



Title	8. 最小二乗法により求められた係数相互の関係について : 安芸の解釈について
Author(s)	牧, 正; MAKI, Tadashi
Citation	北海道大学地球物理学研究報告, 11, 59-66
Issue Date	1964-02-15
DOI	<a href="https://doi.org/10.14943/gbhu.11.59">https://doi.org/10.14943/gbhu.11.59</a>
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/13863">https://hdl.handle.net/2115/13863</a>
Type	departmental bulletin paper
File Information	11_p59-66.pdf



# 8. 最小二乗法により求められた 係数相互の関係について

—— 安芸の解釈について ——

牧 正  
(北海道大学理学部地球物理学教室)

— 昭和 38 年 6 月 受 理 —

## 1. 緒 言

地震のマグニチュードと頻度との関係式或はマグニチュードの決定式において、最小二乗法で求められた係数相互の間に著しい直線関係があることが指摘されている<sup>1)</sup>。又これらの係数の値に物理的意味を求める試みもなされている。例えば早津<sup>2)</sup>は日本の観測点別にマグニチュード決定式における係数を最小二乗法で求めて、その分布を重力異常と結びつけ地下構造を論じ、又宮村<sup>3)</sup>は、マグニチュードとその頻度との関係式における係数を地球上の主な地震地域について求め、係数間の関係と地質構造との関連を見い出している。

これに対し安芸<sup>4)</sup>は確率統計の立場からこの現象を全く確率論的(偶然的)なものとして充分説明できるとしている。

今回の研究では、安芸の考えた様に、実際のデータにおいて確率統計の考え方が適用されるかどうかを調べてみた。

## 2. 安 芸 の 論 旨

安芸は確率統計の立場から次の様に考えた。 $x$ を指定変数とし $y$ を平均値 $a+bx$ 、分散 $\sigma^2$ の正規分布に従う確率変数とするとき(これも当面では一つの仮定であるが、ここではふれない)、 $(x_i, y_i)(i=1, 2, \dots, n)$ の標本を用いて最小二乗法で求められた $a, b$ の値 $\hat{a}, \hat{b}$ は2つの変数 $x, y$ の正規分布に従う。このとき、正規回帰論によれば点 $(\hat{a}, \hat{b})$ は平均値 $(a, b)$ を中心とする楕円型に分布する。又 $\hat{a}, \hat{b}$ の間の相関係数が非常に大きい場合、楕円の両軸の比が非常に大きくなり、点 $(\hat{a}, \hat{b})$ は扁平な楕円型に分布することになる。こうして点 $\hat{a}, \hat{b}$ はあたかも一つの直線にそって分布しているかのように見えるのである。更に安芸は係数間の関係について最小二乗法で求めた回帰直線の勾配と確率楕円の長軸の勾配とがほとんど一致することを指摘している。

1) 坪井忠二； 地震のマグニチュードについて，地震，10. (1957), 6.

2) 早津昭男； 地動の最大振幅が距離に対して減衰する割合—それと地下構造との関係，地震，8(1955), 75.

3) S. MIYAMURA； Magnitude-Frequency Relation of Earthquakes and its Bearing on Geotectonics. Proc. Japan. Acad., 38, No. 1 (1962), 27.

4) 安芸敬一； 最小自乗法によってきめた係数相互の関係について，地震，14 (1961), 199.

ここで問題となるのは、実際のデータから得られるサンプルが確率楕円の長軸にそって正規分布をしているかということである。もし正規分布をなさないとすれば、安芸の考えはこれら地震のデータについては適用されないと考えられる。一方、正規分布をすれば確率統計の考え方を適用することができる。

### 3. マグニチュードの決定式について

地震のマグニチュードを  $M$ 、震央距離を  $\Delta$  (km)、又最大地動振幅を  $A$  (マイクロン) とするとき、マグニチュードは次式で求められる。

$$M = \log A + \alpha \log \Delta + \gamma$$

但し、 $\alpha$ ,  $\gamma$  は定数とする。

気象庁から発表されるマグニチュードは上式において、 $\alpha=1.73$ ,  $\gamma=-0.83$  として、日本の主な観測所でえられる  $M$  を平均したものである。

これらの発表された  $M$  を真なるものとして各観測所で記録された  $A$ 、並びに  $\Delta$  を用い最小二乗法で係数  $\alpha$ ,  $\gamma$  を求めた。資料を「地震月報」に求め、昭和31年から36年6月の間に日本及びその近辺に起った地震の中で、深さ60 km以下、各観測所において震央距離が100 km

