ここで

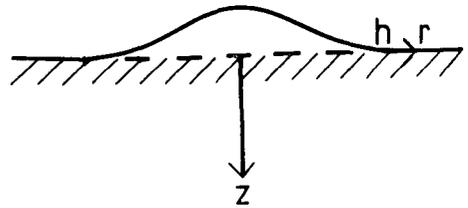
λ, μ : Lamé's elastic constants.

ρ : density

U : displacement vector

F : body force.

火山の大きさに比して地球表面の曲率は無視しうるから、地殻を半無限弾性体と見做し、火山の山体をその弾性体の上に載っているものと仮定する。地殻の表面を $z=0$ の面とし、鉛直下方に z 軸をとる (第 1 図)。山の形を *Fourier-Bessel* 級数で表わし、山体によつて荷重を $z=0$ の面に働く圧力分布に置き換える。ここでは、山体の荷重のみを考えている故 body force F を無視する。従つて、境界条件として



第 1 図
Fig. 1.

$$\left. \begin{aligned} z=0; \quad \widehat{zz} &= P \cdot \sum_n a_n J_0(k_n \cdot r) \\ \widehat{rz} &= \widehat{z\phi} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

2) B. G. Escher; On the formation of caldera's.; Leidsche Geol. Med., 3 (1929), 189-219.

3) H. Williams; 前掲 1).

4) H. Kuno; Formation of calderas and magmatic evolution., Trans. Am. Geophys. Union, 34, (1953), 267-280.

を与えて (2.1) 式を解く。但し k_n は山麓までの距離を a とする時 $k_n \cdot a$ を $J_0(x)=0$ の n 番目の根とする固有値である。 a_n は更に *Fourier-Bessel* 積分によつて

$$a_n = \left[\frac{a^2}{2} J_1(k_n a) \right]^{-2} \cdot \int_0^a J_0(k_n x) \cdot x \cdot \widehat{zz} dx \quad (2.3)$$

で与えられる。

$r=0$ 即ち山頂の直下では $J_0(0)=1$ なる故、山の実質の高さを h として

$$\widehat{zz} = \rho gh = P \cdot \sum_n a_n \quad (2.4)$$

即ち

$$P = \rho gh, \quad \sum_n a_n = 1 \quad (2.5)$$

である。(2.1) 式の円筒座標系に於ける解⁵⁾ に (2.2) の境界条件を代入すれば、変位成分として

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \frac{P}{2(\lambda+\mu)} \cdot \sum a_n \left(1 - \frac{\lambda+\mu}{\mu} k_n z \right) \frac{J_1(k_n r)}{k_n} e^{-k_n z} \\ u_\varphi &= 0 \\ u_z &= \frac{P}{2(\lambda+\mu)} \sum a_n \left(\frac{\lambda+2\mu}{\mu} + \frac{\lambda+\mu}{\mu} k_n z \right) \frac{J_0(k_n r)}{k_n} e^{-k_n z} \\ A &= \frac{P}{\lambda+\mu} \cdot \sum a_n J_0(k_n r) e^{-k_n z} \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

及び応力成分は

$$\left. \begin{aligned} \widehat{rr} &= \frac{P}{2} \sum a_n \left\{ \left(\frac{2\lambda+\mu}{\lambda+\mu} - k_n z \right) J_0(k_n r) - \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu} - k_n z \right) J_2(k_n r) \right\} e^{-k_n z} \\ \widehat{\varphi\varphi} &= \frac{P}{2} \sum a_n \left\{ \left(\frac{2\lambda+\mu}{\lambda+\mu} - k_n z \right) J_0(k_n r) + \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu} - k_n z \right) J_2(k_n r) \right\} e^{-k_n z} \\ \widehat{zz} &= P \sum a_n (1 + k_n z) J_0(k_n r) e^{-k_n z} \\ \widehat{rz} &= P \cdot z \sum a_n k_n J_1(k_n z) e^{-k_n z} \\ \widehat{z\varphi} &= \widehat{r\varphi} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

となる。

次に、地殻内部の応力の集中を調べるに当たり、最大偏差応力を計算する。即ち、

$$6S^2 = (\widehat{rr} - \widehat{\varphi\varphi})^2 + (\widehat{\varphi\varphi} - \widehat{zz})^2 + (\widehat{zz} - \widehat{rr})^2 + 6 \{ (\widehat{rz})^2 + (\widehat{z\varphi})^2 + (\widehat{r\varphi})^2 \} \quad (2.8)$$

の S で与えられる。Mises の条件に従えば、この S の値が物質の強度に達した時に壊れる。今議論を簡単にする為に、偏差応力を P_{ij} で、応力を p_{ij} で表わすと、Kronecker の記号 δ_{ij} を用いて

$$P_{ij} = p_{ij} - \frac{1}{3} (p_{11} + p_{22} + p_{33}) \cdot \delta_{ij} \quad (2.9)$$

