



Title	9. 地震動波形の周波数分析について
Author(s)	田, 望; DEN, Nozomu
Citation	北海道大学地球物理学研究報告, 9, 87-102
Issue Date	1962-03-06
DOI	https://doi.org/10.14943/gbhu.9.87
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/13840
Type	departmental bulletin paper
File Information	9_p87-102.pdf



9. 地震動波形の周波数分析について

田 望

(北海道大学理学部地球物理学教室)

— 昭和36年8月受理 —

I. は し が き

地震動記録を周波数分析する試みは末広恭二、また石本巳四雄、木村一治らによりなされたが、殊に最近においては地震学においても地震工学においても周波数分析の方法で研究する場が多くなってきた。振動波形の spectrum を求めるには、電子計算機により数値的に求めることも多いが、analogue 計算機、或いはより単能的にしかしより便利に作られた周波数分析器¹⁾により求めることも多い。Analogue 方式による場合は振動の時々刻々の spectrum 構造を知ることができる長所があり、音響分析などでは以前からこの方法が採用されてきた。また地震工学においては、構造物が地震動を受けたときの応答を研究するのにこの方法は有用である。しかしながらかかる周波数分析器を使用して得た結果の物理的解釈をする場合には、分析器の動作原理を究明しておくことが重要である。

II. Spectrum と Fourier 級数

普通の用法に従い次式により $f(t)$ の spectrum $\Omega(\omega)$ 、或いは振幅函数 $S(\omega)$ および位相函数 $\phi(\omega)$ を定義する。

$$\Omega(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2-1)$$

$$S(\omega) = \sqrt{a^2(\omega) + b^2(\omega)} \quad (2-2)$$

$$\phi(\omega) = \tan^{-1} \frac{-b(\omega)}{a(\omega)} \quad (2-3)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} a(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt \\ b(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt \end{aligned} \right\} \quad (2-4)$$

勿論もとの函数 $f(t)$ とは

1) Takahasi, R.: A Response Computer, Preliminary Report, Proc. 3rd Japan Nat. Congr. Appl. Mech. (1953), 373.

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S(\omega) \cos \{ \omega t + \phi(\omega) \} d\omega
 \end{aligned}
 \tag{2-5}$$

の関係がある。

孤立波形或いはある時間間隔 (t_1, t_2) における波形の spectrum は Fourier 級数によって求めることが多い。すなわち

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n t}{t_2 - t_1} + b_n \sin \frac{2\pi n t}{t_2 - t_1} \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{2\pi n t}{t_2 - t_1}}
 \tag{2-6}$$

$$\left. \begin{aligned}
 a_0 &= \frac{2}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt \\
 a_n &= \frac{2}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) \cos \frac{2\pi n t}{t_2 - t_1} dt \\
 b_n &= \frac{2}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) \sin \frac{2\pi n t}{t_2 - t_1} dt \\
 c_n &= \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) e^{-i \frac{2\pi n t}{t_2 - t_1}} dt
 \end{aligned} \right\}
 \tag{2-7}$$

Fourier 級数は元来は週期的な繰返し波形についての解析方法で、line spectrum を扱うものであるが、 $f(t)$ が時間領域 (t_1, t_2) の外で 0 である孤立波形の場合は、(2-1) と (2-7) の間には

$$\Omega \left(\frac{2\pi n}{t_2 - t_1} \right) = (t_2 - t_1) c_n
 \tag{2-8}$$

の関係が存在する。この級数による解析方法については佐藤泰夫²⁾により詳しく論ぜられている。 $2\pi n/(t_2 - t_1)$ 以外の ω に対する $\Omega(\omega)$ を求めるために、 t_1 および t_2 を変更して孤立波形の両側に $f(t)=0$ の区間をとることも実際の計算には便利なことであるが、一般に時間領域 (t_1, t_2) に限られる函数の spectrum は周波数領域で $\frac{1}{t_2 - t_1}$ c.p.s. 毎の点の系列で表わされるから³⁾

$$\Omega(\omega) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{\sin \left(\frac{\omega T}{2} - \pi n \right)}{\frac{\omega T}{2} - \pi n}
 \tag{2-9}$$

ただし

$$T = t_2 - t_1$$

により他の ω に対しての spectrum の値を求め得る。

III. Short Time Spectrum の諸定義

一般に vibration analyser は周波数選択度の良い分析装置、例えば、振子、共振回路或い

2) Sato, Y.: A Note on Tsuboi-Nagata's Method, Bull. Earthq. Res. Inst. **32** (1954), 259.

3) Goldman, S.: Information Theory (1953), Prentice Hall, N. Y.

は feed back 回路などを主体として構成され、入力として解析せんとする波形の信号を繰返し加えつつ、選択周波数を次々と変え、その出力信号を読みとる方法を採用している。この場合に出力は振幅と位相を時間と共に変化するので、その出力を解釈するためには、短い時間領域における入力の spectrum 構造を考えねばならない。かくして spectrum の概念を拡張して short time spectrum (研究者によっては temporal 或いは local spectrum と呼んでいる) の概念が導入される。しかしながら short time spectrum は研究者によって種々の異った定義が与えられており、多少の混乱が見受けられる。したがってそれら諸定義による short time spectrum の性質およびそれら相互の関係を調べ、さらに本来の spectrum (2-1) との関係を考察しておくことが重要と考えられる。

§1. 時間間隔により定義される Short Time Spectrum $\Omega_T(\omega, t_0)$

河角広⁴⁾ は時間 t_0 における $f(t)$ の temporal spectrum を

$$F(\omega, t_0) = \frac{2}{T} \int_{t_0 - \frac{T}{2}}^{t_0 + \frac{T}{2}} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