第1表 マグニチュード決定式における係数  $\alpha$ ,  $\gamma$  の値

Table 1. Coefficients  $\alpha$  and  $\gamma$ , calculated by the method of least squares.  
N: sample size

Station	N	$\alpha$	$\gamma$	Station	N	$\alpha$	$\gamma$
Aikawa	22	0.68	3.05	Nagoya	28	1.08	1.01
Akita	59	4.00	-6.42	Nemuro	29	0.46	2.73
Aomori	78	1.36	-0.20	Niigata	47	1.27	0.08
Fukushima	90	2.59	-2.92	Obihiro	35	1.84	-1.39
Gifu	12	4.12	-5.99	Omaezaki	17	3.09	-3.62
Hachinohe	38	3.25	-3.88	Onahama	64	1.19	0.30
Hikone	13	1.89	-0.37	Ōsaka	14	1.58	-0.37
Kakioka	34	1.28	0.39	Ōshima	20	1.68	-0.01
Kōchi	15	1.25	0.86	Sapporo	34	1.79	-0.90
Kōfu	25	0.63	1.88	Sendai	61	0.75	1.60
Kumagaya	25	1.19	0.55	Shizuoka	13	1.48	0.55
Kumamoto	17	2.68	-2.59	Tōkyō	43	0.15	3.03
Maebashi	28	0.28	2.94	Tomisaki	22	0.93	1.20
Mishima	27	3.30	-3.98	Toyama	17	2.98	-3.64
Mito	67	0.62	2.18	Urakawa	31	1.49	0.02
Miyako	55	1.00	1.40	Utsunomiya	48	1.31	0.41
Mori	34	1.33	0.16	Wajima	16	2.03	-1.20
Morioka	68	0.66	1.95	Yokohama	27	1.53	-0.20

から 500 km で、マグニチュードのきめられているものについて、各観測所毎に係数  $\alpha$ ,  $r$  を求めた。なお最大地動振幅としては、詳細な報告が得られないため、最大水平振幅のうち大きい方をもってあてた。各観測所について得られた  $\alpha$ ,  $r$  の値は第 1 表で示される。第 1 図はこの 2 つの係数間の関係を示したものである。

確率楕円を求めてみると、

中 心 : (1.63, -0.33)

長軸と  $r$  軸との交る角度 :  $21^{\circ}53'$

両 軸 比 : 1/22.8

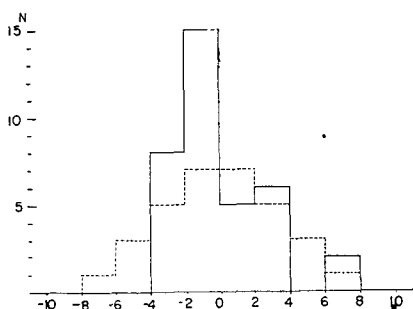
相 関 係 数 : 0.9924

サンプルの 50% を含む楕円 : 長径 3.06,  
短径 0.13

サンプルの 90% を含む楕円 : 長径 5.57,  
短径 0.24

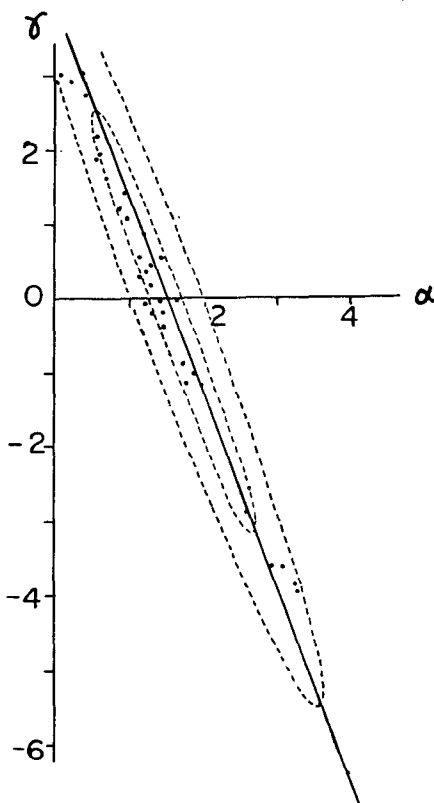
となった。

次に、確率楕円の長軸にそって点  $(\alpha, r)$  の分布を調べた。STURGES の公式により、長軸を 7 区間に分け、その度数分布を、帰無仮説として、正規分布を仮定し、 $\chi^2$ -検定を行なった。



第 2 図 観測頻度分布(実線)とそれから得られる正規分布の理論頻度(破線)との比較

Fig. 2. The observed frequency distribution and the normal one, calculated by the writer.  
 $\mu=0.06$ ,  $\sigma^2=6.78$

