



Title	4. 地震の規模別度数分布に関連する諸問題 (II)
Author(s)	宇津, 徳治; UTSU, Tokuji
Citation	北海道大学地球物理学研究報告, 18, 53-69
Issue Date	1967-08-10
DOI	https://doi.org/10.14943/gbhu.18.53
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/13930
Type	departmental bulletin paper
File Information	18_p53-69.pdf



4. 地震の規模別度数分布に関連する諸問題 (II)

宇津徳治

(北海道大学理学部地球物理学教室)

—昭和42年4月受理—

VI. 分布関数 $\log n(M) = a - bM$ の性質

ここでは地震のマグニチュードは分布関数が第I章の(1)式, すなわち $\log n(M) = a - bM$ の形で表わされる母集団からランダムに抽出された標本であると考える。この式からマグニチュードが M 以上の地震の数 $N(M)$ は

$$\log N(M) = a' - bM, \quad (26)$$

ただし

$$a' = a - \log(b \ln 10) \quad (27)$$

で表わされるが, (26)において $N(M)$ がちょうど ν ($\nu=1, 2, \dots$) になる M を M_ν^* で表わすことにする。すなわち

$$M_\nu^* = M_1^* - (\log \nu / b), \quad (28)$$

$$M_1^* = a' / b \quad (29)$$

とする。このとき(26)は

$$\log N(M) = b(M_1^* - M) \quad (30)$$

となる。 bM_1^* は $M=0$ 以上の地震の総数の対数に等しい。

ある地震群の ν 番目の大きさの地震のマグニチュード M_ν は必ずしも M_ν^* とは一致しない。しかし M_ν^* が M_ν の分布のモードになることは後に示される。なお, マグニチュード M_q から M_r ($M_r > M_q$) までの地震の数は

$$\bar{n} = N(M_q) - N(M_r) = 10^{a'} (10^{-bM_q} - 10^{-bM_r}) \quad (31)$$

を平均値とする POISSON 分布に従うから, その数が n となる確率は

$$p_n(n) = \bar{n}^n e^{-\bar{n}} / n! \quad (32)$$

となる。

いま, マグニチュード M_s 以上の地震だけに着目すると, 一つの地震のマグニチュードが M から $M+dM$ の間の値をとる確率は

$$\begin{aligned} p(M) dM &= b \ln 10 \cdot 10^{-b(M-M_s)} dM, & (M \geq M_s) \\ p(M) dM &= 0 & (M < M_s) \end{aligned} \quad (33)$$

となるが,

$$y = 1 - 10^{-b(M-M_s)} \quad (34)$$

よって変数を M から y に変換すれば (33) は

$$\begin{aligned} p(y) dy &= dy, & (0 \leq y \leq 1) \\ p(y) dy &= 0 & (y < 0, y > 1) \end{aligned} \quad (35)$$

という一様分布になり、取扱いが易しくなる。

ある地震群に属する地震のうち n 番目の大きさの地震のマグニチュードが M_n と $M_n + dM_n$ の間の値をとる確率 $g_n(M_n) dM_n$ を求めてみよう。 n 番目の地震の y が y_n と $y_n + dy_n$ の間に入る確率 $g_n(y_n) dy_n$ は、 n 個の地震の y が y_n と 1 の間に入る確率 $h_1(y_n)$ と、この n 個の地震のうち 1 個が y_n と $y_n + dy_n$ の間に入る確率 $h_2(y_n) dy_n$ の積である。ここで

$$h_1(y_n) = \lambda^n e^{-\lambda} / n! \quad (36)$$

ただし

$$\lambda = s(1 - y_n) = n 10^{-b(M_n - M_n^*)} \quad (37)$$

で s は M_s 以上の地震の総数である。また、

$$h_2(y_n) dy_n = \{n/(1 - y_n)\} dy_n, \quad (38)$$

従って、 $g_n(y_n) dy_n = h_1(y_n) h_2(y_n) dy_n$ から

$$g_n(M_n) dM_n = \frac{b \ln 10}{(n-1)!} \left\{ n 10^{-b(M_n - M_n^*)} \right\}^n \exp \left\{ -n 10^{-b(M_n - M_n^*)} \right\} dM_n \quad (39)$$

が得られる。また (37) の λ を変数にとれば

$$g_n(\lambda) d\lambda = \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda} d\lambda \quad (40)$$

というガンマ分布の式が得られる。

$$E[\lambda] = n^{75)} \quad (41)$$

であるからこれに対応する M_n は M_n^* となる。ただし $E[M_n]$ は M_n^* ではない。しかし $g_n(M_n)$ は $M_n = M_n^*$ で極大となることは (39) から容易に示される。

$g_n(M_n)$ の累積分布は

$$G_n(M_n) = \int_{-\infty}^{M_n} g_n(M_n) dM_n = \int_{\lambda}^{\infty} g_n(\lambda) d\lambda = \frac{\Gamma(n, \lambda)}{\Gamma(n)}, \quad (42)$$

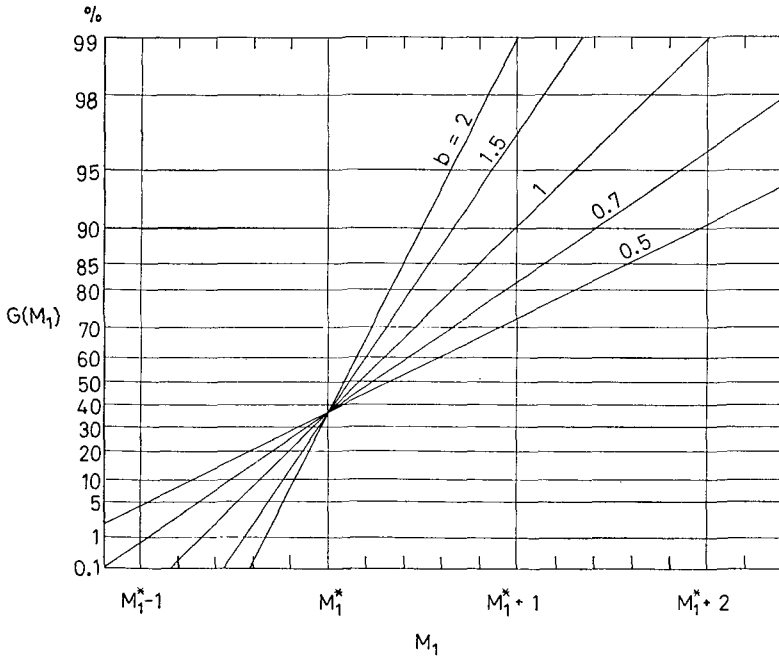
ただし $\Gamma(n, \lambda)$ は第 2 種不完全ガンマ関数である。

とくに最大の地震のマグニチュード M_1 については

$$G_1(M_1) = e^{-\lambda} = \exp \{ -10^{-b(M_1 - M_1^*)} \}, \quad (43)$$

$$\log(-\log G_1(M_1)) = -b(M_1 - M_1^*) - \log(\ln 10). \quad (44)$$

75) 確率変数 λ の期待値 (平均値) を $E[\lambda]$ で表わすことにする。

第9図 $G_1(M_1)$ のグラフFig. 9. Graph of $G_1(M_1)$.