の形で定義した。しかし本論文では積分領域を $\frac{T}{2}$ だけ移し、また $\Omega(\omega)$ と dimension を揃えるため係数の $\frac{2}{T}$ を落とし、次式により short time spectrum $\Omega_T(\omega, t_0)$ を定義する。

$$\left. \begin{aligned} \Omega_T(\omega, t_0) &= \int_{t_0 - T}^{t_0} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \\ S_T(\omega, t_0) &= \sqrt{a_T^2(\omega, t_0) + b_T^2(\omega, t_0)} \\ \phi_T(\omega, t_0) &= \tan^{-1} \frac{-b_T(\omega, t_0)}{a_T(\omega, t_0)} \end{aligned} \right\} \quad (3-1)$$

ただし

$$a_T(\omega, t_0) = \int_{t_0 - T}^{t_0} f(\tau) \cos \omega\tau d\tau$$

$$b_T(\omega, t_0) = \int_{t_0 - T}^{t_0} f(\tau) \sin \omega\tau d\tau$$

この逆変換は勿論

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_T(\omega, t_0) e^{i\omega t} d\omega &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_T(\omega, t_0) \cos \{\omega t + \phi_T(\omega, t_0)\} d\omega \\ &= \begin{cases} 0, & t < t_0 - T \quad \text{および} \quad t > t_0 \\ \frac{1}{2} f(t), & t = t_0 - T \quad \text{および} \quad t = t_0 \\ f(t), & t_0 - T < t < t_0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3-2)$$

4) Kawasumi, H.: Note on the Theory of Vibration Analyser, Bull. Earthq. Res. Inst. **34** (1956), 1.

である。またこれと $\Omega(\omega)$ の関係は

$$\Omega(\omega) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_T(\omega, t_0) dt \tag{3-3}$$

$$\Omega(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Omega_T(\omega, t_0 + mT) \tag{3-4}$$

である。

この spectrum $\Omega_T(\omega, t_0)$ は II に述べた孤立波形の spectrum と本質的に同じものである。したがって T を指定すれば、(2-9) 式にて示される如く、 $\Omega_T(\omega, t_0)$ は ω 領域で $\frac{2\pi}{T}$ 毎の点で規定される。すなわち、分解能 $\Delta\omega$ は $\frac{2\pi}{T}$ であり

$$\Delta\omega \cdot T = \text{const.}$$

の不確定性が存在する。

§2. 周波数分析の特性

L, C, R の共振回路或いは振子の動作は二階線型微分方程式で表現されるが、周波数分析器に使用される feed back 回路なども実効的には同じ式で表現できる場合が多い。そこで共振回路として第1図の並列共振回路を考える。定電流電源より入力信号電流 $f(t)$ を加え、出力電圧、或いはこれに比例する R に流れる電流 $g(t)$ を測定すると、次の関係がある。

$$\frac{d^2g}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dg}{dt} + \omega_0^2 g = \frac{\omega_0}{Q} \frac{df}{dt} \tag{3-5}$$

ただし

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

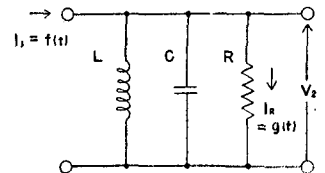
固有周波数

$$Q = \omega_0 CR = \frac{R}{\omega_0 L}$$

quality factor $Q > \frac{1}{2}$ とする。

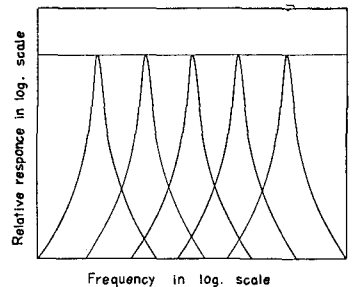
この回路で Q を一定として ω_0 を parameter として変化させた場合の振幅周波数特性の群は第2図の如くである。各 peak の値は同じ、即ち $\omega = \omega_0$ のとき入出力の振幅比は1であり、また $\log \omega, \log \frac{g}{f}$ を座標軸としてとった図では同調曲線は左右対称で、かつ ω_0 の値の如何に拘らず、すべての曲線は同じ形をしている。

このような特性は周波数分析器として多くの場合好都合であるが、これと異った特性をもつ装置もある。河角⁴⁾



第1図 共振回路

Fig. 1. Resonance circuit.



第2図 周波数分析器の特性

Fig. 2. Characteristics of a frequency analyser.

が第1型解析器と定義したものは

$$\frac{d^2g}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dg}{dt} + \omega_0^2 g = Vf$$

で動作が表現されるから、 Q を一定として ω_0 を変化させた場合、各同調曲線の peak, 即ち $\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$ における入力と出力の振幅比は $\frac{QV}{\omega_0^2 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$ で ω_0^{-2} に比例する。また第2

型 (S.M.A.C. response analyser) として扱っているものはこの式で ω_0 を変化させるかわりに time scale を変化させたもので、その特性は第2図と本質的に同じである。この例の如き利得の相違はその装置の感度校正をすれば解決される問題であり、一つの装置で解析された結果を他の装置で解析されたであろう結果に換算することは容易である。

しかしながら分析器の種類によっては Q が ω_0 により変化するものがある。特に理論的に filter の動作を考察するときは、 Q が ω_0 に比例する場合はしばしばある。また連続的に ω_0 を変えられる装置では、 Q が ω_0 により微妙に変化するものも少なくない。 Q が異なる装置で解析された結果は以下の議論に見られる如く、相互に換算することは容易でない。

