



Title	1. 1m深地温分布から地中の温度分布を推定する一方法について
Author(s)	浦上, 晃一; URAKAMI, Koichi
Citation	北海道大学地球物理学研究報告, 20, 1-13
Issue Date	1968-09-20
DOI	https://doi.org/10.14943/gbhu.20.1
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/13941
Type	departmental bulletin paper
File Information	20_p1-13.pdf



1. 1 m 深地温分布から地中の温度分布を推定する一方法について

浦上 晃 一

(北海道大学理学部地球物理学教室)

— 昭和 43 年 5 月 受理 —

I. はじめに

平坦な地表面においてニュートンの冷却が行なわれ、地表に平行な平面上に任意の温度分布を与えたときの定常な熱伝導方程式を解き、その解を用いて 1 m 深地温分布から任意の深さの平面上の温度分布を決定する方法を考えた。また、地表が一定温度に保たれている場合については川下の求めた解¹⁾を用いて同様の考察を行なった。

II. 熱伝導方程式の解

地中の熱の伝達は熱伝導のみによると考え、温度分布は定常状態にあるとし、媒質は均質、等方的であると仮定する。簡単のために二次元の問題として扱うが三次元への拡張は容易であらう。

地表に x -軸、垂直下方に y -軸をとれば点 (x, y) における温度 T はラプラスの方程式：

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

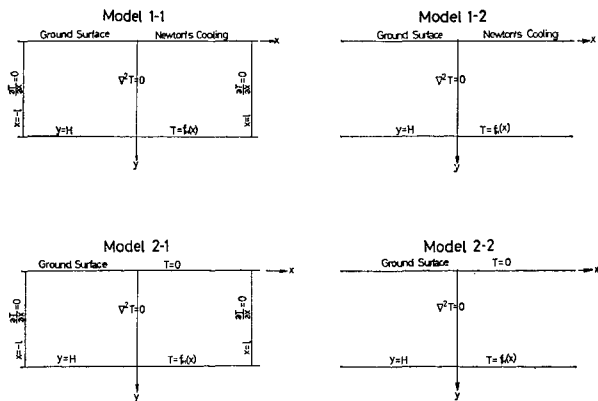
を満足する。

以下、第 1 図に示された 4 個の model について与えられた境界条件のもとで方程式 (1) を解く。

(1) Model 1-1

地表面ではニュートンの冷却法則に従って地中の熱が大気中に流れ、深さ H の温度分布が $f_H(x)$ 、また有限の所 $(x = \pm l)$ に断熱的な境界を置いた場合。

これらの境界条件は次のように表わされる。



第 1 図 簡単なモデル

Fig. 1. Simple models for the heat conduction in steady state, which are considered here.

1) 川下研介；熱伝導論，河出書房，159-161.

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = hT_{y=0} \quad (2)$$

ここで h は放熱係数であり、気温は 0°C とした。また $\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0}$, $T_{y=0}$ は直線 $y=0$ 上の $\frac{\partial T}{\partial y}$ 及び T の値を表わすものとする。以下同様の記号を用いる。

$$T_{y=H} = f_H(x) \quad (3)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=\pm l} = 0 \quad (4)$$

これらの境界条件を満たす方程式(1)の解を求めるため $f_H(x)$ の性質によって3個の場合に別ける。

a) $f_H(x)$ が奇関数のとき

ここに用いた方法では $x=\pm l$ における条件(4)を満たす解は求まらず、他の方法を用いなければならない。

b) $f_H(x) = T_0 = \text{const.}$ のとき

境界条件から T は y のみの関数となり、(1)は

$$\frac{d^2 T}{dy^2} = 0 \quad (5)$$

(2), (3), (4), (5) から温度分布は

$$T = \frac{hy+1}{hH+1} T_0 \quad (6)$$

となる。

c) $f_H(x)$ が偶関数のとき

$f_H(x)$ をフーリエ級数に展開すると、

$$f_H(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \alpha_n x \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f_H(\eta) \cos \alpha_n \eta d\eta = \frac{2}{l} \int_0^l f_H(\eta) \cos \alpha_n \eta d\eta \\ \alpha_n &= \frac{n\pi}{l} \quad (n=0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

いま、

$$T = \frac{hy+1}{hH+1} \cdot \frac{a_0}{2} + T_2 \quad (9)$$

とおけば、 T_2 は方程式：

$$\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2} = 0 \quad (1')$$

及び境界条件：

$$\left(\frac{\partial T_2}{\partial y}\right)_{y=0} = h(T_2)_{y=0} \quad (2')$$

$$(T_2)_{y=H} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \alpha_n x \quad (3')$$

$$\left(\frac{\partial T_2}{\partial x}\right)_{x=\pm l} = 0 \quad (4')$$

を満足する。

境界条件から明らかのように T_2 は x に関して偶関数であって、

$$\left. \begin{aligned} T_2 &= \sum_{n=1}^{\infty} (A_n e^{\alpha_n y} + B_n e^{-\alpha_n y}) \cos \alpha_n x \\ \alpha_n &= \frac{n\pi}{l} \quad (n=1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

