6. 地震の規模別度数の統計式 $\log n=a-bM$ の係数 b を求める一方法

宇 津 徳 治
(北海道大学理学部地球物理学教室)
— 昭和 39 年 10 月受理 —

1. まえがき

筆者[1]は以前，一つの地震群について規模別度数分布が

$$\log n(M)=a-bM \tag{1}$$

で表わされるとした場合，係数 b の値を決めるときに通常用いられるいくつかの方法についてその精度を吟味した。ここでは，別の一つの方法について述べる。今回の方法は簡単でかつ精度がよいことが示される。

2. 方　　法

いま，m 個の地震の規模を大きさの順に M_1, M_2, ………, M_m とし

$$\sum_{i=1}^{m}(M_i-M_m)^n, \quad n>0 \tag{2}$$

を考える (この場合当然のことながら M_m 以上の大きさの地震はもれなく観測されているとする)。これを仮に n 次の標本モーメントと呼ぶことにすると，これは仮に母集団モーメントとも呼ぶべき次の量

$$\int_{M_m}^{\infty}(M-M_m)^n\,n(M)\,dM=\frac{m\Gamma(n+1)}{(b\ln 10)^n} \tag{3}$$

に近似的に等しいから

$$\sum_{i=1}^{m}(M_i-M_m)^n=\frac{m\Gamma(n+1)}{(b_n\ln 10)^n} \tag{4}$$

とおいて得られる b_n は b の近似値を与える。もっとも簡単な場合として $n=1$ とおくと

$$b_1=\frac{0.4343m}{\sum_{i=1}^{m}M_i-mM_m}=\frac{0.4343}{\overline{M}_i-M_m} \tag{5}$$

は b の一つの近似値である。(5) 式による計算は最小 2 乗法等に比べればはるかに簡単であり，かつ，値が一義的に定まる (最小 2 乗法では計算に用いる M の上限値，$n(M)=0$ となる区間

1) 宇津徳治；地震の規模別度数の統計式について (序報), 験震時報 28 (1964), 79-88.

の処理法，ウエイトのかけかたなどによって得られる値が多少違ってくる)。

(5) 式による b_1 と従来の方法による b との比較の 1 例として，前報[2] の Table 1 と Fig. 1 に示したデーターについて調べてみると，$m=352$, $M_m=5.95$ (M を 0.1 ごとに区切ってあるので M の最小値は 6.0 でなく 5.95 とすべきである) で，$\sum M_i=2247.4$ となるから，$b_1=1.00$ が得られる。この値は前報の Fig. 1 に目見当で直線をあてはめてその傾斜から求めた値 $b=1.0$[3] とまったく一致する。

(5) 式では最大の地震の規模 M_1 以下 M_m まですべての規模がわかっていなければならないが，もし，M_l 以上の l 個の地震の規模は不明である場合は

$$b_1=\frac{0.4343\,(m-l)}{\sum\limits_{i=l+1}^{m} M_i-mM_m+lM_l} \tag{6}$$

を用いればよい。

(1) 式と同じ意義をもつ石本・飯田の式

$$n(a)=ka^{-\mu} \tag{7}$$

の指数 μ を決めるときにも (5), (6) と同様に

$$\mu_1-1=\frac{0.4343m}{\sum\limits_{i=1}^{m}\log a_i-m\log a_m} \tag{8}$$

または

$$\mu_1-1=\frac{0.4343\,(m-l)}{\sum\limits_{i=l+1}^{m}\log a_i-m\log a_m+l\log a_l} \tag{9}$$

を用いればよい。

1 例として石本・飯田の原論文[4] の第 II 表のデータにより μ_1 を求めると，$\mu_1=1.75$ となる (ただし，第 II 表には振幅 35 mm 以上の地震のデータが掲げられていないが，これは第 I 表から 45 個あることがわかるので $l=45$ として (9) 式を用いた。また，振幅 0〜1 mm の範囲のデータは捨てた)。原論文には $\mu=1.74$ と求められているが，これと今回の方法で求めた値とはよく一致している。