これは EPSTEIN-LOMNITZ⁷⁶⁾ の式と同等である。第9図は種々の b に対する $G_1(M_1)$ のグラフを示したものである。 $M_1 = M_1^*$ で $G_1(M_1) = 1/e \approx 0.368$ になるから、 $M_1 > M_1^*$ となる確率は、 $M_1 < M_1^*$ となる確率の約 1.7 倍となる。 b が 1 程度よりも小さいときは M_1 が $M_1^* + 1$ を超える確率もかなり大きく $b=1$ のとき約 10%、 $b=0.7$ のとき約 18% となる。

次に l 番目の大きさの地震のマグニチュードが M_l と $M_l + dM_l$ の間、かつ m 番の大きさの地震のマグニチュードが M_m と $M_m + dM_m$ の間の値をとる確率 $g_{lm}(M_l, M_m) dM_l dM_m$ を求めてみよう。これはすでに求めた $g_l(M_l) dM_l$ と、 $(m-l)$ 個の地震のマグニチュードが M_m と M_l の間に入る確率 $h_3(M_l, M_m)$ と、この $(m-l)$ 個の地震のうちの 1 個が M_m と $M_m + dM_m$ の間に入る確率 $h_4(M_m) dM_m$ の積である。

$$h_3(y_l, y_m) = \lambda'^{m-l} e^{-\lambda'} / (m-l)!, \quad (45)$$

ただし

$$\lambda' = s(y_l - y_m) = l 10^{-bM_l^*} (10^{-bM_m} - 10^{-bM_l}) \quad (46)$$

で、また

$$h_4(y_m) dy_m = \{(m-l)/(y_l - y_m)\} dy_m = \frac{(m-l) b \ln 10 10^{-bM_m}}{10^{-bM_m} - 10^{-bM_l}} dM_m \quad (47)$$

であるから

76) B. EPSTEIN and C. LOMNITZ; A Model for the Occurrence of Large Earthquakes, Nature, 211 (1966), 954-955.

$$g_{lm}(M_l, M_m) dM_l dM_m = \frac{(b \ln 10)^2 l^m}{(l-1)!(m-l-1)!} 10^{-mb(M_l-M_m^*)} 10^{(m-l)b(M_l-M_m)} \\ \times \{1-10^{-b(M_l-M_m)}\}^{m-l-1} \exp\{-l10^{-b(M_m-M_l^*)}\} dM_l dM_m \quad (48)$$

が得られる。

$M_l - M_m$ が x と $x+dx$ の間の値をとる確率 $q_{lm}(x) dx$ は前式において $M_l - M_m = x$ とおき M_l について $-\infty$ から ∞ まで積分すれば得られる。

$$q_{lm}(x) dx = \frac{b \ln 10 (m-1)!}{(l-1)!(m-l-1)!} 10^{-lbx} (1-10^{-bx})^{m-l-1} dx, \quad (49)$$

これは $z=1-10^{-bx}$ とおくと z についてベータ分布となる。

$$E[z^r] = \frac{(m-1)!(m+r-l-1)!}{(m-l-1)!(m+r-1)!} \quad (50)$$

であるから z の平均値は

$$E[z] = 1-l/m \quad (51)$$

でこれに対応する x は $x = \log(m/l)/b$ である。平均値の周りの分散は

$$\sigma^2 = E[z^2] - E[z]^2 = l(m-l)/m^2(m+1) \quad (52)$$

となる。

累積分布は

$$Q_{lm}(x) = \int_0^x q_{lm}(x) dx = B_{1-10^{-bx}}(m-l, l)/B(m-l, l) \quad (53)$$

でこの式の分子は不完全ベータ関数である。

(49) ないし (53) 式を利用して第 III 章 (22) 式により b の値を求める場合の精度を論ずることができるがここでは触れない。

一つの地震のマグニチュードが M と $M+dM$ の間の値をとる確率は (33) 式で与えられるが、 s 個の地震のマグニチュードの和 $\sum_{i=1}^s M_i$ の確率分布もモーメント母関数を用いて容易に求めることができる⁷⁷⁾。その結果から、 b の値を求めるとき公式 (23) を用いた場合、その精度を知ることができる。(23) 式によって求めた値を b 、母集団の値を b_0 と改めて書けば

$$\chi^2 = 2s b_0/b \quad (54)$$

は自由度

$$\phi = 2s \quad (55)$$

の χ^2 分布に従うことが証明できるからである。

(23) 式によって b の値を求めたときには、二つの地震群 A, B についての値 b_A と b_B に有意な差があるか否かの統計的検定を第 III 章 3.8 節に述べた方法よりもさらに厳密に行なうことができる。それは

77) 宇津徳治；二つの地震群に対する b 値の違いの有意性の検定，地震 (ii)，20 (1967)，54-56。

$$F = \frac{\chi_A^2 / \phi_A}{\chi_B^2 / \phi_B} = b_A b_{0B} / b_B b_{0A} \quad (56)$$

が F 分布に従うことから、仮説 $b_{0A} = b_{0B}$ を検定するには、 b_B / b_A ($b_A < b_B$ とする) が自由度 ϕ_A, ϕ_B の F 分布表の値 (5%, 1% 等) より大きいかな否かによって仮説を棄却できるかな否かを決めればよい。 F 分布表はたいいていの統計学の教科書に載っているが、たとえば森口繁一「初等数理統計学」(培風館)の付表などが便利であろう。