とおけば方程式 (1') を満たす。 $y=H$ として (10) を (3') に代入すれば

$$\sum_{n=1}^{\infty} (A_n e^{\alpha_n H} + B_n e^{-\alpha_n H}) \cos \alpha_n x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \alpha_n x \quad (11)$$

任意の x に対して上式が成立するためには

$$A_n e^{\alpha_n H} + B_n e^{-\alpha_n H} = a_n \quad (12)$$

また、 $y=0$ における条件 (2') を満たすためには

$$(A_n - B_n) \alpha_n = h (A_n - B_n) \quad (13)$$

であれば良い。(11) と (12) から A_n, B_n を求めると、

$$\left. \begin{aligned} A_n &= \frac{2a_n(\alpha_n + h)}{\alpha_n \cos h \alpha_n H + h \sin h \alpha_n H} \\ B_n &= \frac{2a_n(\alpha_n - h)}{\alpha_n \cos h \alpha_n H + h \sin h \alpha_n H} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

したがって、

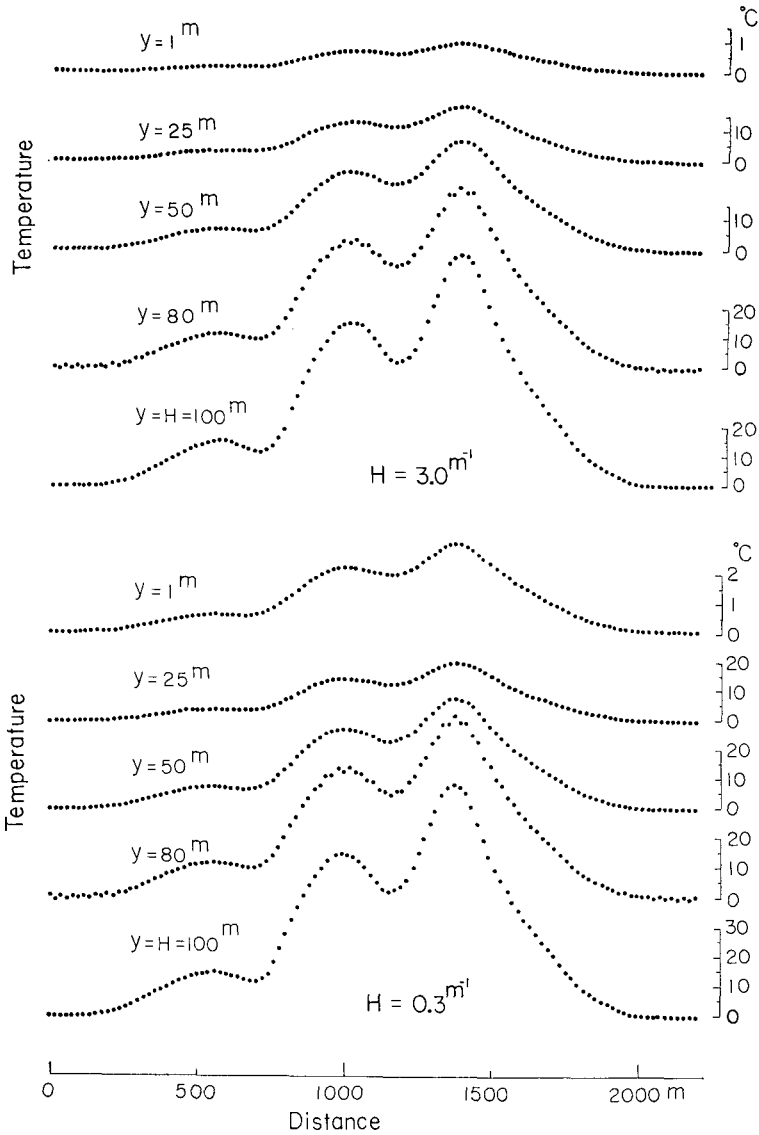
$$T_2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\alpha_n \cos h \alpha_n y + h \sin h \alpha_n y}{\alpha_n \cos h \alpha_n H + h \sin h \alpha_n H} \cos \alpha_n x \quad (15)$$

これは明らかに (4') を満足する。(7), (15) から

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{hy+1}{hH+1} \cdot \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\alpha_n \cos h \alpha_n y + h \sin h \alpha_n y}{\alpha_n \cos h \alpha_n H + h \sin h \alpha_n H} \cos \alpha_n x \\ a_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f_H(\eta) \cos \alpha_n \eta d\eta, \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{l}, \quad (n=0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