(2-1) 式で定義される spectrum $\Omega(\omega)$ は変数として $\log \omega$ ではなく、 ω を持っているから、本質的には $Q\omega$ の性質を持っていると云える。したがって周波数分析器を使って求めた解析結果から $\Omega(\omega)$ を推定するときには十分な注意が払われねばならない。

§ 3. Q 値により定義される Short Time Spectrum $\Omega_Q(\omega, t_0)$

一般に filter 回路に入力 $f(t)$ を加えたとき、 $t=t_0$ における出力 $g(t_0)$ は、その回路の impulsive response を $B(t)$ とすれば、

$$\begin{aligned} g(t_0) &= \int_0^\infty f(t_0 - \tau) B(\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{t_0} f(\tau) B(t_0 - \tau) d\tau \end{aligned} \quad (3-6)$$

で表わされる。(3-5) 式で表現される filter の impulsive response は

$$\left. \begin{aligned} B(t) &= \frac{\omega_0}{Q \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} e^{-\frac{\omega_0}{2Q} t} \cos(\gamma t + \delta) \\ \text{ただし } \gamma &= \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \\ \delta &= \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \end{aligned} \right\} \quad (3-7)$$

であるから、一般の入力 $f(t)$ に対する出力を $g_Q(\omega_0, t_0)$ とすれば、

$$g_Q(\omega_0, t_0) = \frac{\omega_0}{Q \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \int_{-\infty}^{t_0} f(\tau) e^{-\frac{\omega_0(t_0-\tau)}{2Q}} \cos \{r(t_0-\tau) + \delta\} d\tau \quad (3-8)$$

である。

そこでこのような周波数分析器に便利なような short time spectrum $\Omega_Q(\omega, t_0)$, 或いは振幅および位相関数 $S_Q(\omega, t_0)$, $\phi_Q(\omega, t_0)$ を次の如く定義する。

$$\left. \begin{aligned} \Omega_Q(\omega, t_0) &= \int_{-\infty}^{t_0} f(\tau) e^{-\frac{|\omega|(t_0-\tau)}{\sqrt{4Q^2-1}}} e^{-i\omega\tau} d\tau \\ S_Q(\omega, t_0) &= \sqrt{a_Q^2(\omega, t_0) + b_Q^2(\omega, t_0)} \\ \phi_Q(\omega, t_0) &= \tan^{-1} \frac{-b_Q(\omega, t_0)}{a_Q(\omega, t_0)} \end{aligned} \right\} \quad (3-9)$$

ただし

$$a_Q(\omega, t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} f(\tau) e^{-\frac{|\omega|(t_0-\tau)}{\sqrt{4Q^2-1}}} \cos \omega\tau d\tau$$

$$b_Q(\omega, t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} f(\tau) e^{-\frac{|\omega|(t_0-\tau)}{\sqrt{4Q^2-1}}} \sin \omega\tau d\tau$$

$Q \gg 1$ のときは, filter 出力 (3-8) 式は振幅と位相を徐々にかえる正弦波と考えてよいから

$$\begin{aligned} g_Q(\omega_0, t_0) &= \frac{\gamma}{Q \left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)} \int_{-\infty}^{t_0} f(\tau) e^{-\frac{\gamma(t_0-\tau)}{\sqrt{4Q^2-1}}} \cos \{r(t_0-\tau) + \delta\} d\tau \\ &= G_Q(\omega_0, t_0) \cos \{rt_0 + a(\omega_0, t_0)\} \end{aligned} \quad (3-10)$$

と書ける。一方 (3-9) より

$$S_Q(\omega, t_0) \cos \{\omega t_0 + \phi_Q(\omega, t_0)\} = \int_{-\infty}^{t_0} f(\tau) e^{-\frac{|\omega|(t_0-\tau)}{\sqrt{4Q^2-1}}} \cos \omega(t_0-\tau) d\tau \quad (3-11)$$

であるから (3-10) と (3-11) 式を比較して

$$\left. \begin{aligned} S_Q(\omega, t_0) &= \frac{Q \left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)}{\omega} G_0 \left(\frac{\omega}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}, t_0 \right) \\ \phi_Q(\omega, t_0) &= a \left(\frac{\omega}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}, t_0 \right) - \delta \end{aligned} \right\} \quad (3-12)$$

である。 $Q \gg 1$ のときは, 近似的に

$$\left. \begin{aligned} S_Q(\omega, t_0) &= \frac{Q}{\omega} G_Q(\omega, t_0) \\ \phi_Q(\omega, t_0) &= a(\omega, t_0) \end{aligned} \right\} \quad (3-13)$$

となる。すなわち Q が一定で、同調曲線の peak における利得が一定である周波数分析器から short time spectrum を知り得るが、この式に見られる如く、振幅には $\frac{Q}{\omega}$ なる量を乗じなければならぬことに注意すべきである。

$\Omega_Q(\omega, t_0)$ と $\Omega(\omega)$ との間には

$$\Omega(\omega) = \frac{|\omega|}{2Q \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_Q(\omega, t_0) dt_0 \quad (3-14)$$

の関係がある。それ故、 $\Omega_Q(\omega, t_0)$ は $\Omega(\omega)$ と同等の情報を保持していると言えるが、実測された $S_Q(\omega, t_0)$ 、 $\phi_Q(\omega, t_0)$ から $S(\omega)$ 、 $\phi(\omega)$ を推定することは簡単ではない。