である。 S との間には

5) 竹内 均; 地球物理学的興味のある 2, 3 の方程式の一般解, 地震 II, 9 (1951), 190-199.

$$2S^2 = \sum_i \sum_j P_{ij}^2$$

の関係にある⁶⁾。更に単位体積当りの歪エネルギー W は

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} K \cdot \mathcal{A}^2 + \frac{1}{4\mu} \sum_i \sum_j P_{ij}^2 \\ &= \frac{1}{2} K \cdot \mathcal{A}^2 + \frac{1}{2\mu} \cdot S^2 \end{aligned} \tag{2.10}$$

で表わされる。ここで

$$K = \lambda + \frac{2}{3} \mu: \text{compressibility}$$

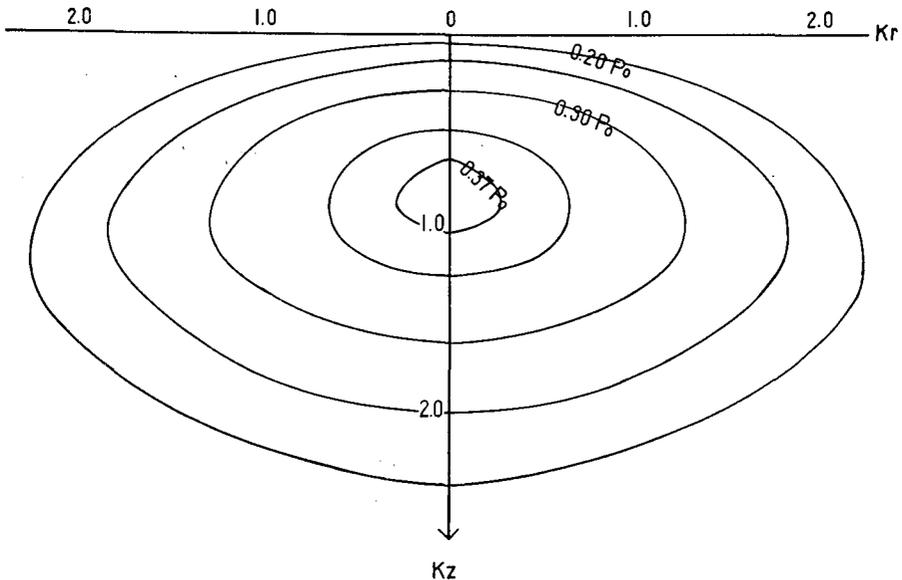
今、簡単に

$$a_1 = 1, \quad a_n = 0 \quad (n > 1)$$

とおく、即ち山の形を

$$-z = h \cdot J_0(kr), \quad k = 2.4/a$$

で表わした時の山体下部の地殻に於ける最大偏差応力の分布図を作ると、第2図のようになる。但し、 r 軸及び z 軸は kr 及び kz で目盛つてある。 S の最大となる点及びその値は



第 2 図 山体の荷重による最大偏差応力の分布

Fig. 2. Distribution of the maximum distortional stress under the load of the body of a volcano.

6) K. E. Bullen; Seismic Wave Transmission, Handbuch der Physik, Ed. 47, 1956, S. 78.

$$\left. \begin{aligned} & \left(r = 0, \quad kz = \frac{3\lambda + 2\mu}{3(\lambda + \mu)}, \quad \varphi = 0 \right) \\ & S_{\max} = (\sqrt{3}/2) \cdot P \exp. \{ -(3\lambda + 2\mu)/3 \cdot (\lambda + \mu) \} \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

同様に歪エネルギーについての最大値は、山頂の直下の $z=0$ の面上にあつて

$$W_{\max} = P^2 \cdot (4\lambda + 3\mu) / 8(\lambda + \mu)^2$$

である。 S 及び W の最大値は山体の傾斜にはよらずに、山の高さのみに依存する。今、山の高さを 2 km, $\lambda = \mu = 3 \times 10^{11}$ dyne/cm² とおいてみると

$$S_{\max} = 2 \times 10^8 \text{ dyne/cm}^2$$

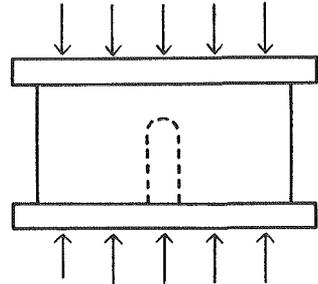
$$W_{\max} = 5 \times 10^4 \text{ erg/cm}^3$$

