12. 地震動波形の周波数分析について（その2）

田　　望・堀田　宏
（北海道大学理学部地球物理学教室）
— 昭和38年6月受理 —

I. はしがき

前論文[1]においては著者の一人は周波数分析器の機能その他について論じたが，本論文においてはその出力の統計的意味について述べる。Analogue 型の周波数分析器或いは振動分析器は狭帯域濾波器を備え，その出力を直接記録させるか或いは，その出力を自乗平均するとか整流平均するとかして記録する方法を採用しているのが普通である。かゝる分析器を使用して Gaussian noise の電力スペクトルを求める場合の理論を考察する。

II. 狭帯域濾波器の出力

いま狭帯域濾波器として並列 L, C, R の共振回路或いはこれと等価な回路を例にとる。低周波用の振動分析器には L, C, R の共振回路を用いず，帰還回路に R, C の rejection filter を持つものも多いが，かゝる回路もその周波数特性の主要部分は並列 L, C, R の共振回路で近似される場合が多い[2]から以下の理論はその様な場合にも適用される。

共振回路の impulsive responce は

$$B_Q(t)\begin{cases} =\dfrac{\omega_0}{Q\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}}}e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\cos(\gamma t+\delta), & t\geqq 0 \\ =0 & t<0 \end{cases} \tag{II-1}$$

である。ただし

$$\gamma=\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}$$

$$\delta=\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{4Q^2-1}}$$

$$f_0=\frac{\omega_0}{2\pi};\ \text{中心周波数}$$

$$Q\gg 1\quad;\ \text{quality factor}$$

またこの濾波器の伝達函数 (transfer function) は

$$Y_Q(\omega,\omega_0)=\frac{1}{1+iQ\left(v-\dfrac{1}{v}\right)} \tag{II-2}$$

---

1) 田　望；地震動波形の周波数分析について，北大地球物理研究報告, **9** (1962), 87–102.
2) 堀田　宏；周波数分析装置の試作，北大地球物理研究報告, **10** (1963), 135–142.

ただし

$$v=\frac{f}{f_0}=\frac{\omega}{\omega_0}$$

である。この伝達函数は $Y_Q(\omega_0, \omega_0)=1$ と規格化してある。

この濾波器に有限の energy をもつ任意のある入力信号 $f(t)$ を加えた場合を考える。$f(t)$ のスペクトルを $\Omega(\omega)$ とする。すなわち

$$\Omega(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \tag{II-3}$$

しかるときこの濾波器の出力 $g(t)$ の energy は

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t)\, dt=\int_{-\infty}^{+\infty} |Y_Q(\omega, \omega_0)|^2 \cdot |\Omega(\omega)|^2\, df \tag{II-4}$$

と表現されこれは $|\Omega(\omega)|^2$ の荷重平均である。

もし濾波器の Q 値が充分大きく $|\Omega(\omega)|^2$ の変化が $|Y_Q(\omega, \omega_0)|^2$ の変化に比しゆるやかな場合には上式は

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t)\, dt \approx 2|\Omega(\omega_0)|^2 \int_0^{+\infty} |Y_Q(\omega, \omega_0)|^2\, df \tag{II-5}$$

となる。この右辺の積分の項を計算すると

$$\beta=\int_0^{+\infty} |Y_Q(\omega, \omega_0)|^2\, df=\frac{\omega_0}{4Q}=\frac{\pi f_0}{2Q} \tag{II-6}$$

となる。 この β は実効帯域幅 (effective band-width) または雑音等価帯域幅 (noise equivalent band-width) と呼ばれる[3]。共振回路で普通用いられる半値幅 β' は

$$\beta'=\frac{f_0}{Q}$$

であるから

$$\beta=\frac{\pi}{2}\beta'$$

である。(II-5) と (II-6) より

$$|\Omega(\omega)|^2 \approx \frac{Q}{\pi f_0}\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t)\, dt \tag{II-7}$$

となる。即ち $f(t)$ の振幅スペクトルは濾波器出力を自乗し積分する操作から (II-7) 式により求められる。個々の波形のスペクトル構造を知るためには，Q 値が高いことが要求される。

III.　Gaussian noise の分析　その 1，自乗平均法

或る Gaussian noise の母集団についての必要な知識はすべてその電力スペクトル (power spectrum)