従来二つの地震群の b または m の値に有意な差があるかな否かの統計的検定は、二つの回帰係数の差を t 分布を用いて検定する方法が利用されていた⁷⁸⁾。この方法は種々の M または A の区間に対する $\log n(M) \Delta M$ または $\log n(A) \Delta A$ の変動が同じ分散の正規分布に従うという仮定のもとに成立つものである。しかしここに述べた b_B / b_A を F 表と比べる方法は、そのような仮定はまったく入っていないし、計算も極めて簡単である。

VII. 地震のエネルギーの分配

地震のエネルギー E とマグニチュード M との関係は

$$\log E = \alpha + \beta M \quad (57)$$

という形で表わされるのがふつうで、定数 α, β は GUTENBERG と RICHTER⁷⁹⁾ によれば、 M として表面波によるマグニチュードを用い、 E の単位を erg とすれば、 $\alpha = 11.8, \beta = 1.5$ になる。この式と (1) 式から、エネルギーが $E - \frac{1}{2} \Delta E$ と $E + \frac{1}{2} \Delta E$ の間の地震の数を $n(E) \Delta E$ とすれば

$$n(E) = c E^{-(b/\beta)-1}, \quad (58)$$

$$c = 10^{\alpha + \alpha b/\beta} / \beta \ln 10, \quad (59)$$

エネルギーが E 以上の地震の数 $N(E)$ は

$$N(E) = C E^{-b/\beta}, \quad (60)$$

$$C = c\beta/b \quad (61)$$

となる。エネルギーの分布が E^{-u} という形になることは和達⁸⁰⁾ が述べている。

(28) 式で定義した M_1^* に対応するエネルギーを E_1^* とすれば

$$E_1^* = \nu^{-\beta/b} E_1^*, \quad (62)$$

$$\log E_1^* = \alpha + \alpha' \beta/b \quad (63)$$

が成立つ。また (60) は

⁷⁸⁾ たとえば Z. SUZUKI; A Statistical Study on the Occurrence of Small Earthquakes II, Sci. Rep. Tôhoku Univ. Ser. 5, Geophys., 6 (1955), 105-118.

佐久間修三; 火山地域に起る地震の最大振幅の度数分布, 北大地球物理学研究報告, 6 (1958), 1-7.
S. MIYAMURA; A Note on Fennoscandian Seismicity, Geophysica, 7 (1962), No. 4, 1-12.

⁷⁹⁾ B. GUTENBERG and C. F. RICHTER; 前出 28).

⁸⁰⁾ 和達清夫; 地震回数分布に就いて, 気象集誌 (ii), 10 (1932), 559-568.

$$N(E) = (E/E_1^*)^{-b/\beta} \quad (64)$$

となる。

エネルギーが E_s 以上の地震だけに着目するときは、一つの地震のエネルギーが E と $E+dE$ の間の値をとる確率は

$$\begin{aligned} p(E) dE &= \frac{b}{\beta} \left(\frac{E}{E_s} \right)^{-(b/\beta)-1} \frac{dE}{E_s}, & (E \geq E_s) \\ p(E) dE &= 0, & (E < E_s) \end{aligned} \quad (65)$$

となるが、ふつうは $\beta > b$ であるから、 $E[E]$ は ∞ になってしまう。

n 番目の大きさの地震のエネルギーが E_n と E_n+dE_n の間の値をとる確率 $g_n(E_n) dE_n$ は (39) から

$$g_n(E_n) dE_n = \frac{b}{\beta(n-1)!} \left\{ n \left(\frac{E_n}{E_n^*} \right)^{-b/\beta} \right\}^n \exp \left\{ -n \left(\frac{E_n}{E_n^*} \right)^{-b/\beta} \right\} \frac{dE_n}{E_n}, \quad (66)$$

また E_n の平均値は

$$E[E_n] = \left\{ \Gamma \left(n - \frac{\beta}{b} \right) / \Gamma(n) \right\} E_1^* \quad (67)$$

であるがこの式は $\beta/b > 1$ すなわち $\beta > b$ ならば $n \geq 2$ に対して成立する。なお

$$\Gamma \left(n - \frac{\beta}{b} \right) / \Gamma(n) \rightarrow n^{-\beta/b} \quad (n \rightarrow \infty) \quad (68)$$

であるから (62) と比べて

$$E[E_n] \rightarrow E_n^* \quad (n \rightarrow \infty) \quad (69)$$

を得る。

最大の地震のエネルギーが E_1 である地震群を考える。このとき n 番目の大きさの地震のエネルギーが E_n と E_n+dE_n の間の値をとる確率は

$$g_{1n}(E_1, E_n) dE_n = \frac{b(n-1)}{\beta} \left\{ 1 - \left(\frac{E_n}{E_1} \right)^{b/\beta} \right\}^{n-2} \left(\frac{E_n}{E_1} \right)^{(b/\beta)-1} \frac{dE_n}{E_1} \quad (70)$$

であるから、 n 番目の地震の平均エネルギーは

$$\bar{E}_n = \int_0^{E_1} E_n g_{1n}(E_1, E_n) dE_n = (\beta/b) B(\beta/b, n) E_1 \quad (71)$$

となる。

地震のエネルギーの度数分布が (57) 式で表わされるとすると、全エネルギー $E_T = \sum_{i=1}^{\infty} E_i$ の期待値 $E[E_T]$ は $\int_0^{\infty} E n(E) dE$ であるが、積分を 0 から E_x までと E_x から ∞ までに分けて考えると (E_x は任意の正数)、 $\beta > b$ のとき前者は

$$\int_0^{E_x} E n(E) dE = \frac{b}{\beta-b} E_x N(E_x) \quad (72)$$

であるが、後者は ∞ になってしまう。しかし実際の地震群については、 E_x 以上の地震の全エネルギーも有限の値であり、全エネルギー E_T はある分布 $f(E_T)$ に従っているはずである。た

だしその分布も $E[E_T] = \int_0^{\infty} E_T f(E_T) dE_T$ が ∞ となるようなものであろう。

いまエネルギーが E 以上の地震の総数が (60) 式で表わされるものの λ 倍になるような分布

$$N(E) = \lambda C E^{-b/\beta} \quad (73)$$

を母分布とする地震群を考える。この式は $E' = \lambda^{b/\beta} E$ とおけば $N(E') = C E'^{-b/\beta}$ となり、(60) とまったく同じ形となる。すなわち総数を λ 倍したときはエネルギーの単位を $\lambda^{b/\beta}$ 倍すればエネルギーの分布についてのすべてのことは元の場合と変わらない。