§4. 重荷函数により定義される Short Time Spectrum $\Omega_W(\omega, t_0)$

連続した波形 $f(t)$ の $t=t_0$ 附近の部分解析するために、その部分を強調する重荷函数 $W(t_0-t)$ を乗じて、 $W(t_0-t) \cdot f(t)$ を解析することもしばしばある。III §1 に定義した $\Omega_T(\omega, t_0)$ は重荷函数として

$$W(t_0-t) = u(t-t_0+T)u(t_0-t)$$

ただし $u(t)$ は unit step function である。

を持つものと考えてもよい。また笠原慶⁵⁾ は重荷函数として

$$W(t_0-t) = \frac{c}{2\sqrt{\pi}} e^{-c^2(t-t_0)^2/4}$$

を採用することを提案した。しかし伝達函数として $Y(\omega) = e^{-(\omega_0 - \omega)^2/c^2}$ なる特性を持つ filter は physically realizable filter でないから、実際の装置には適用できないが、数値的に解析する場合には便利な方法である。

いま重荷函数として

$$W(t_0-t) = u(t_0-t) e^{-\frac{t_0-t}{T_W}} \quad (3-15)$$

を採用し、 $W(t_0-t) \cdot f(t)$ の Fourier 変換を short time spectrum $\Omega_W(\omega, t_0)$ と定義する。すなわち

$$\left. \begin{aligned} \Omega_W(\omega, t_0) &= \int_{-\infty}^{t_0} f(\tau) e^{-\frac{t_0-\tau}{T_W} - i\omega\tau} d\tau \\ S_W(\omega, t_0) &= \sqrt{a_W^2(\omega, t_0) + b_W^2(\omega, t_0)} \\ \phi_W(\omega, t_0) &= \tan^{-1} \frac{-b_W(\omega, t_0)}{a_W(\omega, t_0)} \end{aligned} \right\} \quad (3-16)$$

ただし

5) Kasahara, K.: The Nature of Seismic Origins as Inferred from Seismological and Geodetic Observations (1), Bull. Earthq. Res. Inst. **35** (1957), 473.

$$a_W(\omega, t_0) = \int_{-\infty}^t f(\tau) e^{-\frac{t_0-\tau}{T_W}} \cos \omega \tau d\tau$$

$$b_W(\omega, t_0) = \int_{-\infty}^t f(\tau) e^{-\frac{t_0-\tau}{T_W}} \sin \omega \tau d\tau$$

もとの函数とは

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega_W(\omega, t_0) e^{-i\omega t} dt \\ &= \begin{cases} f(\tau) e^{-\frac{t_0-t}{T_W}}, & t < t_0 \\ \frac{1}{2} f(\tau), & t = t_0 \\ 0, & t > t_0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3-17)$$

の関係があり、また $\Omega(\omega)$ とは

$$\Omega(\omega) = \frac{1}{T_W} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_W(\omega, t_0) dt_0 \quad (3-18)$$

の関係がある。

III §3 に述べたと同様にして

$$\frac{d^2 g_W(\omega_0, t)}{dt^2} + \frac{2}{T_W} \frac{dg_W(\omega_0, t)}{dt} + \omega_0^2 g_W(\omega_0, t) = \frac{2}{T_W} \frac{df}{dt} \quad (3-19)$$

で表現される filter の出力から $S_W(\omega, t_0)$, $\varphi_W(\omega, t_0)$ を求め得る。すなわち

$$g_W(\omega_0, t_0) = G_W(\omega_0, t_0) \cos \{\gamma t_0 + a(\omega_0, t_0)\}$$

とおけば、(3-13) に対応して、 $\omega_0 T_W \gg 1$ なるとき近似的に

$$\left. \begin{aligned} S_W(\omega, t_0) &= \frac{T_W}{2} G_W(\omega, t_0) \\ \varphi_W(\omega, t_0) &= a_W(\omega, t_0) \end{aligned} \right\} \quad (3-20)$$

となる。(3-20) 式で表現される filter は

$$Q = \frac{\omega_0 T_W}{2} \quad (3-21)$$

であり、かつ同調曲線の peak における入出力振幅比が 1 である。III §3 に述べたものと異り Q が ω_0 に比例するので、周波数帯域の上限と下限の比が数 10、或いはそれ以上に及ぶ広帯域にわたって解析しようとするときは、周波数分析器の設計は容易でない。

友田好文・安芸敬⁶⁾が変磁界型微動分解器の研究に関連して定義した short time spectrum

6) Tomoda, Y. and K. Aki: Frequency Analysis of Local Tremors of the Ground by means of a Magnetic Microseismic Spectrometer, Zisin 5 (1952), 85.

$$A(\nu, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V(t') A(t-t') e^{-i\nu t'} dt'$$

は常数係数を除き $\Omega_W(\omega, t_0)$ と同じものである。

また R. M. Fano⁷⁾ が short-time autocorrelation function の理論に関連して定義した power spectrum $G_t(\omega)$ は本論文の short time spectrum で表わせば

$$G_t(\omega) = \frac{2}{T_W} |\Omega_W(\omega, t)|^2$$

である。彼はこの power spectrum と short time autocorrelation function

$$\phi_t(\tau) = \frac{2}{T} \int_{-\infty}^t f(x) f(x-\tau) e^{-\frac{2(x-x')}{T}} dx$$

との間に拡張された Wiener の定理

$$\phi_t(\tau) = \frac{e^{\frac{j\tau}{T_W}}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_t(\omega) \cos \omega \tau d\omega$$

$$G_t(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{j\tau}{T_W}} \phi_t(\tau) \cos \omega \tau d\tau$$