3. 精　　度

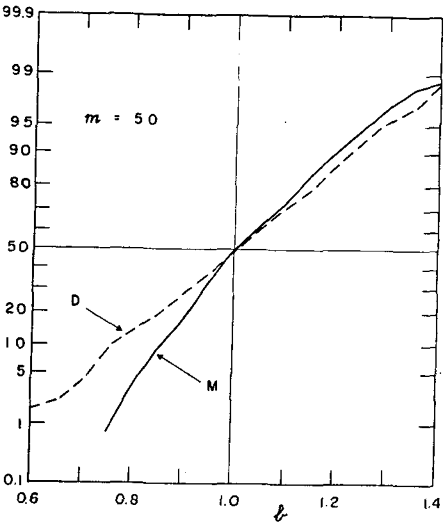
この方法の精度を評価するために，前報[5] と同様に乱数表を用いて作った 2 万個の規模のデータ (母集団の b の値が 1.00 であるもの) を用いて，地震の総数を $m=50$ として得られる

2) 前出 1).

3) UTSU, T; A Statistical Study on the Occurrence of Aftershocks, Geophys. Mag., **30** (1961), 521–605 (p. 591).

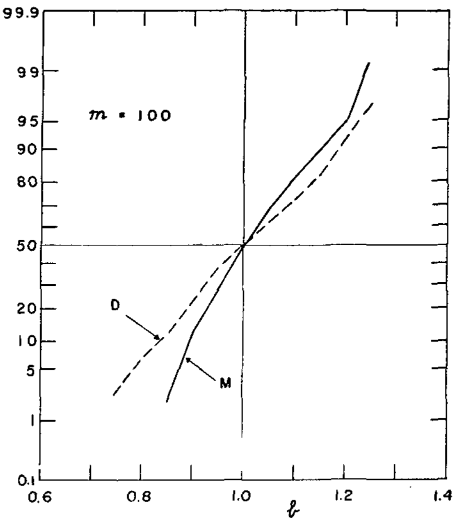
4) 石本巳四雄・飯田汲事; 微動計による地震観測 (一), 震研彙報, **17** (1939), 447–478.

5) 前出 1).



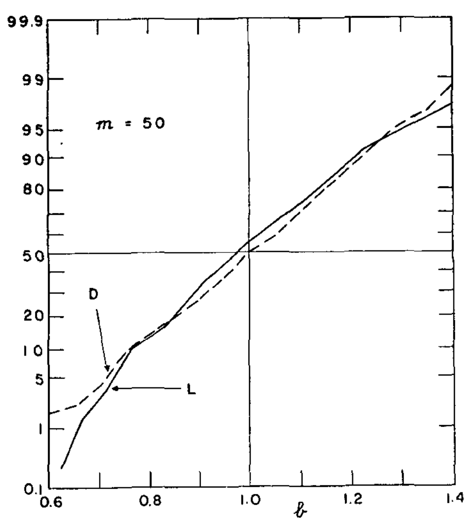
第1図 正規確率紙上にプロットした b の値の累積度数分布 D: Deming の最小2乗法によるもの, M: 今回の方法によるもの

Fig. 1. Cumulative frequency distribution of b calculated by the Deming's method of least squares (D) and by the present method (M) as plotted on probability paper.



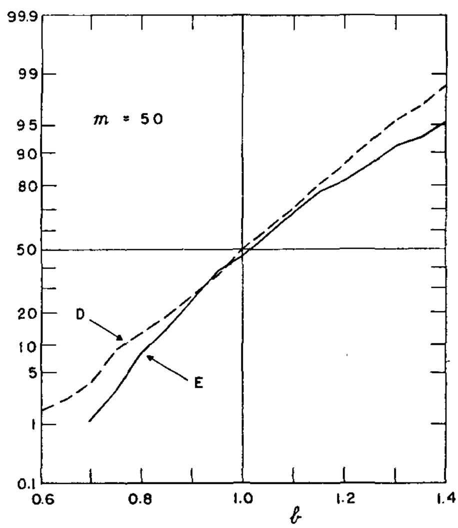
第2図 正規確率紙上にプロットした b の値の累積度数分布 D: Deming の最小2乗法によるもの, M: 今回の方法によるもの

Fig. 2. Cumulative frequency distribution of b calculated by the Deming's method of least squares (D) and by the present method (M) as plotted on probability paper.



第3図 正規確率紙上にプロットした b の値の累積度数分布 D: Deming の最小2乗法によるもの, L: (10)式によるもの

Fig. 3. Cumulative frequency distribution of b calculated by the Deming's method of least squares (D) and by Eq. (10) (L) as plotted on probability paper.