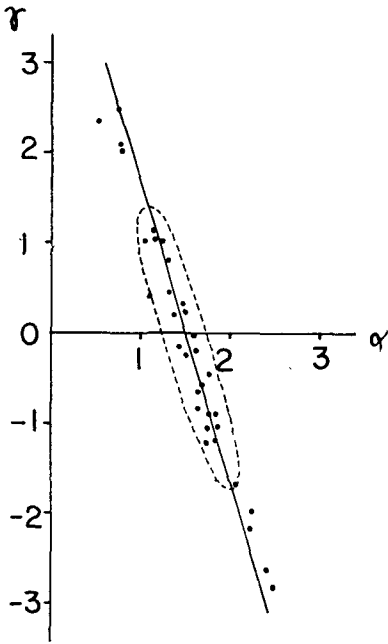


第 1 図 式  $M=\log A+\alpha \log d+r$  において筆者の得た係数  $\alpha$ ,  $r$  の間の関係。破線で示した外側の楕円はサンプルの 90% を含む内側ののは 50% を含む確率楕円である

Fig. 1. Relation between the coefficients  $\alpha$  and  $r$  in the formula  $M=\log A+\alpha \log d+r$ , calculated by the writer. The outer ellipse contains 90% of samples, and the inner one does 50%.

もし正規分布をなさないならば、2 つの係数間について、偶然に直線的に分布したのではなくその直線関係に何らかの物理的意味があると考えられる。第 2 図において、長軸のまわりについてサンプルの各区間における度数分布並びに正規分布を仮定したときの各区間における度数の分布を比較して示した。

検定の結果、長軸のまわりについて正規分布をなさないと仮定しても、誤りを犯す確率は 1% 以下である。



第3図  $\alpha, r$  の関係 (早津による)。破線はサンプルの50%を含む確率楕円を示す。

Fig. 3. Relation between the coefficients  $\alpha$  and  $r$  in the formula  $M = \log A + a \log A + r$ , calculated by Hayatu.

次に、早津の得た34ケのサンプルについても同様にその分布を調べた。確率楕円を求めると、

中心: (1.51, -0.16)

長軸と  $r$  軸との交わる角度:  $17^{\circ}11'$

両軸比: 1/8.26

相関係数: 0.9168

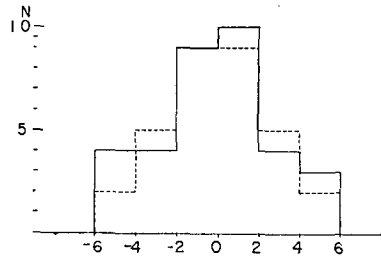
サンプルの50%を含む楕円: 長径 1.63, 短径 0.20

サンプルの90%を含む楕円: 長径 2.98, 短径 0.36

となる。

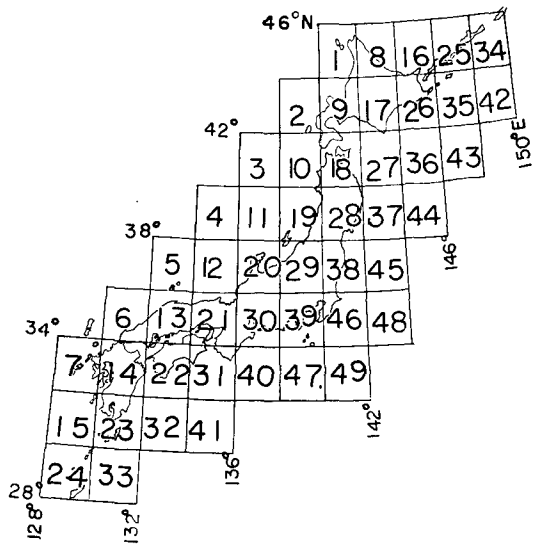
第3図には  $\alpha, r$  の間の関係と50%の確率楕円を示した。楕円の長軸のまわりについて、全体を6区間に分け、各区間における度数分布を調べた。

$\chi^2$ 検定の結果、正規分布の仮定をすてると誤りを犯す確率は70%となる。



第4図 早津によって得られたデータの観測頻度(実線)と、それから得られる正規分布を仮定したときの理論頻度(破線)との比較

Fig. 4. The observed frequency distribution and the normal one, calculated by Hayatu.  $\mu = -0.06, \sigma^2 = 1.95$



第5図 日本及びその近辺を緯度、経度共に2度毎の小地域に分け、各地域について係数  $a, b$  を求める。数字は各地域の番号を表す。

Fig. 5. Japan and its vicinity divided into small provinces having the sides of 2 degrees both in latitude and longitude. Numerals represent the province number, and are found in the first column of Table 2.