3) 関　英男；雑音 (1954), 岩波書店.

$$P(f)=E\lim_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{T}\left|\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}}f(t)\,e^{-i\omega t}\,dt\right|^2\right\} \tag{III-1}$$ *

に含まれているから，標本函数 $f(t)$ の有限時間の観測からこれを推定する方法を明確にしておくことは大切である。

1. 自乗検波による推定

無限に続く振動をある時間 T だけ解析するのであるから，濾波器の入力および出力側で回路を on-off する操作が行なわれることになり，これには種々の方法が考えられる[4)]。本論文においては信号が $0\leqq t\leqq T$ の間でのみ入力に加えられ，出力は $t<0$ で接地され，$t\geqq 0$ で常に自乗積分器或いは整流積分器に接続されている場合を扱う。入力側の switching は

$$s(t)\begin{cases}=1 & 0\leqq t\leqq T\\ =0 & t<0 \quad \text{および} \quad t>T\end{cases} \tag{III-2}$$

にて表わす。したがって濾波器の入力波形は $s(t)\,f(t)$ である。

濾波器の出力は

$$g(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}B_Q(\tau)\,s(t-\tau)\,f(t-\tau)\,d\tau=B_Q(t)*\{s(t)\cdot f(t)\} \tag{III-3}$$

である。ただし * は convolution を表わす。これを自乗積分器に加えその最終読取値を T にて除したものを $P_Y(f_0)$ と書く。すなわち

$$\begin{aligned}P_Y(f_0)&=\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty}g^2(t)\,dt\\&=\frac{1}{T}\iiint B_Q(\tau_1)\,B_Q(\tau_2)\,s(t-\tau_1)\,s(t-\tau_2)f(t-\tau_1)f(t-\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2 dt\end{aligned} \tag{III-4}$$

この期望値を求めると

$$E\{P_Y(f_0)\}=\int_0^{+\infty}H_Y(f,f_0)\,P(f)\,df \tag{III-5}$$

となる。ただし

$$H_Y(f,f_0)=\frac{2}{T}|J(\omega)|^2*|Y(\omega,\omega_0)|^2 \tag{III-6}$$

$$J(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}s(t)\,e^{-i\omega t}dt \tag{III-7}$$

いま $P(f)$ の変化が $H_Y(f,f_0)$ の変化に比しゆるやかな場合には (III-5) は

$$E\{P_Y(f_0)\}\approx P(f_0)\int_0^{+\infty}H_Y(f,f_0)\,df \tag{III-8}$$

となる。しかるに

---

* $2P(f)$ を電力スペクトルと定義する場合も多い。

4) R. B. BLACKMAN and J. W. TUKEY; The Measurement of Power Spectra. (1958) Dover Publ. Inc.

$$\int_0^{+\infty} H_Y(f, f_0)\,df = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t)\,dt \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |Y_Q(f, f_0)|^2 df = 2\beta \tag{III-9}$$

であるから

$$P(f_0) \approx \frac{Q}{\pi f_0} E\left\{\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t)\,dt\right\} \tag{III-10}$$

となる。したがって，このような場合には

$$P_{d2}(f_0) = \frac{\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t)\,dt}{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |Y_Q(f, f_0)|^2 df} = \frac{Q}{\pi f_0}\left\{\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t)\,dt\right\} \tag{III-11}$$

を電力スペクトルの推定量として用いるのが望ましい。

一方出力の平均電力 $P_Y(f_0)$ を推定電力スペクトルとして用いる場合も多い。ヘテロダイン方式の分析器のように f_0 を変化させても実効帯域幅の変化しない装置を使用する場合には，$P_Y(f_0)$，$P_{d2}(f_0)$ のいずれをを採用しても大した問題はない。しかし低周波帯域で使用される分析器には f_0 を変化させても Q が変化しない装置が多い。かゝる装置を使用する場合や，異なる Q 値による分析結果を総合整理する場合などは，$P_{d2}(f_0)$ を採用すべきである。