となる。10 km の深さの地殻の強度を confining pressure 3×10^9 kg/cm² のもとでの花崗岩類の強度 3×10^9 dyne/cm² にとすれば、単に山が存在するのみでは下部の応力の集中及びエネルギーの蓄積はみられるが、壊れる事はないであろう。

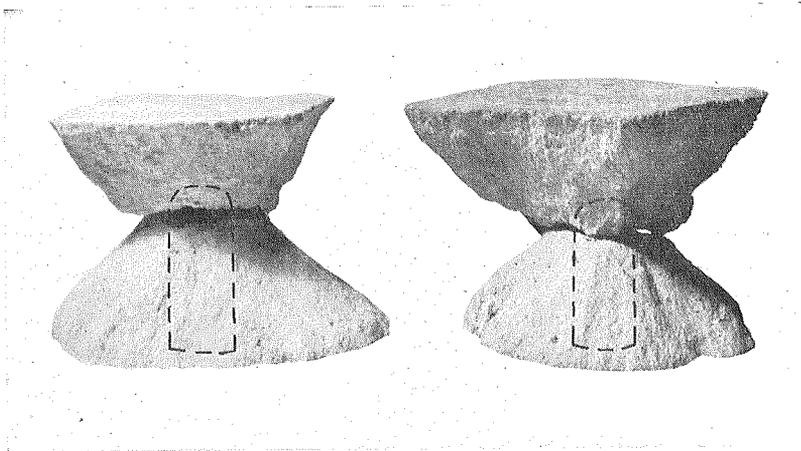
III. 陥没説

地殻の表面にある原因では壊れないと云う事が示されたので、次にその原因を内部に求める。始めにマグマ溜りの中が中空になつた場合を取扱う。

まず、10 cm × 10 cm × 5.8 cm の大きさの煉瓦に径 1.2 cm 深さ夫々 4 cm 及び 5 cm の孔を開け、concrete testing machine によつて面に垂直に圧力を加えたところ (第 3 図),



第 3 図 圧縮実験 (点線は孔)
Fig. 3. Compression experiment (dotted line: bore)

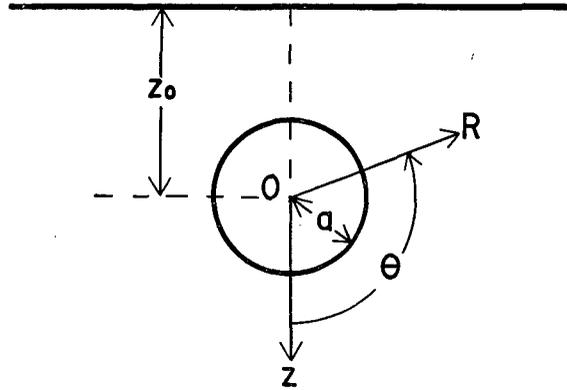


第 4 図 孔を開けた煉瓦の圧縮破壊
左: 孔の深さ 5 cm 右: 孔の深さ 4 cm

Fig. 4. Compression experiment of bored bricks.
Left: the depth of the bore 5 cm. Right: the depth of the bore 4 cm.

煉瓦の周辺部では縦及び横の割れ目が生じたが、孔の先端部では荷重の方向に対して約 45° の傾きをもつ割れ目が認められる (第4図)。

これを数学的に取扱つてみよう。マグマ溜りは一般にはいろいろな形をしていると考えられるが、ここでは、始め球形をなして、その内面に働く圧力によつて他の形に変形したと仮定する。



第 5 図
Fig. 5.

地表から z_0 離れている球孔の中心に原点 O をとる (第5図)。今、円筒座標系において球孔がない場合の任意の深さ $z-z_0$ に働く力は

$$(F_r = 0, F_z = \rho g(z-z_0), F_\varphi = 0) \quad (3.1)$$

の成分を有するから、(2.1) 式の body force の項に (3.1) を代入して、半径 a の球孔の内面に静水圧 P が働らく場合を求める。即ち、上記の極座標系における境界条件

$$\left. \begin{aligned} R = a: \widehat{RR} &= P \cdot P_0(\cos \theta) \\ \widehat{R\theta} &= \widehat{R\varphi} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