が成立することを証明した。 $\Omega_W(\omega, t_0)$ がかかる理論的考察に有利な性質を持っていることは、 $\Omega_W(\omega, t_0)$ が重荷函数によって定義されること、すなわち filter が(3-21)式の性質を持っていることに由来する。

IV. 共振回路の Building-up Characteristics

共振回路を定常状態に対する応答、すなわち周波数特性の面から考察することも重要であるが、周波数分析器として用いるときは、その立上りの過渡特性の面から考察することも重要である。

§1. 重荷函数の時定数

III §3 および 4 に述べたように、short time spectrum $\Omega_Q(\omega, t_0)$ は $W_Q(t_0-t) \cdot f(t)$ の Fourier 変換と見てよい。ただし

$$W_Q(t_0-t) = u(t_0-t) \exp \left\{ -\frac{\omega}{\sqrt{4Q^2-1}} (t_0-t) \right\} \quad (4-1)$$

である。これは第1近似としては

$$W_Q(t_0-t) \approx \begin{cases} 0, & t < (t_0 - T_Q) \\ 1 - \frac{t_0-t}{T_Q}, & (t_0 - T_Q) \leq t \leq t_0 \\ 0, & t > t_0 \end{cases} \quad (4-2)$$

7) Fano, R. M.: Short-Time Autocorrelation Functions and Power Spectra, J. Acous. Soc. Am. **22** (1950), 546.

として扱ってよい。ただし

$$T_Q = \frac{2Q}{\omega_0} \quad (4-3)$$

である。時間 T_Q のうちに含まれる角周波数 ω_0 の正弦波の波数は、

$$N_Q = \frac{Q}{\pi} \quad (4-4)$$

である。すなわち (3-8) 式で表わされる共振回路出力 $g_Q(\omega_0, t_0)$ は波数 N_Q である区間の情報を多く持っていると言える。

共振回路の周波数についての通過帯域幅はいわゆる半値幅

$$B = \frac{f_0}{Q} = \frac{\omega_0}{2\pi Q} \quad (4-5)$$

にて表わされる。したがって (4-3) と (4-5) 式より

$$T_Q \cdot B = \text{const.}$$

となり、これが不確定性を表わす。

§ 2. Sinusoidal Wave Train の入力に対する応答

(3-5) 式で表わされる共振回路に入力として

$$f(t) = \begin{cases} \sin \omega_1 t, & 0 \leq t < t_2 \\ 0, & t < 0 \text{ および } t \geq t_2 \end{cases} \quad (4-6)$$

なる sinusoidal wave train が加えられたときの出力は

$$g_Q(\omega_0, t_0) = \frac{v}{\sqrt{Q^2(v^2-1)^2+v^2}} \left\{ \sin(\omega_1 t_0 - a) - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}} e^{-\frac{\omega_0 t_0}{2Q}} \sin(\gamma t_0 - \beta) \right\}, \quad 0 \leq t < t_2 \quad (4-7)$$

$$\begin{aligned} g_Q(\omega_0, t_0) = & \frac{1}{Q \sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}} e^{-\frac{\omega_0(t_0-t_2)}{2Q}} \sin \omega_1 t_2 \sin \gamma(t_0-t_2) \\ & + \frac{v}{\sqrt{Q^2(v^2-1)^2+v^2}} e^{-\frac{\omega_0(t_0-t_2)}{2Q}} \left[\left\{ \sin(\omega_1 t_2 - a) - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}} e^{-\frac{\omega_0 t_2}{2Q}} \sin(\gamma t_2 - \beta) \right\} \right. \\ & \cdot \left\{ \cos \gamma(t_0-t_2) - \frac{1}{2Q \sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}} \sin \gamma(t_0-t_2) \right\} + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}} \sin \gamma(t_0-t_2) \\ & \left. \cdot \left\{ v \cos(\omega_1 t_2 - a) - e^{-\frac{\omega_0 t_2}{2Q}} \cos(\gamma t_2 - \beta) + \frac{1}{2Q \sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}} e^{-\frac{\omega_0 t_2}{2Q}} \sin(\gamma t_2 - \beta) \right\} \right], \quad t \geq t_2 \quad (4-8) \end{aligned}$$

である。ただし

$$v = \frac{\omega_1}{\omega_0}$$

$$\tan \alpha = Q \cdot \frac{v^2 - 1}{v}$$

$$\tan \beta = \sqrt{4Q^2 - 1} \cdot \frac{v^2 - 1}{v_2 + 1}$$

$Q \gg 1$ で且つ $t_2 \ll \frac{2Q}{\omega_1} = T_Q$ の場合は (4-7), (4-8) 式は近似的に次の如く書ける。

$$g_Q(\omega_0, t_0) = \frac{2v}{\sqrt{Q^2(v^2-1)^2+v^2}} \sin \left\{ \frac{(\omega_1 - \gamma)t_0 - (a - \beta)}{2} \right\} \cos \left\{ \frac{(\omega_1 - \gamma)t_0 - (a + \beta)}{2} \right\} \quad 0 \leq t < t_1 \quad (4-9)$$

$$g_Q(\omega_0, t_0) = \frac{2v}{\sqrt{Q^2(v^2-1)^2+v^2}} \sin \left\{ \frac{(\omega_1 - \gamma)t_2 - (a - \beta)}{2} \right\} \cos \left\{ \gamma t_0 + \frac{(\omega_1 - \gamma)t_2 - (a + \beta)}{2} \right\} \\ + \left\{ \frac{1}{Q} \sin \omega_1 t_2 + \frac{v(v-1)}{\sqrt{Q^2(v^2-1)^2+v^2}} \cos(\omega_1 t_2 - a) \right\} \sin \gamma(t_0 - t_2), \quad t \geq t_2 \quad (4-10)$$