全エネルギー E_T の分布 $f(E_T)$ の関数形を解析的に求めることは困難と思われるが、一定の大きさ以上の地震の総数を λ 倍すれば、 $f(E_T)$ が極大となる E_T の値 (E_T のモード) をはじめ、 E_T が E_a 以下となる確率が α であるような E_a の値等もすべて $\lambda^{b/\beta}$ 倍になる⁸¹⁾。

地震群の全エネルギーの目安として $\sum_{i=1}^{\infty} E_i^*$ を考えればこれは (62) から

$$\sum_{i=1}^{\infty} E_i^* = \zeta(\beta/b) E_1^* \quad (74)$$

となるから、たとえば $\beta/b=1.5$ とすれば、 E_1^* は $\sum_{i=1}^{\infty} E_i^*$ の 38% を占めることになる。またも

し $\sum_{i=1}^{\infty} \bar{E}_i$ を考えればこれは (71) から

$$\sum_{i=1}^{\infty} \bar{E}_i = \frac{\beta}{\beta-b} E_1 \quad (75)$$

となるから $\beta/b=1.5$ のときは E_1 は $\sum_{i=1}^{\infty} \bar{E}_i$ の 33% を占めることになる。実際は E_1 の全エネルギーに対する比率は地震群ごとに大きく変動するが、最大の地震およびこれに続く数個の大きな地震によってエネルギーの大部分が受持たれている場合がほとんどである⁸¹⁾。

地震が地球内のある部分に蓄積した歪エネルギーの解放によるものと考え、地震のエネルギーの平方根 \sqrt{E} が歪に比例することから、一つの地震系列について \sqrt{E} を積算したものを時間に対してプロットし、いわゆる“strain release curve”を描くことが行なわれている⁸²⁾。この

81) T. UTSU and T. HIROTA; Statistical Nature of the Energy Release in Earthquake Sequence, in preparation.

82) たとえば H. BENIOFF; Seismic Evidence for the Fault Origin of Oceanic Deeps, Bull. Geol. Soc. Am., 60 (1949), 1837-1856.

H. BENIOFF; Earthquakes and Rock Creep (Part I), Bull. Seism. Soc. Am., 41 (1951), 31-62.

H. BENIOFF; Global Strain Accumulation and Release as Revealed by Great Earthquakes, Bull. Geol. Soc. Am., 62 (1951), 331-338.

H. BENIOFF; Orogenesis and Deep Crustal Structure—Additional Evidence from Seismology, Bull. Geol. Soc. Am., 65 (1954), 385-400.

H. WATANABE; On the Sequence of Earthquakes, Spec. Contributions, Geophys. Inst. Kyoto Univ. No. 4 (1964), 153-192.

M. BATH and S. I. DUDA; Earthquake Volume, Fault Plane Area, Seismic Energy, Strain, Deformation, and Related Quantities, Ann. Geofis., 17 (1964), 353-368.

F. PRESS and D. JACKSON; Alaskan Earthquake, 27 March 1964: Vertical Extent of Faulting and Elastic Strain Release, Science, 147 (1965), 867-868.

R. K. S. CHOUHAN; Regional Strain Release Characteristics for Indian Regions, Bull. Seism. Soc. Am., 56 (1966), 749-754.

G. H. SUTTON *et al*; 前出 55), M. BATH *et al*; 前出 56), S. I. DUDA; 前出 57), 73), C. W. STOVER; 前出 63), A. S. FURUMOTO; 前出 64), V. KÁRNÍK; 前出 65), C. R. Allen *et al*; 前出 66), C. F. RICHTER *et al*; 前出 69).

場合ある一定の大きさ以上の地震だけを扱ひその大きさ以下の地震は無視している。しかしある期間中に起った地震について \sqrt{E} を積算したものの期待値は $\int_0^{\infty} \sqrt{E} n(\sqrt{E}) d\sqrt{E}$ であり、この積分は 0 から $\sqrt{E_x}$ までと、 $\sqrt{E_x}$ から ∞ までとに分けて考えると、後者は $\beta < 2b$ のとき

$$\int_{\sqrt{E_x}}^{\infty} \sqrt{E} n(\sqrt{E}) d\sqrt{E} = \frac{b}{b-\beta/2} \sqrt{E_x} N(E_x) \quad (76)$$

であるが、前者は $\beta < 2b$ のときは ∞ になる。すなわち \sqrt{E} の積算は対象とする地震の大きさの下限を小さくとればとるほど際限なく大きくなってゆく。(76) 式にみられるようにエネルギー E_x 以上の地震についての \sqrt{E} の積算は平均的に見ればエネルギーが E_x 以上の地震の総数に比例する⁸³⁾。従っていわゆる strain release curve は実は一定の大きさ以上の地震の数の積算曲線と本質的には同じものである。ただ個々の strain release curve の形は対象とする地震の大きさの下限を大きくとるほど、少数の大きな地震のエネルギーの統計的変動が強調されてくるが、下限を小さくとればとるほど数の積算曲線と同じ形に近づいてゆくはずである⁸⁴⁾。

\sqrt{E} を算術的に加えることは MATUZAWA⁸⁵⁾ も述べているように物理的にも意味が明らかでないし、ここに述べたような数量的な困難もある。RIZNICHENKO⁸⁶⁾ は \sqrt{E} を算術的に加えるのとはやや異なる表現を述べているが、その理由は必ずしも自明ではない。

VIII. 追加事項

8.1 地震の総数と b の値

b の値がそれを決めるのに用いた地震の総数が多いときほど大きく求まる傾向があることが Tsuboi⁸⁷⁾ によって指摘されている。Tsuboi⁸⁸⁾ はこの事実に合うように (1) 式に代るマグニチュードの分布式を提案した。この考えによれば同じ地域の地震でも対象とする期間を長くとるほど b の値は大きくなるわけで、二つの地震群の b の値を比較する場合、用いた期間、マグニチュードの下限等が異なればそのまま比較しても (何等から補正ができれば別であるが) 意味がないことになる。TAMAKI⁸⁹⁾ は Tsuboi の指摘した関係の統計的な説明を行なっている。

第 III 章 3.4 で述べたように普通の最小 2 乗法により決めた b の値はデータの数が少ない

83) 類似の考えが次の論文に示されている。

C. LOMNITZ; Statistical Prediction of Earthquakes, Rev. Geophys. 4 (1966), 377-393.

84) T. UTSU and T. HIROTA; 前出 81).

85) T. MATUZAWA; Study of Earthquakes (1964), Chapt. XI, Uno-Shoten, Tokyo.