を与えて解けば⁷⁾、変位成分として

$$\left. \begin{aligned} u_R &= -\frac{\rho g z_0}{3(\lambda+2\mu)} \left\{ R + \frac{3\lambda+2\mu}{4\mu} \frac{a^3}{R^2} \right\} \cdot P_0(\cos \theta) \\ &\quad - \frac{\rho g}{\lambda+2\mu} \left\{ \frac{3}{10} R^2 + \frac{1}{2} z_0^2 + \frac{\lambda+2\mu}{3\mu} \frac{a^3}{R} - \frac{1}{45} \frac{a^5}{R^3} \right\} P_1(\cos \theta) \\ &\quad - \frac{\rho g z_0}{3(\lambda+2\mu)} \left\{ 2R + \frac{10(3\lambda+5\mu)}{9\lambda+14\mu} \frac{a^3}{R^2} - \frac{18(\lambda+\mu)}{9\lambda+14\mu} \frac{a^5}{R^4} \right\} P_2(\cos \theta) \\ &\quad - \frac{\rho g}{5(\lambda+2\mu)} \left\{ R^2 + \frac{28(2\lambda+3\mu)}{19\lambda+26\mu} \frac{a^3}{R^3} - \frac{40(\lambda+\mu)}{19\lambda+26\mu} \frac{a^5}{R^5} \right\} P_3(\cos \theta) \\ &\quad - \frac{P}{4\mu} \frac{a^3}{R^3}, \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

7) 竹内 均; 前掲5).

$$\begin{aligned}
 u_\theta = & -\frac{\rho g}{2(\lambda+2\mu)} \left\{ \frac{1}{5} R^2 + z_0^2 + \frac{\lambda+2\mu}{3\mu} \frac{a^3}{R} + \frac{1}{45} \frac{a^5}{R^3} \right\} \frac{d}{d\theta} P_1(\cos \theta) \\
 & + \frac{\rho g z_0}{3(\lambda+2\mu)} \left\{ R + \frac{10\mu}{9\lambda+14\mu} \frac{a^3}{R^2} + \frac{6(\lambda+\mu)}{9\lambda+14\mu} \frac{a^5}{R^4} \right\} \frac{d}{d\theta} P_2(\cos \theta) \\
 & - \frac{\rho g}{15(\lambda+2\mu)} \left\{ R^2 - \frac{14(\lambda-\mu)}{19\lambda+26\mu} \frac{a^5}{R^3} + \frac{30(\lambda+\mu)}{19\lambda+26\mu} \frac{a^7}{R^5} \right\} \frac{d}{d\theta} P_3(\cos \theta) \\
 u_\varphi = & 0
 \end{aligned}$$