2. 包絡線による推定

Q 値の高い濾波器の出力は一般に周波数が f_0 で振幅および位相がゆるやかに変化する波形で

$$g(t) = G(t)\cos\{\omega_0 t + \alpha(t)\} \tag{III-12}$$

と書ける。ただし $G(t) \geqq 0$ とする。したがって

$$\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t)\,dt \approx \frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{+\infty} G^2(t)\,dt \tag{III-13}$$

であから，包絡線 $G(t)$ から電力スペクトルを求めるのに

$$P_{D2}(f_0) = \frac{Q}{2\pi f_0}\left\{\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} G^2(t)\,dt\right\} \tag{III-14}$$

を推定量として用いてもよい。

3. 誤差について

いま，濾波器の入力信号は S. O. RICE[5] の表現方法によれば

$$s(t) f(t) = \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos 2\pi f_n t + b_n \sin 2\pi f_n t) \tag{III-15}$$

ただし

$$f_n = \frac{n}{T}$$

とかける。いま入力が考察する周波数帯域 $\left[0,\ \dfrac{N}{T}\right]$ で平坦な電力スペクトルを持つ場合，即ち

5) S. O. RICE; Mathematical Analysis of Random Noise, Selected Papers on Noise and Stochastic Processes, edited by N. WAX, (1954) Dover Publ. Inc.

入力が white Gaussian noise である場合を考えよう。この場合 a_n, b_n は平均値 0 であり分散が

$$E\{a_n^2\} = E\{b_n^2\} = \frac{2P}{T} = \text{const.} \tag{III-16}$$

である正規分布をする。T が大きく switching による過渡現象が無視出来るとすれば，濾波器出力電力は

$$\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt \approx \frac{1}{2}\sum_{n=n_1}^{n_2}(a_n^2+b_n^2) \tag{III-17}$$

ただし

$$n_2 - n_1 + 1 = 2\beta T$$

で近似される。したがって $2\beta T\cdot P_{a2}(f)/P(f_0)$ は自由度 $2\beta T$ の χ^2 分布をする。

入力信号が white Gaussian noise でない場合でも f_0 の近傍で $P(f)$ が緩やかに変化する場合とか或いは prewhitening が施されている場合には $2\beta T\cdot P_{a2}(f)/P(f_0)$ は近似的に自由度

$$k = 2\beta T = \frac{\pi}{Q} f_0 T \tag{III-18}$$

の χ^2 分布をするから，これにより誤差の推定をすることが出来る。即ち $P_{a2}(f_0)/P(f_0)$ の分散は

$$V\left\{\frac{P_{a2}(f_0)}{P(f_0)}\right\} \approx \frac{2}{k} = \frac{2Q}{\pi f_0 T} \tag{III-19}$$

である。

Switching の影響を含めた $P_Y(f_0)$ の誤差については R. B. BLACKMAN and J. W. TUKEY[6] により詳細に論じられているが P_{a1}, P_{D1} についてもこの結論はそまま適用される。

IV. Gaussian noise の分析　その2　整流平均法

1. 両波直線整流による推定

観測時間を限らずに Gaussian noise を濾波器の入力に加えた場合には，その出力も Gaussian noise となる。Switching による過渡現象を無視できる場合には $g(t)$ は $[0,\ T]$ で定常でありその確率密度函数は

$$P(g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{g^2}{2\sigma^2}} \tag{IV-1}$$

である。ただし

$$\sigma^2 = E\{g^2(t)\} \tag{IV-2}$$

よって出力の両波整流の期待値は

$$E\{|g(t)|\} = \int_{-\infty}^{+\infty} |g| P(g)\,dg = 2\int_0^{+\infty} g P(g)\,dg = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\sigma \tag{IV-3}$$

6) R. B. BLACKMAN and J. W. TUKEY; loc. cit., 4).