筆者の結果と早津のデータから得られた結果は、非常に異なったものとなった。

4. マグニチュードの頻度分布について

マグニチュード  $M$  なる地震の1年あたり平均の地震数を  $N$  とするとき経験的に次式が得られている。

$$\log N = a + b(8 - M)$$

但し、 $a, b$  は定数とする。

今回の研究では気象庁発表の地震の表<sup>5)</sup>を用い、1926~1956年の31年間の地震の中でマグニチュードのきめられているものについて、その頻度との関係を調べた。日本及びその近辺を緯度、経度共に2度毎の小地域に分け、それらに第5図で示されるような番号を附した。そして、各地域について、マグニチュード毎の頻度を調べた。結果は第2表で与えられる。又同

第2表 各地域における地震のマグニチュード別頻度並びに式  $\log N = a + b(8 - M)$  における係数  $a, b$  の値。下線を施した部分は計算から除いたものである。

Table 2. Frequency distribution of earthquakes classified by magnitude ( $M$ ) in each province, and coefficients  $a$  and  $b$  in the formula  $\log N = a + b(8 - M)$ .

Province	$M$									$a$	$b$
	4.0-4.4	4.5-4.9	5.0-5.4	5.5-5.9	6.0-6.4	6.5-6.9	7.0-7.4	7.5-7.9	8.0-8.4		
1											
2	2		2		2						
3		1	1	2							
4				1							
5		2	1			1					
6		2	3		1						
7	1	1	3								
8											
9			3	2			1				
10			3	2	1						
11			2								
12	1	2	1								
13	<u>14</u>	30	19	7	5					- 1.77	0.53
14	<u>4</u>	17	18	7	2	2				- 1.99	0.56
15		2	2	6	2						
16			1	1	1						
17	<u>4</u>	<u>27</u>	50	12	6	4				- 1.93	0.72
18	<u>3</u>	11	8	3		1				- 2.21	0.55

(to be continued)

5) 気象庁；日本附近の主要地震の表(1926年~1956年), 1958.

Province	M									a	b
	4.0-4.4	4.5-4.9	5.0-5.4	5.5-5.9	6.0-6.4	6.5-6.9	7.0-7.4	7.5-7.9	8.0-8.4		
19		1	7		1	1	1				
20	<u>4</u>	23	13	4	2	1	1			- 2.15	0.60
21	<u>23</u>	70	39	11	6	1	1	1		- 1.99	0.69
22	<u>12</u>	<u>27</u>	27	6	4		1			- 2.54	0.91
23	<u>2</u>	<u>1</u>	19	8	6	1				- 2.36	0.78
24			1	3	2						
25		2	1	2							
26	<u>2</u>	<u>19</u>	50	24	7	3	2			- 1.33	0.50
27	<u>14</u>	73	122	50	35	10	5			- 1.67	0.80
28	<u>13</u>	23	9	4	2					- 2.50	0.71
29	<u>29</u>	56	34	11	6	7				- 1.79	0.63
30	<u>25</u>	46	33	9	5	1	1			- 2.22	0.75
31	<u>17</u>	46	30	12	7	3	2		1	- 1.96	0.51
32	<u>1</u>	<u>1</u>	7	5	1	2				- 1.97	0.46
33			5	8	5	2					
34				2	3	3					
35	<u>5</u>	<u>7</u>	13	14	5	2					
36	<u>1</u>	<u>4</u>	18	21	12	8	1			- 2.01	0.87
37	<u>15</u>	<u>37</u>	52	46	18	7	2	1		- 1.56	0.66
38	<u>124</u>	238	143	64	28	11	3	3		- 1.70	0.97
39	<u>16</u>	42	31	10	8	1	1			- 2.34	0.82
40		<u>3</u>	<u>5</u>	5	1	2			1	- 1.87	0.40
41	1										
42				5	3						
43				1		2					
44		<u>1</u>	<u>14</u>	19	13	3				- 1.42	0.50
45	<u>5</u>	<u>17</u>	28	23	18	7				- 1.06	0.39
46	<u>39</u>	<u>76</u>	65	45	18	5		1		- 2.15	0.96
47	<u>1</u>	<u>2</u>	5	1	2	1				- 2.00	0.36
48		1	1	2							
49		2	12	8							

時に最小二乗法により求めた係数  $a$ ,  $b$  の値もあわせて示した。 $a$ ,  $b$  の間の関係を示したのが第6図である。前と同様に確率楕円を求めてみると、