応力の成分は

$$\begin{aligned}
 \widehat{RR} = & -\frac{3\lambda+2\mu}{3(\lambda+2\mu)} \rho g z_0 \left(1 - \frac{a^3}{R^3} \right) P_0(\cos \theta) \\
 & + \frac{\rho g R}{15(\lambda+2\mu)} \left\{ 3(5\lambda+6\mu) - 5(3\lambda+4\mu) \frac{a^3}{R^3} + 2\mu \frac{a^5}{R^5} \right\} P_1(\cos \theta) \\
 & - \frac{4\mu \rho g z_0}{3(\lambda+2\mu)} \left\{ 1 - \frac{5(9\lambda+10\mu)}{9\lambda+14\mu} \frac{a^3}{R^3} + \frac{36(\lambda+\mu)}{9\lambda+14\mu} \frac{a^5}{R^5} \right\} P_2(\cos \theta) \\
 & + \frac{4\mu \rho g R}{5(\lambda+2\mu)} \left\{ 1 - \frac{7(17\lambda+18\mu)}{19\lambda+26\mu} \frac{a^5}{R^5} + \frac{100(\lambda+\mu)}{19\lambda+26\mu} \frac{a^7}{R^7} \right\} P_2(\cos \theta) \\
 & + P \cdot \frac{a^3}{R^3} \cdot P_0(\cos \theta) \\
 \widehat{\theta\theta} = & -\rho g z_0 \left\{ \frac{3\lambda+4\mu}{3(\lambda+2\mu)} + \frac{27\lambda^2+60\mu\lambda+68\mu^2}{6(\lambda+2\mu)(9\lambda+14\mu)} \frac{a^3}{R^3} \right. \\
 & \left. + \frac{4\mu(\lambda+\mu)}{9(\lambda+2\mu)(9\lambda+14\mu)} \frac{a^5}{R^5} \right\} P_0(\cos \theta) \\
 & + \frac{\rho g R}{\lambda+2\mu} \left\{ \frac{5\lambda+4\mu}{5} + \frac{\mu}{3} \frac{a^3}{R^3} - \frac{\mu(103\lambda-58\mu)}{15(19\lambda+26\mu)} \frac{a^5}{R^5} \right. \\
 & \left. + \frac{12\mu(\lambda+\mu)}{19\lambda+26\mu} \frac{a^7}{R^7} \right\} P_1(\cos \theta) \\
 & + \frac{4\mu \rho g z_0}{3(\lambda+2\mu)} \left\{ 1 - \frac{5\mu}{9\lambda+14\mu} \frac{a^3}{R^3} + \frac{21(\lambda+\mu)}{9\lambda+14\mu} \frac{a^5}{R^5} \right\} P_2(\cos \theta) \\
 & - \frac{4\mu \rho g R}{5(\lambda+2\mu)} \left\{ 1 - \frac{7(2\lambda+3\mu)}{19\lambda+26\mu} \frac{a^5}{R^5} + \frac{65(\lambda+\mu)}{19\lambda+26\mu} \frac{a^7}{R^7} \right\} P_3(\cos \theta) \\
 & - \frac{P}{2} \cdot \frac{a^3}{R^3} P_0(\cos \theta) \\
 \widehat{\varphi\varphi} = & -\frac{\rho g z_0}{\lambda+2\mu} \left\{ \lambda + \frac{3\lambda+2\mu}{6} \frac{a^3}{R^3} - \frac{4\mu(3\lambda-2\mu)}{3(9\lambda+14\mu)} \frac{a^5}{R^5} \right\} P_0(\cos \theta) \\
 & + \rho g R \left\{ \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} + \frac{\lambda}{3(\lambda+2\mu)} \frac{a^3}{R^3} + \frac{\mu(13\lambda-22\mu)}{9(\lambda+2\mu)(19\lambda+26\mu)} \frac{a^5}{R^5} \right. \\
 & \left. - \frac{12(\lambda+\mu)}{(\lambda+2\mu)(19\lambda+26\mu)} \frac{a^7}{R^7} \right\} P_1(\cos \theta) \\
 & - \frac{20\mu^2 \rho g z_0}{(\lambda+2\mu)(9\lambda+14\mu)} \left\{ \frac{a^3}{R^3} - \frac{\lambda+\mu}{\mu} \frac{a^5}{R^5} \right\} P_2(\cos \theta) \\
 & + \frac{28\mu^2 \rho g R}{(\lambda+2\mu)(19\lambda+26\mu)} \left\{ \frac{a^5}{R^5} - \frac{\lambda+\mu}{\mu} \frac{a^7}{R^7} \right\} P_3(\cos \theta) \\
 & - \frac{P}{2} \cdot \frac{a^3}{R^3} P_0(\cos \theta) \\
 \widehat{R\theta} = & \frac{\mu \rho g R}{15(\lambda+2\mu)} \left\{ 6 - 5 \frac{a^3}{R^3} - \frac{a^5}{R^5} \right\} \frac{d}{d\theta} P_1(\cos \theta) \\
 & - \frac{2\mu \rho g z_0}{3(\lambda+2\mu)} \left\{ 1 + \frac{5(3\lambda+2\mu)}{9\lambda+14\mu} \frac{a^3}{R^3} - \frac{24(\lambda+\mu)}{9\lambda+14\mu} \frac{a^5}{R^5} \right\} \frac{d}{d\theta} P_2(\cos \theta) \\
 & + \frac{4\mu \rho g R}{15(\lambda+2\mu)} \left\{ 1 + \frac{7(8\lambda+7\mu)}{19\lambda+26\mu} \frac{a^5}{R^5} - \frac{75(\lambda+\mu)}{19\lambda+26\mu} \frac{a^7}{R^7} \right\} \frac{d}{d\theta} P_3(\cos \theta) \\
 \widehat{R\varphi} = & \widehat{\theta\varphi} = 0
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

で表わされる。これらの応力は $R=a$ 即ち球孔の表面で最大値をもつから、 $\lambda=\mu$ とおいて

$$\left. \begin{aligned} u_{\mu} &= -\frac{\rho g z_0}{\mu} \cdot a \left\{ \frac{33}{92} + \frac{1}{6} \left(\frac{z_0}{a} + \frac{124}{45} \frac{a}{z_0} \right) \cos \theta \right. \\ &\quad \left. + \frac{15}{46} \cos 2\theta + \frac{7}{72} \frac{a}{z_0} \cos 3\theta \right\} - \frac{P}{4\mu} \cdot a \\ u_{\eta} &= \frac{\rho g z_0}{\mu} \cdot a \left\{ \frac{1}{6} \left(\frac{z_0}{a} + \frac{241}{180} \frac{a}{z_0} \right) \sin \theta + \frac{15}{46} \sin 2\theta + \frac{7}{72} \frac{a}{z_0} \sin 3\theta \right\} \\ u_{\varphi} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

$$\left. \begin{aligned} \widehat{RR} &= P \\ \widehat{\theta\theta} &= \rho g z_0 \left(-\frac{135}{138} + \frac{5}{9} \frac{a}{z_0} \cos \theta + \frac{20}{33} \cos 2\theta - \frac{7}{9} \frac{a}{z_0} \cos 3\theta \right) - \frac{P}{2} \\ \widehat{\varphi\varphi} &= \rho g z_0 \left(-\frac{15}{46} + \frac{1}{6} \frac{a}{z_0} \cos \theta + \frac{5}{23} \cos 2\theta - \frac{7}{54} \frac{a}{z_0} \cos 3\theta \right) - \frac{P}{2} \\ \widehat{R\theta} &= \widehat{\theta\varphi} = \widehat{R\varphi} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