となる。これを時間で積分することにより

$$\left[E\left\{\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty}|g(t)|dt\right\}\right]^2=\frac{2}{\pi}E\left\{\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty}g^2(t)\,dt\right\} \qquad \text{(IV-4)}$$

を得る。これを (III-10) 式に代入すれば

$$P(f_0)\approx\frac{Q}{2f_0}\left[E\left\{\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty}|g(t)|dt\right\}\right]^2 \qquad \text{(IV-5)}$$

となる。よって

$$P_{a1}(f_0)=\frac{Q}{2f_0}\left\{\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty}|g(t)|dt\right\}^2 \qquad \text{(IV-6)}$$

とおけば $\sqrt{P_{a1}(f_0)}$ は近似的に $\sqrt{P(f_0)}$ の一致推定量である。

2. 包絡線による推定

出力の包絡線 $G(t)$ を利用する場合には (III-12) より

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|g(t)|dt\approx\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}G(t)\,dt \qquad \text{(IV-7)}$$

の関係が求められるから

$$P_{D1}(f_0)=\frac{2Q}{\pi^2 f_0}\left\{\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty}G(t)\,dt\right\}^2 \qquad \text{(IV-8)}$$

とすれば，$\sqrt{P_{D1}(f_0)}$ はやはり $\sqrt{P(f_0)}$ の一致推定量である。

比較的簡単な周波数分析器では濾波器の出力を直接記録したりまたは平均整流出力を指示或いは記録させるようにしたものも多いから，そのような装置を使用する場合には P_{a1} 或いは P_{D1} を用いるのが便利である。

3. 誤差について

濾波器入力が考察する周波数帯域で平坦な電力スペクトルを持つ場合の $\sqrt{P_{D1}(f_0)}$ の分散について考察する。入力における switching の影響を無視し，且つ $g(t)$ は (III-12) により表現されることを考えて $\sqrt{P_{D1}(f_0)}$ を次式により近似する。

$$\left.\begin{aligned}&\sqrt{P_{D1}(f_0)}=\sqrt{\frac{Q}{2f_0}}\,\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty}|g(t)|dt\approx\sqrt{\frac{2Q}{\pi^2 f_0}}\,X\\&X=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}X_i\\&X_i=|g(t_i)|\end{aligned}\right\} \qquad \text{(IV-9)}$$

ただし t_i は $[0,\ T]$ において $g(t_i)$ が極大または極小になる時刻を順次にとったものである。N の期望値は $2f_0T$ である。

この X についての分散 $V(X)$ を計算する。即ち

$$V(X)=E\left[\left\{X-E(X)\right\}^2\right]=\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}E\left[\left\{X_i-E(X_i)\right\}\left\{X_j-E(X_j)\right\}\right]$$

$$= \frac{2(\pi-2)\sigma^2}{\pi N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}R_{ij} - \frac{(\pi^2-8)\sigma^2}{\pi N^2}$$

$$\approx \frac{2(\pi-2)\sigma^2}{\pi N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}R_{ij} \qquad \text{(IV–10)}$$

ここで R_{ij} は $|g(t)|$ の自己相関函数 $r\{\rho(\tau)\}$ において

$$\tau = t_i - t_j = \frac{1}{2f_0}(i-j) \qquad \text{(IV–11)}$$

とおいた値である。ところで $|g(t)|$ の自己相関函数は

$$r(\rho) = \frac{\pi}{\pi-2}\left\{\rho\left(1-\frac{2}{\pi}\cos^{-1}\rho\right) - \frac{2}{\pi}\left(1-\sqrt{1-\rho^2}\right)\right\} \qquad \text{(IV–12)}$$

$$0 \leqq \cos^{-1}\rho \leqq \pi$$

と求められる。ただし ρ は $g(t)$ の相関係数で

$$\rho(\tau) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}} e^{-\frac{\omega_0}{2Q}|\tau|}\cos(\gamma\tau+\delta) \qquad \text{(IV–13)}$$

$$\approx e^{-\frac{\omega_0}{2Q}|\tau|}\cos\omega_0\tau$$

である。したがって

$$\rho(t_i - t_j) \approx (-1)^{i-j} e^{-\frac{|i-j|\pi}{2Q}} \qquad \text{(IV–14)}$$

である。そこで

$$\left.\begin{aligned} &R(y) = r\{x(y)\} \\ &x(y) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}|y|} \\ &y = t - t' \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IV–15)}$$

とおき (IV–10) 式を次式で近似する。

$$V(X) \approx \frac{2(\pi-2)\sigma^2}{\pi T^2}\int_0^T dt \int_{-t}^{T-t} R(y)\,dt \qquad \text{(IV–16)}$$