中 心:  $(-1.94, 0.69)$

長軸と  $a$  軸との交わる角度:  $20^{\circ}28'$

両 軸 比:  $1/3.22$

相 関 係 数:  $0.7020$

サンプルの 50% を含む楕円: 長径 0.43, 短径 0.14

となる。

確率楕円の長軸のまわりについて、5区間に分け、正規分布をするという帰無仮説の下に $\chi^2$ 検定を行なった。正規分布と実際の度数分布とを第7図で示した。

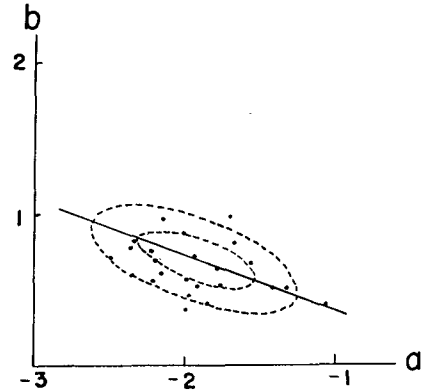
検定の結果、正規分布の仮定をすてると誤まりを犯す確率は48%となった。

### 5. 結 論

以上3つの検定から確率楕円の長軸のまわりについて正規分布をなさないと断言するには躊躇せざるを得ない結果となった。マグニチュードの決定式に関して、筆者の得た結果からは完全に正規分布を否定することができる。これに反し早津が求めた値についてはむしろ正規分布に近い分布を示した。又マグニチュードの頻度分布に関しては、これらの二つの結果とは又異なるものとなった。従って現段階では、確率的にのみ充分説明がつくとされるのはいささか性急の感がある。

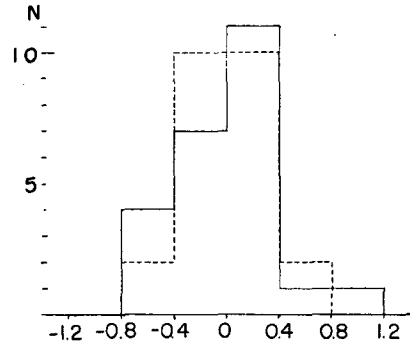
GUTENBERG, RICHTER の定義したマグニチュードに考察を戻すならば、ある一つの規模で起った地震は、いくつかの観測点で得られる記録からそれを求めるとき、各観測点で得られる結果は本来一義的にきめられるべきものである。地震波が伝播して行く途中で、地質構造等の境界面での地震波の複雑な反射・屈折により各観測点で観測される振幅が平均的(A~d)曲線のそれとは異ったものとなり、それらのために各観測所での係数 $\alpha$ ,  $\gamma$ が異った値となるものと考えられる。又個々の観測点のごく近くの地盤の振動特性なども大きな影響を与えているとも考えられる。

最後に、終始心暖い御援助を惜しまれなかつた松沢武雄先生並びに最後まではげましの言葉と助言をいただいた横山泉先生に深謝し、あわせて教室諸先輩の協力に感謝いたします。



第6図 式  $\log N = a + b(8 - M)$  における  $a$ ,  $b$  の関係。外側の楕円はサンプルの数の90%を含み、内側のは50%を含む確率楕円である。

Fig. 6. Relation between the coefficients  $a$  and  $b$  in the formula  $\log N = a + b \times (8 - M)$ . The outer ellipse contains 90% of numbers of samples, and the inner 50%.



第7図 観測頻度分布(実線)と正規分布(破線)との比較

Fig. 7. The observed frequency distribution and the normal one.  $\mu = 0.04$ ,  $\sigma^2 = 0.78$

## 8. On the Correlation of Coefficients Determined by the Method of Least Squares.

By Tadashi MAKI

(Department of Geophysics, Faculty of Science, Hokkaido University)

Hitherto several authors pointed out that there are apparently linear relationships between the coefficients contained in the expression of earthquake magnitudes and in the relation between the magnitudes and their frequencies, which are determined by the method of least squares. Concerning these relations, K. AKI commented, from the view point of the theory of probability, that these relation might result from the accidental cause, i. e. a probability ellipse might be deemed apparently as a straight line when both the coefficients are highly correlated.

However, AKI's comment requires the condition that the distribution of samples along the major axis of the probability ellipse is normal. In this report, it is examined whether the above distribution is normal or not. The results of the  $\chi^2$ -testing are given as follows: for the expression of earthquake magnitudes, the writer's data are examined to belong to the normal distribution with the significant level 1%, while HAYATU's data are examined to belong to the normal distribution with the significant level 70%. For the relation between the magnitudes and their frequencies, the data are examined to belong to the normal distribution with the significant level 48%.

According to the above results, it may be said that AKI's criticism is not always to be adopted for the two relations of earthquake magnitudes.