第4図 正規確率紙上にプロットした b の値の累積度数分布 D: Deming の最小2乗法によるもの, E: 片対数方眼紙上にプロットした点に目見当で直線をあてはめたもの

Fig. 4. Cumulative frequency distribution of b calculated by the Deming's method of least squares (D) and by a graphical method (E) as plotted on probability paper.

400 組，および，$m=100$ として得られる 200 組の規模別度数分布表から，(5) 式によって b_1 を求めてみた。これら 400 個および 200 個の b_1 の値の分布が，母集団の値の 1.00 のより近くにまとまっているほど，精度がよいことになる。

第 1 図の実線 M は $m=50$ のとき，(5) 式によって決めた b_1 の値の累積度数分布を正規確率紙上にプロットしたもので，破線 D は前報[6] で試みたいくつかの方法のうち，もっとも精度がよいと結論された Deming の最小 2 乗法によって決めた b の値の累積度数曲線である。累積度数曲線が直線ならば b の値の分布は正規分布をし，その傾きが急なほど分散が小さい，すなわち，精度がよいことになる。また累積度数曲線は $b=1.0$ で 50% の点を通ることが望ましい。第 1 図によると，M 曲線は多小直線からはずれているが，D 曲線よりも傾斜は急で，かつ，$b=1.0$ で 50% の点の付近を通り，今回の方法の精度がよいことを示している。

第 2 図は $m=100$ の場合の同様な図であり，第 1 図と同様なことが見られる。

第 3 図と第 4 図には，参考までに，$m=50$ の場合について，別の 2 つの方法，すなわち，前報[6] の (3, l) 式

$$b_{lm} = \frac{\log (l/m)}{M_l - M_m} \tag{10}$$

で，$m=50$, $l=5$ とおいて求めた場合 (L 曲線)，および規模の累積度数の対数 $\log n(M)$ を M に対してプロットしたグラフに目見当で直線をあてはめ，その傾斜から b を求めた場合 (E 曲線) を第 1 図の D 曲線と対比させて示しておいた。今回の方法はこの 2 つの方法よりも精度がよいことは容易に見られる。

ここでは乱数表から作った規模のデータを 400 組 ($m=50$ のとき) および 200 組 ($m=100$ のとき) 用いたが，これだけの組数から得られた結論の精度について調べてみる。これには Deming の最小 2 乗法によって決めた b の値の分散と今回の方法によって決めた b_1 の値の分散の間に有意の差があるか否かを検定してみればよい。統計学の書物で普通に用いられている記号を用いれば，$m=50$ の場合は第 1 図より $\hat{\sigma}^2_D/\hat{\sigma}^2_M \fallingdotseq (0.18/0.13)^2 \fallingdotseq 1.9$，また，$F$ 分布表より $F_{0.01}(399, 399) \fallingdotseq 1.3$，従って両者の分散の差は高度に有意であるといえる。$m=100$ の場合は第 2 図より $\hat{\sigma}^2_D/\hat{\sigma}^2_M \fallingdotseq (0.14/0.09)^2 \fallingdotseq 2.4$，$F_{0.01}(199, 199) \fallingdotseq 1.4$，従ってこの場合も両者の差は高度に有意である。

以上のことから (5) 式等により b の値を求める方法は，結果が一義的に決まり，かつ (少なくとも地震の総数が 50〜100 程度のときは)，精度がよいことがわかった。

---

6) 前出 1).

6. A Method for Determining the Value of b in a Formula $\log n=a-bM$ showing the Magnitude-Frequency Relation for Earthquakes

By Tokuji UTSU

(Department of Geophysics, Faculty of Science, Hokkaido University)

It is generally accepted that the frequency distribution of magnitudes of earthquakes is expressed by Gutenberg-Richter's formula

$$\log n(M) = a-bM.$$

The coefficient b in this formula is regarded as one of the important parameters representing the nature of the occurrence of earthquakes concerned.

If the earthquakes concerned are arranged in order of magnitude and the magnitude of the i-th earthquake is denoted by M_i, the value of b can be calculated by the following simple equation with high accuracy,

$$b = \frac{0.4343m}{\sum_{i=1}^{m} M_i - mM_m}$$

where m is the total number of earthquakes and M_m is the smallest magnitude.

The accuracy of this method has been compared with several conventional methods (e.g. the method of least squares) using Monte Carlo method, and it has been found that this method is superior to the other methods in the case of $m=50\sim100$ at least.