即ち、主応力が \widehat{RR} , $\widehat{\theta\theta}$, $\widehat{\varphi\varphi}$ で、その最大剪断応力は

$$\left. \begin{aligned} R &= a, \quad \theta_m = \cos^{-1} k \\ k &= \frac{10}{161} \frac{z_0}{a} \left\{ 1 - \sqrt{1 + \frac{48,139}{5,400} \left(\frac{a}{z_0} \right)^2} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

なる円周上で最大となり、その大きさは

$$\begin{aligned} 2S &= \rho g z_0 \left[1.20 + 0.0155 \sqrt{1 + 8.91 \left(\frac{a}{z_0} \right)^2} - 0.0402 \left\{ 1 - \sqrt{1 + 8.91 \left(\frac{a}{z_0} \right)^2} \right\} \cdot \left(\frac{z_0}{a} \right)^2 \right] \\ &\quad - \frac{3}{2} P \end{aligned}$$

である。いま、マグマ溜りの中の圧力が非常に小さい場合、即ち

$$P < \rho g |z_0|$$

の時には $\rho g z_0$ に比して P を無視して、任意の a/z_0 に対する θ_m 及び S を第2表に示す。

第 2 表
Table 2.

a/z_0	1/2	1/4	1/6	1/8	1/10
θ_m	107°	100°	97°	95°	93°
$S/\rho g z_0$	1.05	0.96	0.94	0.93	0.92

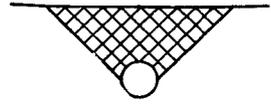
第2表より大雑把に

$$S \approx \rho g |z_0| \quad (3.9)$$

となるから、地殻の強度を前同様 3×10^9 dyne/cm² にとるならば、(3.9)の S を越える為には

$$|z_0| > 10 \text{ km}$$

即ち、マグマ溜りが空になつて落ち込む為にはマグマ溜りの深さは 10 km より深い事が必要であり、上記主応力の最大が $\widehat{\theta\theta}$ で最小が \widehat{RR} なる故、破壊面は煉瓦を壊して得られた結果と同様に radial 及び tangential 両方向と約 45° の傾きをなす面である (第 6 図)。換言すれば、マグマ溜りを 10 km の深さにもつカルデラはマグマ溜りの大きさも考慮に入れて直径 20 km に及ぶ事になる。一方、第 1 表に於いて大小さまざまなカルデラが存在している事を示すが、これを大小二群に分ける事は不可能であり、マグマ溜りの中が空になつて天井が落ち込んだと説明するのは適當ではない。



第 6 図 陥没説：斜交線部は破壊される部分

Fig. 6. Collapse hypothesis. Cross lines: Part of the supposed fractures.

IV. 爆 発 説

では、マグマ溜りの中に於ける活動が急激に活潑になつた場合はマグマ溜りの中の圧力が急激に増加するであろう。この場合は重力の場を無視しうから、座標系を III と同様にとつて、球孔の内面に圧力が働いた場合の解を求める。即ち、境界条件として

$$\left. \begin{aligned} R = a: \quad \widehat{RR} &= P \cdot P_n(\cos \theta) \\ \widehat{R\theta} &= \widehat{R\varphi} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

を与えて弾性方程式を解けば、

$$\left. \begin{aligned} u_R &= \frac{C}{2\mu} a \left[\frac{\{(n^2-1)\lambda + (n^2-2)\mu\}(n+1)}{n+2} \left(\frac{a}{R}\right)^{n+2} \right. \\ &\quad \left. - n \{(n+1)\lambda + (n+3)\mu\} \left(\frac{a}{R}\right)^n \right] P_n(\cos \theta) \\ u_\theta &= -\frac{C}{2\mu} a \left[\frac{\{(n^2-1)\lambda + (n^2-2)\mu\}(n+1)}{n+2} \left(\frac{a}{R}\right)^{n+2} \right. \\ &\quad \left. - n \{(n-2)\lambda + (n-4)\mu\} \left(\frac{a}{R}\right)^n \right] \frac{d}{d\theta} P_n(\cos \theta) \\ u_\varphi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