また $Q \gg 1$ で, $\omega_1 = \omega_0$ の場合は (4-7), (4-8) 式は

$$g_Q(\omega_0, t_0) = (1 - e^{-\frac{\omega_0 t_0}{2Q}}) \sin \omega_0 t, \quad 0 \leq t < t_2 \quad (4-11)$$

$$g_Q(\omega_0, t_0) = (1 - e^{-\frac{\omega_0 t_2}{2Q}}) e^{-\frac{\omega_0(t_0 - t_2)}{2Q}} \sin \omega_0 t_0 \\ + \frac{1}{Q} \sin \omega_0 t_2 e^{-\frac{\omega_0(t_0 - t_2)}{2Q}} \sin \omega_0(t_0 - t_2), \quad t \geq t_2 \quad (4-12)$$

と近似され, さらに $t_0 \ll T_Q$ の場合には, これは

$$g_Q(\omega_0, t_0) = \frac{\omega_0}{2Q} t_0 \sin \omega_0 t_0, \quad 0 \leq t < t_2 \quad (4-13)$$

$$g_Q(\omega_0, t_0) = \frac{\omega_0}{2Q} t_2 \sin \omega_0 t_0 + \frac{1}{Q} \sin \omega_0 t_2 \sin \omega_0(t_0 - t_2), \quad t \geq t_2 \quad (4-14)$$

と近似される。

一方 $f(t)$ の spectrum は

$$\Omega(\pm \omega_1) = \pm \frac{t_2}{2i} + \frac{1 - e^{\mp i 2\omega_1 t_2}}{4\omega_1} \quad (4-15)$$

$$\Omega(\omega) = \Omega_1(\omega) + \Omega_2(\omega), \quad |\omega| \neq \omega \quad (4-16)$$

ただし

$$\Omega_1(\omega) = \frac{1 - e^{i(\omega_1 - \omega)t_2}}{2(\omega_1 - \omega)}$$

$$\Omega_2(\omega) = \frac{1 - e^{-i(\omega_1 + \omega)t_2}}{2(\omega_1 + \omega)}$$

である。 $\Omega(\pm\omega_1)$ は、これを複素平面上に図示すると、 t_2 の増加するとともに、trochoid 図形をえがいて増加してゆく。しかし $|\omega| \neq \omega_1$ なる場合は、 t_2 の増加するとともに、 $\Omega(\omega)$ は epitrochoid または hypotrochoid 図形をえがき、或る一定値より大きくなることはない。また (2-2) 式の振幅函数は

$$S(\omega_1) = \frac{t_2}{2} \sqrt{1 - S_a(\omega_1 t_2) \cos \omega_1 t_2 + S_a^2(\omega_1 t_2)} \quad (4-17)$$

$$S(\omega) = \frac{t_2}{2} \sqrt{S_a^2(\theta_1) + S_a^2(\theta_2) - 2S_a(\theta_1)S_a(\theta_2) \cos \omega_1 t_2}, \quad \omega \neq \omega_1 \quad (4-18)$$

ただし

$$\theta_1 = \frac{\omega_1 + \omega}{2} t_2, \quad \theta_2 = \frac{\omega_1 - \omega}{2} t_2$$

$$S_a(\theta) = \frac{\sin \theta}{\theta}$$

である。 $\omega_1 t_2 \gg 1$ なるときは (4-17) 式は近似的に

$$S(\omega_1) = \frac{t_2}{2} \quad (4-19)$$

となり、また $\theta_1 \gg 1$ なるときは (4-18) 式は近似的に

$$S(\omega) = \left| \frac{1}{\omega_1 - \omega} \sin \frac{\omega_1 - \omega}{2} t_2 \right|, \quad \omega \neq \omega_1 \quad (4-20)$$

となる。

(3-13) 式を考慮し、(4-13) 或いは (4-14) 式と (4-19) 式を比較し、また (4-10) 式と (4-20) 式を比較することにより、 $Q \gg 1$ であつ $t_2 \ll T_Q$ なる場合には、 $\omega = \omega_1$ およびその近傍において $S_Q(\omega, t_2)$ と $S(\omega)$ が近似的に等しいことが知れる。すなわち共振回路の過渡特性が周波数分析に重要な役割を果たしていると云える。

§ 3. Spectrum の形と Filter の特性

前述の sinusoidal wave train の例や重荷函数の性質によって知られる如く、共振回路は T_Q より短い時間領域に対しては spectrum を求める積分をする能力を持っている。したがって $f(t)$ が時間領域 (t_1, t_2) に限られる一般的な孤立波形である場合にも

$$T_Q \gg D \quad (4-21)$$

ただし

$$D = t_2 - t_1 \quad (4-22)$$

ならば、

$$\Omega_Q(\omega, t_2) \approx \Omega(\omega) \quad (4-23)$$

となる。すなわち $t_0=t_2$ における共振回路の出力から、ただちに $S(\omega)$ および $\varphi(\omega)$ を求めることができるが、これは共振回路を過渡特性の面から考慮した場合の重要な結果と云えよう。 $f(t)$ の振動継続時間が T_Q より長い場合には (4-23) 式の関係は一般には成立しない。 $\Omega_Q(\omega, t_0)$ と $\Omega(\omega)$ には (3-14) 式の関係が存在するが実際に $\Omega_Q(\omega, t_0)$ から $\Omega(\omega)$ を求めるのは簡単ではない。しかし $\Omega_Q(\omega, t_0)$ の持つ一般的性質を考察しておくのも振動解析にあたって役立つことが多いであろう。