86) YU. V. RIZNICHENKO; 前出 7).

YU. V. RIZNICHENKO; Interpretation of the Earthquake Frequency Law in Terms of Energy, Bull. (IZV.) Acad. Sci. USSR, Phys. Solid Earth Ser., (1965), No. 10, 7-16.

87) C. Tsuboi; 前出 14).

88) C. Tsuboi; A New Formula Connecting Magnitude and Number of Earthquakes, J. Phys. Earth, 6 (1958), 51-55.

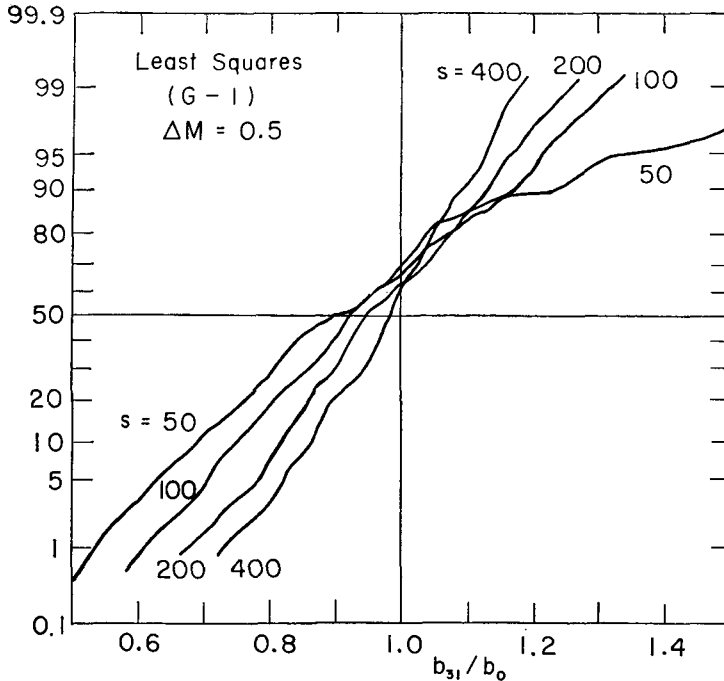
89) I. TAMAKI; A Warning against the Use of Formula $\log N = a + b(8 - M)$, Geophysical Papers Dedicated to Prof. K. Sassa (1963), 555-566.

ときほど系統的に小さく決まる。この場合は母集団の b 値は同じであるが、決め方に問題があるので、見かけ上 b の値がデータの数に関係しているようになったわけで、別の方法、たとえば DEMING の最小 2 乗法や、(23) 式による方法などによれば、データの数によって b の値が系統的に偏ることは起らない。

TSUBOI は日本付近の地震について 1931 年から期間を 1 年ずつ延ばして b の値の変動を調べているが、同じデータを用いて (23) 式により b の値を求めてみると、 b の値と期間の長さとは特に関係が認められなかった。従って b の値と地震の総数の間に関係があるように見えるのは b の値の決定方法に関連した見かけのものであろうと思われる。

8.2 ΔM と b の値

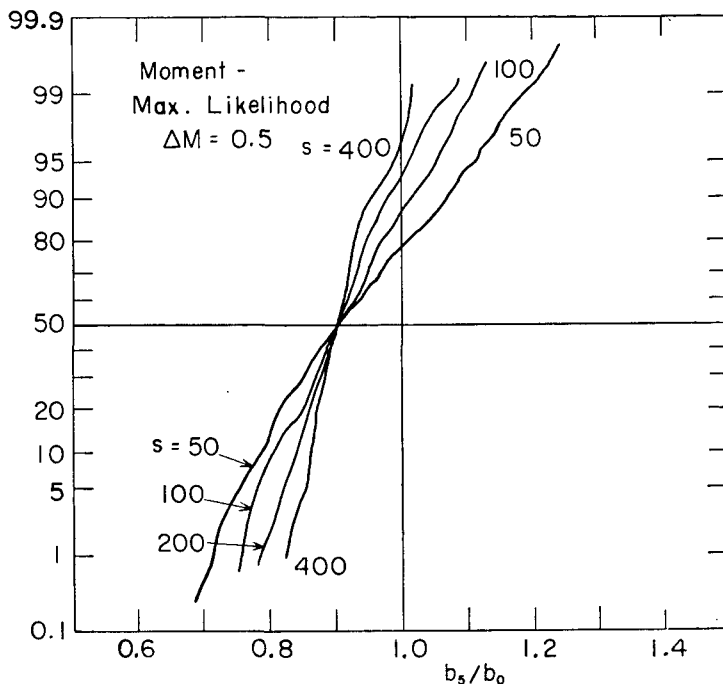
マグニチュードは 0.1 ごとに与えられるのが普通であるが、1/4 または 1/2 ごとの場合もある。このとき b の値がこの区間の幅 ΔM に影響され ΔM が大きいほど b の値も大きく求まる傾向がある (石本飯田の式の場合、 ΔA が大きいほど m の値が大きく求まる) ことが注意されている⁹⁰⁾。第 III 章では $\Delta M=0.1$ として種々の方法によって求められた b の値の精度を比較したが、ここでは同じデータを用い、 $\Delta M=0.5$ の場合、最小 2 乗法及び (23) 式による方法で決めた b の値の分布を求めてみた。最小 2 乗法は普通のもので、 $n(M)\Delta M=0$ となる直前の区間ま



第 10 図 b_{31}/b_0 ($\Delta M=0.5$) の累積度数 (%) を正規確率紙上にプロットしたもの

Fig. 10. Cumulative frequency of b_{31}/b_0 plotted on probability paper.

90) たとえば 神村三郎; 石本・飯田の統計式における最大振幅指数について, 地震 (ii), 7 (1954), 145-150. Z. SUZUKI; 前出 30).



第11図 b_s/b_0 ($\Delta M=0.5$) の累積度数 (%) を正規確率紙上にプロットしたもの
 Fig. 11. Cumulative frequency of b_s/b_0 plotted on probability paper.