$$\left. \begin{aligned} \widehat{RR} &= -C \left[(n+1) \{(n^2-1)\lambda + (n^2-2)\mu\} \left(\frac{a}{R}\right)^{n+3} \right. \\ &\quad \left. - n \{(n^2+3n-1)\lambda + n(n+3)\mu\} \left(\frac{a}{R}\right)^{n+1} \right] P_n(\cos \theta) \\ \widehat{\theta\theta} &= C \left[n \{(n-2)\lambda - (n+3)\mu\} \left(\frac{a}{R}\right)^{n+1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(n^2-1)\lambda + (n^2-2)\mu}{n+2} \{(n+1)\} \left(\frac{a}{R}\right)^{n+3} \right] P_n(\cos \theta) + C \left[\{(n-2)\lambda \right. \\ &\quad \left. + (n-4)\mu\} \left(\frac{a}{R}\right)^{n+1} - \frac{(n^2-1)\lambda + (n^2-2)\mu}{n+2} \left(\frac{a}{R}\right)^{n+3} \right] \frac{d^2}{d\theta^2} P_n(\cos \theta) \\ \widehat{\varphi\varphi} &= C \left[n \{(n-2)\lambda - (n+3)\mu\} \left(\frac{a}{R}\right)^{n+1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(n^2-1)\lambda + (n^2-2)\mu}{n+2} \{(n+1)\} \left(\frac{a}{R}\right)^{n+3} \right] P_n(\cos \theta) + C \left[\{(n-2)\lambda \right. \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

$$\widehat{R}\theta = C \frac{(n^2-1)\lambda + (n^2-2)\mu}{\mu} \left\{ \left(\frac{a}{R}\right)^{n+1} - \frac{(n^2-1)\lambda + (n^2-2)\mu}{n+2} \left(\frac{a}{R}\right)^{n+3} \right\} \cot \theta \frac{d}{d\theta} P_n(\cos \theta)$$

但し、

$$C = \frac{P}{(2n^2+1)\lambda + 2(n^2+n+1)\mu}$$

が得られる。これらは $R=a$ に於いて最大値をとる故、 $R=a$ とおいて

$$\left. \begin{aligned} u_R &= -\frac{(2n^2+3n+1)\lambda + 2(2n^2+4n+1)\mu}{2(n+2)\mu} Ca P_n(\cos \theta) \\ u_\theta &= -\frac{3\lambda + 2(n+3)\mu}{2(n+2)\mu} \cdot C \cdot a \frac{d}{d\theta} P_n(\cos \theta) \\ u_\varphi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

$$\left. \begin{aligned} \widehat{R}R &= P \cdot P_n(\cos \theta) \\ \widehat{\theta}\theta &= \frac{(2n^3+n^2-5n-1)\lambda - 2(2n^2+4n+1)\mu}{n+2} C \cdot P_n(\cos \theta) \\ &\quad - \frac{3\lambda + 2(n+3)\mu}{n+2} C \frac{d^2}{d\theta^2} P_n(\cos \theta) \\ \widehat{\varphi}\varphi &= \frac{(2n^3+n^2-5n-1)\lambda - 2(2n^2+4n+1)\mu}{n+2} C \cdot P_n(\cos \theta) \\ &\quad - \frac{3\lambda + 2(n+3)\mu}{n+2} C \cot \theta \frac{d}{d\theta} P_n(\cos \theta) \\ \widehat{R}\theta &= \widehat{R}\varphi = \widehat{\theta}\varphi = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

である。従つて最大剪断応力は

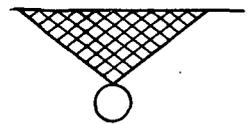
$$(R = a, \theta = 0^\circ, \varphi = 0^\circ) \quad (4.6)$$

即ち、球孔の上部で起り、その大きさは

$$S = \frac{3}{4} \frac{(n^2+n+2)\lambda + 2(n^3+6n^2+11n+6)\mu}{(n+2)\{(2n^2+1)\lambda + 2(n^2+n+1)\mu\}} \cdot P \quad (4.7)$$

である。

この様にマグマ溜りの中の圧力が急激に増大した時には、マグマ溜りの略頂上部から破壊は生じ、破壊面が地表に向つて拡がって行く(第7図)。この面を境界にしてその内側の部分が大小さまざまに壊され、爆発の終了後はこれらの破片及び juvenile な物質によつて、この空になつたマグマ溜りを埋めて行くと考えられる。更に第7図に示す如くにカルデラ形成に寄与したマグマ溜りの深さと、カルデラの半径とは略等しいと云える。



第7図 爆発説：斜交線部は破壊される部分

Fig. 7. Explosion hypothesis. Cross lines: Part of the supposed fractures.