$f(t)$ が有限の時間領域 $t_1 < t < t_2$ に厳密に限定され、同時に $\Omega(\omega)$ が有限の周波数領域 $\omega_1 < |\omega| < \omega_2$ に厳密に限定されることは不可能である。しかし $\int |f(t)|^2 dt$ の大部分が $t_1 < t < t_2$ に集中し、同時に $\int |\Omega(\omega)|^2 d\omega$ の大部分が $\omega_1 < |\omega| < \omega_2$ に集中することは許される。いまこのような場合につき考える $f(t)$ に関連して

$$f_{(1)}(t) = \begin{cases} f(t), & t_1 < t < t_2 \\ 0, & t \leq t_1, \quad t \geq t_2 \end{cases}$$

であるような函数 $f_{(1)}(t)$ をとると、その spectrum は sampling 定理⁹⁾ により

$$\Omega_{(1)}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Omega_{(1)} \left(\frac{2\pi n}{D} \right) S_a \left(\frac{\omega D}{2} - \pi n \right) \quad (4-24)$$

と書ける。一般に

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\Omega(\omega)|^2 d\omega$$

であるから、 $\Omega(\omega)$ は (4-24) 式で添字 (1) を落とした式で近似される。

一方 $\Omega(\omega)$ に関連して

$$\Omega_{(2)}(\omega) = \begin{cases} \Omega(\omega), & \omega_1 < |\omega| < \omega_2 \\ 0, & |\omega| \leq \omega_1, \quad |\omega| \geq \omega_2 \end{cases}$$

であるような spectrum $\Omega_{(2)}(\omega)$ をもつ函数 $f_{(2)}(t)$ をとると

$$f_{(2)}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sqrt{F_{(2)m}^2 + F_{(2)m}^{*2}} \cdot S_a \left\{ \left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \right) \left(t - \frac{2\pi m}{\omega_2 - \omega_1} \right) \right\} \\ \cdot \cos \left\{ \left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} \right) \left(t - \frac{2\pi m}{\omega_2 - \omega_1} \right) - \phi_m \right\} \quad (4-25)$$

と書ける。ただし

$$F_{(2)m} = f_{(2)} \left(\frac{2\pi m}{\omega_2 - \omega_1} \right)$$

$$F_{(2)m}^* = f_{(2)}^* \left(\frac{2\pi m}{\omega_2 - \omega_1} \right)$$

$$\phi_m = \tan^{-1} \frac{F_{(2)m}^*}{F_{(2)m}}$$

$f_{(2)m}^*(t)$ は $f(t)$ の Hilbert transform である。

$\Omega(\omega)$ は $\omega_1 < |\omega| < \omega_2$ に energy が集中しているから、 $f(t)$ は (4-25) 式で添字 (2) を落とした式で近似される。

ところで $f(t)$ 、 $\Omega(\omega)$ の仮定により、(4-24)、(4-25) で添字を落とした式では有限項をとれば充分近似される。すなわち

$$\Omega(\omega) \approx \sum_{\substack{|n| \leq n_2 \\ |n| \geq n_1}} \Omega\left(\frac{2\pi n}{D}\right) S_n\left(\frac{\omega D}{2} - \pi n\right) \quad (4-26)$$

ただし

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{\omega_1 D}{2\pi}, \quad n_2 = \frac{\omega_2 D}{2\pi} \\ f(t) &\approx \sum_{\substack{m \leq m_2 \\ m \geq m_1}} \sqrt{F_m^2 + F_m'^2} S_n\left\{\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right)\left(t - \frac{2\pi m}{\omega_2 - \omega_1}\right)\right\} \\ &\quad \cdot \cos\left\{\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}\right)\left(t - \frac{2\pi m}{\omega_2 - \omega_1}\right) - \phi_m\right\} \end{aligned} \quad (4-27)$$

ここで (4-26) 式と sampling function の性質を考えると、 $|\Omega(\omega)|$ すなわち $S(\omega)$ はいくつかの peak を持つかも知れぬが、いまその一つの peak の幅を $\Delta\omega_s$ とすれば、これは D により決定される幅より小になることはないであろう。すなわち

$$\Delta\omega_s > \frac{2\pi}{D} \quad (4-28)$$

であることが結論できる。

一方選択度が Q である filter の通過角周波数幅を $\Delta\omega_Q$ と書くと、IV §1 に述べたように

$$\begin{aligned} \Delta\omega_Q &= 2\pi B = \frac{\omega_0}{Q} \\ T_Q \cdot \Delta\omega_Q &= 2 \end{aligned} \quad (4-29)$$

なる不確定性がある。

(4-23) 式が成立するためには (4-21)、(4-28) および (4-29) 式より

$$\Delta\omega_Q \ll \frac{1}{\pi} \Delta\omega_s \quad (4-30)$$

が必要である。

換言すれば short time spectrum から spectrum を直ちに求めるためには周波数分析器の選択度は spectrum の peak の幅より少なくとも数倍鋭いことが必要である。このことは、いま同調角周波数が ω_0 である filter の伝達特性を $Y_Q(\omega, \omega_0)$ としたとき、その出力 $g_Q(\omega, t_0)$ の spectrum が $Y_Q(\omega, \omega_0)\Omega(\omega)$ で表わされることから考えられることである。 $T_Q \gg D$ の場合は $\Omega_Q(\omega, t_2)$ はもはや殆んど Q に依存しなくなる。したがって (3-5) 式の filter を用いるときは、(3-13) 式により、その出力振幅 $G_Q(\omega, t_2)$ は Q に逆比例するから、前置増幅器などの利得を Q に比例して増加しておく必要がある。