でのデータを使用した。結果を第 III 章の各図と同じ形式で示したものが第 10 図と第 11 図である。これをそれぞれ第 4 図 (上), 第 6 図と比べてみると次のことがわかる。

最小 2 乗法で決めた b の値は地震の総数 s が小さいほど小さく求まる傾向がやはり認められる。精度は $s=50$ のときは $\Delta M=0.1$ の場合よりも改善されるが, $s=100\sim 200$ のときはほとんど差がなく, $s=400$ のときは悪くなっている。 $\Delta M=0.5$ の場合のほうが $\Delta M=0.1$ の場合よりも b の値が系統的に大きく求まる傾向はほとんど認められない。

(23) 式による方法で著るしいことは, $\Delta M=0.5$ の場合 b の値が系統的に小さく求まることと, 精度が $\Delta M=0.1$ の場合よりさらに向上するように見えるということである。従って $\Delta M=0.5$ とした場合は得られた b の値に若干の補正をする必要がある。次にその補正を求め, また精度がよくなった理由を考えてみよう。

いまマグニチュード M_0 以上の地震を考え, $M'=M-M_0$ によってマグニチュード M を M' に変換すると, 一つの地震の M' が $j\Delta M$ と $(j+1)\Delta M$ の間の値をとる確率は

$$p_j = (1-10^{-b\Delta M}) 10^{-b\Delta M_j} \quad (j=0, 1, 2, \dots) \quad (77)$$

であるから, M' の平均値は

$$\mu_1 = \sum_{j=0}^{\infty} p_j \left(j + \frac{1}{2} \right) \Delta M = \left(\frac{10^{-b\Delta M}}{1-10^{-b\Delta M}} + \frac{1}{2} \right) \Delta M \quad (78)$$

となり, 分散は

$$\mu_2 = \sum_{j=0}^{\infty} p_j \left(j + \frac{1}{2} \right)^2 \Delta M^2 - \mu_1^2 = \frac{10^{-b\Delta M} \Delta M^2}{(1-10^{-b\Delta M})^2} \quad (79)$$

となる。従って s 個の地震のマグニチュードの和 $\sum_{i=1}^s M_i (= \sum M_i - sM_0)$ の平均値と分散は s が充分大きい場合は、中心極限定理により、それぞれ $s\mu_1$ および $s\mu_2$ となる⁹¹⁾。

(23) 式すなわち $b = s \log e / \sum M'_i$ によって求めた b の平均値 (正しくは $\sum M'_i$ の平均値に対応する b) は

$$\bar{b} = s \log e / s\mu_1 = b/\eta, \quad (80)$$

ただし

$$\eta = \left(\frac{10^{-b\Delta M}}{1-10^{-b\Delta M}} + \frac{1}{2} \right) b\Delta M / \log e \quad (81)$$

で η は $b\Delta M$ だけの関数である。第3表にはいくつかの $b\Delta M$ について η と $1/\eta$ の値を示した。 $b\Delta M$ が 0.2~0.3 以上のときは偏りのない b 値にするため η を掛ける必要がある。 $b\Delta M$ が 0.2 未満のときは補正は不要であろう。 $b\Delta M=0.5$ のときの $1/\eta$ は 0.903 でこれは第11図に現われている 50% 点の偏り 0.90 強とよく一致する。

第 3 表

Table 3.

$b\Delta M$	η	$1/\eta$	ζ	$\sqrt{\zeta}$	$b\Delta M$	η	$1/\eta$	ζ	$\sqrt{\zeta}$
0.0	1.000	1.000	1.000	1.000	0.6	1.154	0.866	0.642	0.800
0.1	1.004	0.996	0.987	0.993	0.7	1.208	0.828	0.555	0.745
0.2	1.017	0.983	0.949	0.974	0.8	1.268	0.789	0.472	0.687
0.3	1.039	0.962	0.889	0.943	0.9	1.344	0.744	0.406	0.637
0.4	1.070	0.935	0.814	0.902	1.0	1.407	0.706	0.331	0.575
0.5	1.108	0.903	0.730	0.854					

次に (23) 式から求めた b の値の分散は近似的に

$$v = s\mu_2 / (s\mu_1)^2 = \zeta / s \quad (82)$$

ただし

$$\zeta = \frac{4 \cdot 10^{-b\Delta M}}{(1+10^{-b\Delta M})^2} \quad (83)$$

で ζ は $b\Delta M$ だけの関数である。第3表にはいくつかの $b\Delta M$ について ζ の値を示した。第11図に見られるように $b\Delta M=0.5$ のときは第6図の $b\Delta M=0.1$ のときに比べて標準偏差が 0.8~0.85 倍程度になっているが、これは第3表の $b\Delta M=0.5$ と、0.1 に対する $\sqrt{\zeta}$ の比とほぼ一致する。

ΔM を大きくとるほうが精度がよくなるように見えるが、同時に b の値が系統的に小さく求まる傾向が著しくなる。これに対する補正は (80) 式によって行なえばよいが、補正した後

91) 実は s が大きくなくとも $\sum M'_i$ の平均値と分散は $s\mu_1, s\mu_2$ となることが証明できる。

では b の値の分散は η^2 倍になるから精度は下がる。しかし第3表からわかるように $\sqrt{\xi}/\eta$ は1を超えず $b\Delta M$ とともに小さくなるからやはり ΔM が大きいほど精度はややよくなるように見える。しかしこの補正係数 η の中に含まれる b は母集団の b の値であるから実際には不明である。これをその推定値で代用すればその誤差のため補正係数にも誤差が生じる。このため補正後の b の値の精度は ΔM が大きいほどよいとはいえなくなる。

8.3 M に誤差がある場合

いままではマグニチュードの数値には誤差がないものとして議論を進めてきた。しかし観測データから決めたマグニチュードには種々の原因によるランダムな誤差が含まれていると考えるべきである(マグニチュードの決定方法自身に起因する系統的誤差は考えないことにする)。それがどの程度のものであるかは一概にはいえないが、たとえば標準偏差にして0.3前後の数値が示されている場合もある⁹²⁾。このような場合、 b の値またはその決定精度がどの様な影響を受けるかを考える。

仮定として一つの地震のマグニチュードの決定値が M' と $M'+dM'$ の間に入る確率はその正しい値を M とするとき、 $f(M-M')dM'$ という $M-M'$ だけの関数で表わされるものとする。すなわち誤差の分布は地震の大きさには依らないとする。 M の分布が $\log n(M) = a - bM$ で表わされるとき、 M' の分布は

$$\begin{aligned} n(M')dM' &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} n(M)f(M-M')dM \right) dM' \\ &= 10^a 10^{-bM'} dM' \int_{-\infty}^{\infty} 10^{-by} f(y) dy, \end{aligned} \quad (84)$$

ただし $y = M - M'$

であるから、

$$\log n(M') = a_1 - bM', \quad (85)$$

ただし $a_1 = a + \log c$, (86)

$$c = \int_{-\infty}^{\infty} 10^{-by} f(y) dy \quad (87)$$

となり元の分布法則と常数項をのぞいて変らない。もし $M-M'$ が標準偏差 σ の正規分布に従うものとすれば計算の結果

92) たとえば 坪井忠二; 前出 21).