Krakatoa 火山は 1883 年 8 月 26~27 日に亘つて大爆発を起してカルデラを作つた。この

爆発に際し、この火山を浪源とする津波が世界各地に伝わり、世界各地に設置してあつた tide-gauge に記録された⁸⁾。このうち、特に Krakatoa 火山に最も近い Batavia での記象をみると、26日11時(U.T.)から小さな擾乱はあつたが、27日05時(U.T.)に複振巾18 feet に及ぶ大津波を記録し、その後31日迄大きな擾乱はなかつた。更にこの大津波は初動を up に書いており、浪源の動きは上昇で始まつた事を示している。これらの事は他の地点で得られた記象にも全く同様に示されている。Williams が Krakatoa 型カルデラの代表としてあげた Krakatoa カルデラは、その爆発に際して生じた津波から小さな爆発が数回先行して起つていたけれども、直接的にカルデラ地形を作つたのは一回の大爆発であつたと云い得る。

V. 結 語

Williams その他によつて提証された Krakatoa 型カルデラの成因について弾性論の立場から吟味を加えた。その結果を要約すれば、

- 1) 地殻内部に構造的な異常がなく、山体の荷重のみでは地殻は壊れる事はない。
- 2) マグマ溜りが空になつた為はその天井が陥没したと云う説明は大きなカルデラについてはよいが小さなカルデラに関する説明にはなつておらず、従つて適当な説明ではない。
- 3) マグマ溜りの中で急激に活動が活潑になつた場合には頂上附近から壊れ始め、じょうご状に割れ目が伸び、その内部が大小さまざまな破片となつて爆発の終了と共にこれら破片及び juvenile な物質によつて埋められて、カルデラ地形を作る。この場合、カルデラの形成に寄与したマグマ溜りの深さはカルデラの大きさと linear な関係にある。この種のカルデラの代表である Krakatoa カルデラの形成された時に生じた津波の記録はこれらの事を明らかに示している。

終りに終始御指導を賜つた北海道大学の横山泉博士並びに同村瀬勉氏に御礼を申し上げます。

9. The Formation of the Caldera of the Krakatoa Type with Reference to Earth's Crust Elasticity

By Isao ONDA

(Department of Geophysics, Faculty of Science, Hokkaido University)

With the aid of theories of elasticity, the writer examines the hypotheses on the mechanism of the formation of the calderas of Krakatoa type of Williams which have been interpreted as formed by a collapse along a complicated network of fissures which

8) W. J. L. Wharton; On the seismic sea waves caused by the eruption of Krakatoa, Aug. 26 and 27, 1883. Report of the Krakatoa Committee, Royal Society, 1888, pp. 89-150.

originates through shattering of the shallow magma reservoir underlying the volcano by an explosive eruption of pumice.

At first, if the earth's crust does not possess any tectonic anomaly in it, does the crust break under the load of the body of the volcano expressed by Fourier-Bessel series?. It is concluded that the crust may not be broken under this load alone, since the maximum distortional stress

$$S = (\sqrt{3}/2) \rho gh \exp \{ -(3\lambda + 2\mu)/3(\lambda + \mu) \}$$

does not exceed the strength of the crust (3×10^9 dyne/cm²) obtained on the assumption that it is equal to that of granite under the confining pressure of 3,000 kg/cm².

The formation of calderas, therefore, probably is caused by some anomaly in the interior of the crust. Then, it is studied whether the roof of the shallow and empty magma reservoir may collapse according to the theory of Williams. In this case, the maximum shearing stress is represented by the expression

$$S = \rho g z_0.$$

This expression means that the roof of which the thickness is 10 km or less can not undergo a collapse, giving the strength of the crust 3×10^9 dyne/cm², though considerable obscurity attaches to the matter. Thus, at least, one can conclude that the collapse hypothesis may not explain the mechanism of the formation of small calderas so favourably as large ones, because the radius of a caldera may be nearly equal to the depth of the magma reservoir as shown in Figs. 4 and 6.

On the other hand, if the pressure in the magma reservoir increases rapidly, the maximum shearing stress takes the greatest value near the top of the reservoir. It is represented by the expression

$$S = [3(n^2 + n + 2)\lambda + 2(n^3 + 6n^2 + 11n + 6)\mu] P / [4(n + 2)\{(2n^2 + 1)\lambda + 2(n^2 + n + 1)\mu\}].$$

Accordingly, in this case, the roof near the top of the reservoir begins to be broken, and the produced fracture extends in a funnel-shape to the earth's surface as indicated in Fig. 7.

The great explosion of Krakatoa in 1883 transmitted the great tsunami represented as an upward initial wave. It is plausible that water at the origin of the tsunami moved upward, that is, the great tsunami was generated by only one great explosion. The above discussion holds good for this phenomenon, because the radius of the Krakatoa caldera is about 4 km.

It is reasonable that the formation of the calderas of Krakatoa type having a radius of several kilometers and less proceeds with an extraordinarily great explosion which plays a dominant role in the formation of the calderas, followed by filling up of the crater with ejected materials and destroyed crust, consequently the calderas take their typical shape.