逆に選択度が spectrum の peak の幅より悪くなった場合は、(4-23) の関係は成立しない。さらに $\Delta\omega_Q$ が $\omega_2 - \omega_1$ 以上になれば、同調時の出力波形は入力波形に似てきて、 $S_Q(\omega, t_0)$ は Q に比例する傾向を持つてくる。 $\Delta\omega_Q$ が $\Delta\omega_S$ より大なる場合でも、周波数分析器は尚実用上大きな意義を持つ場合が多い。例えば V で述べるように $S_Q(\omega, t_0)$ は構造物の振動応答を表わし、またモーターの振動の如く line spectrum の合成に近いものでは、 $\Delta\omega_Q$ が相隣る peak の間隔より小であれば、同調時の出力振幅 $G_Q(\omega, t_0)$ は直ちに spectrum density を与える。

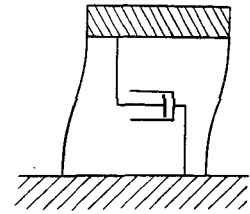
V. 地震工学において用いられる地震動の Spectrum について

M. A. Biot⁸⁾ や G. W. Housner 等⁹⁾ 或いは他の多くの研究者により、地震動の spectrum が調べられ、これは耐震構造の動力学的研究に寄与してきた。地震工学的見地から spectrum は次の如く定義されている¹⁰⁾ すなわち地動の変位を $x(t)$ としたとき、

$$S_V(\omega) = \left| \int_0^t \frac{d^2 x(\tau)}{d\tau^2} e^{-\omega h(t-\tau)} \sin \omega(t-\tau) d\tau \right|_{\max} \quad (5-1)$$

を maximum relative velocity response spectrum と呼ぶ。或いは単にこれを velocity spectrum と称し、 $\frac{1}{\omega} S_V(\omega)$ 、 $\omega S_V(\omega)$ をそれぞれ displacement および acceleration spectrum と称する。

いま第3図の如く建物を一質点系と考えれば、この建物が地震動によって受ける最大相対速度は $S_V(\omega_0)$ (ただし ω_0 はその建物の固有角周波数) である。したがって建物の stress, strainなどを求める地震工学上の見地からは S_V は極めて便利な量である。このような意味から S_V を velocity spectrum と称するのは妥当なことであるがこの量を他の問題につき用いるときは、その物理的解釈に注意を払わねばならない。



第3図 1階建建物の振動
Fig. 3. Vibration of a single story building.

(3-11)式と(5-1)式から

$$S_V(\omega) = |S_{QA}(\omega, t_0) \sin \{ \omega t_0 + \phi_{QA}(\omega, t_0) \}|_{\max} \quad (5-2)$$

と書ける。ただし $S_{QA}(\omega, t_0)$ 、 $\phi_{QA}(\omega, t_0)$ は加速度の振幅および位相関数で(3-9)式において $f(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$ とおいたものである。したがって

$$S_V(\omega) = S_{QA}(\omega, t_0)_{\max} \quad (5-3)$$

として差支えない。

-
- 8) Biot, M. A.: A Mechanical Analyzer for the Prediction of Earthquake Stress, Bull. Seism. Soc. Am. **31** (1941), 151.
 9) Housner, G. W., R. R. Martel and J. L. Alford: Spectrum Analysis of Strong-motion Earthquake, Bull. Seism. Soc. Am. **43** (1953), 97.
 10) Hudson, D. E.: Response Spectrum Techniques in Engineering Seismology, Proc. 1st World Conf. Earthq. Eng. (1956), 4-1.

いま (2-2) の定義による地震物の加速度, 速度, 変位の振幅 spectrum をそれぞれ $S_{\text{acc}}(\omega)$, $S_{\text{vel}}(\omega)$ および $S_{\text{displ}}(\omega)$ と書くことにする。しかるときは IV における考察から, T_Q が地震動継続時間 D より長く, その short time spectra $S_Q(\omega, t_0)$ の最大値が振動の終り近くに現われる場合には

$$\left. \begin{aligned} S_{\text{acc}}(\omega) &= S_V(\omega) \\ S_{\text{vel}}(\omega) &= \frac{1}{\omega} S_V(\omega) \\ S_{\text{displ}}(\omega) &= \frac{1}{\omega^2} S_V(\omega) \end{aligned} \right\} \quad (5-4)$$

と考えてよい。しかしながら一般に地震動の継続時間はそれ程短くないから, (5-4) 式の関係が成立つためには Q が極めて高い必要がある。 S_V を求めた図に $h=0$ とした曲線が示されていることが多いが, これについては (5-4) 式の関係が適用されるものと考えてよいであろう。

地震動の spectrum を地震の magnitude や energy と関連させて研究する場合, (5-4) 式の関係に注意を払い, その物理的解釈を誤らぬようにすることが肝要である。

9. A Note on the Frequency Analysis of the Earthquake Motions

By Nozomu DEN

(Department of Geophysics, Faculty of Science, Hokkaido University)

In recent years the method of frequency analysis of vibrations has been widely used in the fields of seismology and earthquake engineering. But many definitions of short-time spectra have been given by several authors. The writer divided them in three classes, and discussed the relations between them.

The transient characteristics of the analyser play important roles in the process of analysis. The effects of Q value on the short-time spectra are considered in connection with the duration of vibration and the widths of peaks of spectra.