M. BATH; The Problem of Earthquake Magnitude Determination, Publ. BCIS, Travaux Sci., 19 (1956), 5-63.

市川政治; 日本の各地震観測点における地震の規模 M の系統的な偏差について, 験震時報, 22 (1958), 179-186.

勝又 護; 深い地震の Magnitude を決める一方法, 地震 (ii), 17 (1964), 158-165.

M. ICHIKAWA and P. W. BASHAM; Variations in Short-period Records from Canadian Seismograph Stations, Can. J. Earth Sci., 2 (1965), 510-542.

$$\log c = \sigma^2 b^2 \ln 10/2 \quad (88)$$

が得られる。

従ってマグニチュードに誤差があっても、それがここに仮定した様なものであれば、 b の値が系統的に変ってくることはない。しかし、 b の値を求めるときにはある一定のマグニチュード M_s 以上の地震のデータに脱落があってはならないが、この下限 M_s はマグニチュードの誤差に大きく影響され、誤差が大きいほど下限を大きくとらざるを得なくなる。従ってデータの数は少なくなり、 b の精度は低下することになる。

8.4 $\log n(M)$ のプロットは上に凸になるか

観測されたマグニチュードまたは最大振幅について、 $\log n(M)$ を M に対してまたは $\log n(A)$ を $\log A$ に対してプロットした点は一直線に並ぶというよりもむしろやや上に凸の曲線状に並ぶことがしばしばあるといわれている。そのため GUTENBERG-RICHTER の式 (1) や石本-飯田の式 (2) とはやや異なる形の分布式を考えることも行なわれたが⁹³⁾、(1)、(2) 等を認めたらうで、上に凸になり易い理由を統計的に説明する試みもなされている⁹⁴⁾。しかし第 III 章で述べた乱数から作った 1025 組のマグニチュードの分布をプロットした図を通覧しても、上に凸のものが多い傾向は認められない。これは累積度数 $N(M)$ の対数をプロットしたものについてもいえる。

もし累積度数のプロットが上に凸になる傾向があるとすれば、第 III 章の (22) 式に $l=1$ 、 $s=m$ とおいて決めた b_2 を b_{1m} と書くとき、 b_{1m}/b_0 は 1 より大きくなり易いはずである。しかし第 VI 章の (53) 式を用いてその確率を計算してみると

$$Q_{1m}(\log m/b) = (1-1/m)^{m-1} \doteq 1/e \quad (m \gg 1) \quad (89)$$

で 1 より小さい。

以上のことからもし $\log n(M)$ 等のプロットが上に凸になり易いとすれば、それは地震の発生が本質的に (1) または (2) 式の分布法則からずれているか、プロットされたデータが不完全なためかであろう (たとえば比較的小さい地震の脱落、地震計の直線性の不良等)。 b の値の異なる二つ以上の地震群の組合せを考えても上に凸になる結果は出てこない。

8.5 余震のマグニチュードの分布について

筆者⁹⁵⁾の調査によれば、別の地震の余震または前震であると考えられる地震の全地震に対する比率は、マグニチュードが小さくなるほど高くなり、日本付近の浅い地震については、 $M7.5-7.9$ では 25% であるが、 $M5.5-5.9$ では 48% になる。この割合でふえてゆけばいわゆる微小地震の大部分は他の地震の余震または前震ということになる。

93) たとえば 友田好文; 地震統計とモデル, 地震 (ii), 8 (1956), 196-204.

94) Z. SUZUKI; 前出 30).

阿部 誉; 北海道の火山における地震観測 —1961 年—, 北大地球物理学研究報告, 10 (1963), 89-100.

95) 宇津徳治; 余震を考慮した場合の地震の規模別度数分布, 験震時報, 28 (1964), 129-136.

一つの地震の余震群についても (1) 式で表わされるマグニチュードの分布が成立していることが認められているが、この分布の中に本震が含まれないことは注目に値する。本震と最大余震のマグニチュードの差は非常にばらつきが大きい、その中間値 $\overline{M_0 - M_1}$ と本震のマグニチュード M_0 との間には、 $M_0 \geq 6$ のとき

$$\overline{M_0 - M_1} = 4.9 - 0.47 M_0 \quad (90)$$

という関係が存在する⁹⁶⁾。 $\overline{M_0 - M_1}$ は $M_0 8$ で 1.1, $M_0 6$ で 2.1 となる。一方 (1) 式が成立つ地震群については、最大の地震と 2 番目の大きさの地震のマグニチュードの差 $M_1 - M_2$ の中間値は (53) 式から $0.301/b$ であることがわかる。従って本震を余震群の中に入めるとそのマグニチュードは平均的にみて (53) 式から予想されるものよりも極めて大きいことになる。これは本震と余震の異質性を示しているものであろう。

余震等の二次的なものを除いた場合の地震のマグニチュードの分布は (1) 式で表わされるものとはだいぶ異なったものになるのではなからうかという考えがある⁹⁷⁾。この考えによれば $M 7 \sim 8$ 以上の地震のマグニチュードの分布は、一次的な地震の性質に強く支配されるが、 $M 5 \sim 6$ 以下の地震の分布はほとんど二次的地震の性質 (GUTENBERG-RICHTER の式 (1) が成立つ) に支配されるはずである。この場合地震のマグニチュードの分布の地域性なども、一次的なものと二次的なもので状況が違っても知れないし、一次的なものと二次的なものの割合 (余震活動の程度といってもよいであろう) の地域性が表わされているのかも知れない。これらの点については更に調査を進める必要がある。この際余震活動度が一般に極めて低い深発地震のマグニチュード分布⁹⁸⁾ が重要な意味をもつであろう。

IX. 結 論

以上 8 章にわたって記述した主な事柄を要約し、若干の注釈を加えれば次のとおりである。

(1) 与えられたマグニチュードのデータから (1) 式の b の値を求めるのには (23) 式による方法が簡単でかつ精度がよいので推奨される。この際マグニチュードの区間 ΔM は 0.1 (またはそれ以下) であることが望ましいが、 ΔM が 0.3 以上のときは第 VIII 章 8.2 節に述べたような補正を行なう必要がある。

(2) この方法で決められた二つの地震群に対する b の値の間に有意な差異があるといえるか否かの統計的検定法が示された。

(3) いろいろな地震群に対する b の値 (m の値) の相互比較は、同一の方法、基準でマ

96) T. UTSU; Characteristics of Aftershocks in Space, Time, and Magnitude, Proc. U. S. Japan Conference on Earthquake Prediction Problems, 1964, Appendix 26.