ところで $R(y)$ についての積分は $|y| \gg \dfrac{2Q}{\omega_0}$ の範囲での寄与は小であるから $T \gg \dfrac{2Q}{\omega_0}$ の場合には積分領域を $(-\infty,\ \infty)$ で近似することができる。

$$V(X) \approx \frac{2(\pi-2)\sigma^2}{\pi T^2}\int_0^T dt \int_{-\infty}^{+\infty} R(y)\,dy = \frac{4(\pi-4+2\ln 2)Q\sigma^2}{\pi^2 f_0 T} \qquad \text{(IV–17)}$$

これと (IV–9) から $\sqrt{P_{D1}(f_0)/P(f_0)}$ の分散は

$$V\left(\sqrt{\frac{P_{D1}(f_0)}{P(f_0)}}\right) \approx \frac{2}{\pi\sigma^2}V(X)$$

$$\approx \frac{8(\pi-4+2\ln 2)}{\pi^3}\,\frac{Q}{f_0 T}$$

$$= 0.136\,\frac{Q}{f_0 T}$$

と求められる。

V. あ と が き

Gaussian noise の個々の実現値のスペクトルは周波数領域の標本点における値に独立な確率変数であるから，きわめてゆらぎの大きいものである。これから母集団の性質を求めるには平滑化電力スペクトルを求めなければならない。濾波器の実効帯域幅はこの平滑化の役割を果たす。電力スペクトルの推定には濾波器出力の自乗平均も整流平均も利用できることが明らかにされた。しかがって，使用する周波数分析器の構造により最も便利な推定量を利用することができる。

$P_{d2}(f_0)/P(f_0)$, $P_{D2}(f_0)/P(f_0)$, $\sqrt{P_{d1}(f_0)/P(f_0)}$, $\sqrt{P_{D1}(f_0)/P(f_0)}$ の分散は III. 3, IV. 3 に論じた如く，T が大なるときいずれも $Q/(f_0T)$ に比例する。したがって振動を確率過程として分析する場合には，不必要に Q 値を大にすると平滑化が充分でなく誤差を大きくする危険があり，f_0T の値に応じ Q を適当な値に設定する必要がある。小さい誤差で高い分解能が要求される場合には観測時間 T を大にとらねばならぬことは勿論である。

また個々の振動の特徴を解析するには，II において論じた如く，極めて高い Q 値をもつ分析器が必要である。一つの実現値としての振動の個別性が振幅スペクトルのゆらぎや位相スペクトルに存するためであって，その場合平滑化は情報の低減をきたすことになる。

(II-7), (III-11), (III-14), (IV-6), (IV-8) の右辺の，係数には f_0 が含まれている。勿論これは伝達函数を (II-2) に見られる如く $Y(\omega_0, \omega_0)=1$ と規格化し，特性を Q 値により規定したため，(II-6) に示される如く実効帯域幅が f_0 に比例することに由来するものである。しかしこのような表現を用いる時には，この係数には留意する必要がある。特に周波数領域においてのエネルギー分配を求める時には，この係数の有無は解析結果の物理的解釈に大きな相異をもたらすことになろう。

12. A Note on the Frequency Analysis of the Earthquake Motions (Part 2)

By Nozomu DEN and Hiroshi HOTTA
(Department of Geophysics, Faculty of Science, Hokkaido University)

In the previous paper the functions of frequency analyzers are discussed in detail and in this paper the interpretation of the output signal of the analyzer is considered.

The characteristics of Gaussian noise are represented fully in the power spectra. When Gaussian noise is put in the input of the filter and the output signal is squared and averaged, the $Q/\pi f_0$ times of the result, that is defined as $P_{d2}(f_0)$, is a good estimate of the power spectra $P(f_0)$. When the output signal is rectified by a linear full wave rectifier and aver-

aged, the $\sqrt{Q/2f_0}$ times of the result, that is defined as $\sqrt{P_{d1}(f_0)}$, is also a good estimate of $\sqrt{P(f_0)}$.

The variances of $P_{d2}(f_0)/P(f_0)$, $\sqrt{P_{D1}(f_0)/P(f_0)}$, etc. become small in proportion to $Q/(f_0T)$, as the length T of the record becomes large. So the suitable value of Q should be chosen, when signals are analyzed as stochastic processes.