97) 宇津徳治; 前出 94).

C. LOMNITZ; Estimation Problems in Earthquake Series, Tectonophysics, 2 (1964), 193-203.

98) たとえば S. SUYEHRO; Deep Earthquakes in the Fiji Region, Papers Met. Geophys., 13 (1963), 216-238.

ニチュードが決められたもの(同一特性の地震計で振幅が測定されたもの)同志でない限り、一般には無理であろう。

(4) 日本付近の各地域の地震に対して気象庁の「主要地震の表」からのデータによって求めた b の値が数多く発表されているが、二、三のものを除きデータの採り方の検討が不十分であり、その b の値は信頼できない。

(5) GUTENBERG-RICHTER の “Seismicity of the Earth” に載っている世界各地の b の値は 0.45 から 1.8 まで広く散らばっているが、今回決め直したものは海洋地域でやや大きく、大陸内部の安定地域でやや小さくなる傾向はあるが、それほど著るしい差は現われていない。

(6) 普通の最小 2 乗法で b の値を求めると一般にデータの総数が少ないときほど、 b の値は小さく求まる傾向がある。(23) 式によればこのような傾向は現われない。 b の値が地震の総数に関係しているように見える場合は、 b の値の求め方による見かけのもので本質的なことではないであろう。

(7) $\log n(M)$ 対 M あるいは $\log n(A)$ 対 $\log A$ のプロットが上に凸の曲線状になる傾向があるといわれているが、これを統計的に説明することは困難であり、もしこの傾向が事実ならばそれは地震の発生法則が完全には (1) 式に従っていないためであろう(データの不完全性は無いものとして)。

(8) 地震のエネルギーの積算は物理的にも数量的にも有意義であるが、エネルギーの平方根の積算が strain release を表わすという考えは物理的にも数量的にも矛盾がある。

(9) 本論文の大部分は地震のマグニチュードの分布が (1) 式に従う母集団からのランダムな抽出の結果であるという考えに立っている。すべての地震現象をこのように考えてよいか否かは別問題であり、 b の値に有意の差が認められない 2 地域でも別の見地に立てば、マグニチュードの分布は異なっているということもあり得るかも知れない。

謝 辞 データ処理と製図の一部は屋代玲子氏の手をわずらわした。計算は北大計算センターの NEAC 2203 G によった。

4. Some Problems of the Frequency Distribution of Earthquakes in Respect to Magnitude (II)

By Tokuji UTSU

(Department of Geophysics, Faculty of Science, Hokkaido University)

If the magnitude of an earthquake can be regarded as a random sample from a population whose magnitude distribution is expressed by $\log n(M) = a - bM$, the probability that the magnitude of the n th largest earthquake takes a value between M_n and $M_n + dM_n$ is given by

$$g_n(M_n) dM_n = \frac{b \ln 10}{(n-1)!} \lambda^n e^{-\lambda} dM_n,$$

where

$$\lambda = n 10^{-b(M_n - M_n^*)},$$

and

$$bM_n^* = a - \log(nb \ln 10).$$

The cumulative distribution of $g_n(M_n)$ is

$$G_n(M_n) = \Gamma(n, \lambda) / \Gamma(n).$$

The probability that the magnitude difference between the l th and the m th largest earthquakes falls in the range between x and $x+dx$ is given by

$$q_{lm}(x) dx = \frac{b \ln 10 (m-1)!}{(l-1)! (m-l-1)!} 10^{-bx} (1 - 10^{-bx})^{m-l-1} dx.$$

Its cumulative form becomes

$$Q_{lm}(x) = B_{1-10^{-bx}(m-l), l} / B(m-l, l).$$

The distribution function of the b -value calculated from the formula

$$b = \frac{s \log e}{\sum M_i - sM_s} \quad (\text{Eq. (23) in Part 1})$$

can be obtained theoretically, and it is also shown that

$$\chi^2 = 2s b_0/b \quad (b_0: \text{value of } b \text{ in population})$$

is distributed by the χ^2 -distribution with $2s$ degrees of freedom.

The statistical test for the difference in b -value between two earthquake groups A and B can be made by comparing the ratio of the two b -values b_B/b_A (assuming $b_A < b_B$) with the F -statistic with $2s_A$ and $2s_B$ degrees of freedom at a prefixed confidence level.

The values of magnitude are sometimes given at intervals of $1/4$ or $1/2$ unit. In such cases the b -value calculated from Eq. (23) is systematically smaller than the value in population. The correction for this has been described (*cf.* Eq. (80), and Table 3).

The dependence of b -value estimated by the method of least squares on the total number of earthquakes may be apparent, whereas the b -value estimated by using Eq. (23) with above-mentioned correction do not deviate systematically from the value in population regardless of the total number of data.

The errors in magnitude determination do not bias the b -value if they are independent of the magnitude level, but they affect the accuracy of b -value in such a way that they increase the lower limit of magnitude above which the data are homogeneous.

It is said that $\log n(M)$ vs M plots shows more frequently an upward convex pattern than upward concave one. It seems difficult to explain this phenomenon on a purely statistical basis. It may be related to the nature of earthquake occurrence, provided that the plotted data are free from such defects as omissions of small earthquakes, non-linear characteristics of seismographs, etc.

Assuming the relation between magnitude and energy in the form of $\log E = \alpha + \beta M$, the distribution of the total energy of an earthquake group has been discussed. Several

largest earthquakes account for the greater part of the total energy of the group and the contributions from the minor earthquakes are very small despite their large numbers. On the other hand, the idea that the sum of the square roots of energies represents the strain release is not acceptable, because the sum is seriously affected by the lower limit of magnitude chosen for summation.

It may be important to make a special consideration of the magnitude-frequency distribution of aftershocks, since the aftershocks comprise a large percentage of all earthquakes for small-magnitude ranges. The idea that the magnitude distribution for primary earthquakes may differ from that for aftershocks must be examined on more observational data.