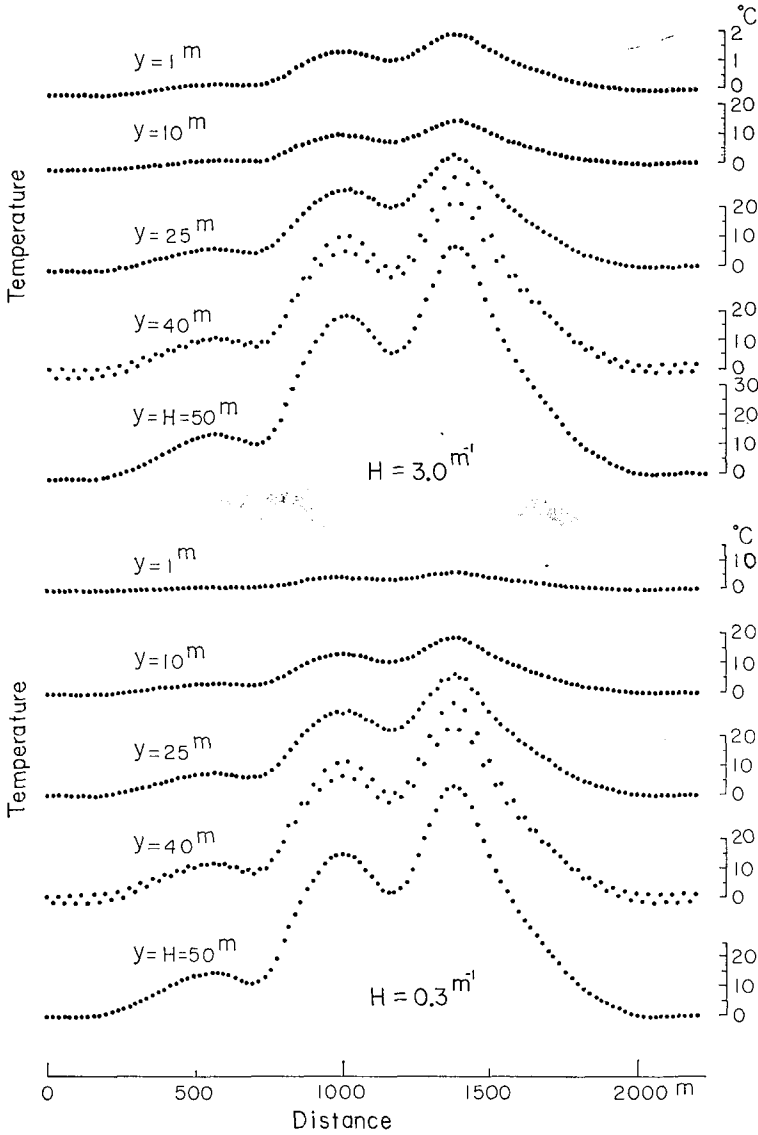
となる。

$y=H$ における温度分布 $f_H(x)$ を仮定して (16) を用いて計算した温度分布を第 2 図及び第 3 図に示す。第 2 図は $H=100\text{m}$ 、第 3 図は $H=50\text{m}$ であり、 $l=3,000\text{m}$ 、放熱係数 $h=3.0\text{ m}^{-1}$ 、 0.3 m^{-1} とした。 $f_H(x)$ の読み取り間隔を 20 m にしたため、和は 150 項までとった。第 3 図の



第2図 (16)式によって計算した温度分布 $H=100$ m のとき
 Fig. 2. Underground temperature calculated from (16). for $H=100$ m

深さ 40 m ($y=40$ m) の温度分布は変動が烈しく近似が不十分と思われる。第3, 4図から解るように各深さの温度分布の形は良く似ており、温度のスケールを適当に変えることによって他の分布とほとんど一致させることができる。これは主として仮定した温度分布に関係があり、 $x=\pm l$ においた断熱的な境界が温度分布に及ぼす影響を少なくするために $f_H(x)$ の両端に 0°C の部分を長く (それぞれ 500 m ずつ) したことによると考えられる。



第3図 (16)式によって計算した温度分布 $H=50\text{ m}$ のとき

Fig. 3. Underground temperature calculated from (16). for $H=50\text{ m}$

(2) Model 1-2

Model 1-1 で $l \rightarrow \infty$ とした場合で、地表面では Newton の冷却が行なわれ、深さ H の温度分布が $f_H(x)$ の場合。

境界条件は

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} &= h T_{y=0} \\ T_{y=H} &= f_H(x) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$\int_{-\infty}^{\infty} |f_H(x)| dx < \infty$ であれば $f_H(x)$ はフーリエ積分を用いて

$$f_H(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f_H(\eta) \cos \alpha (\eta - x) d\eta \tag{19}$$

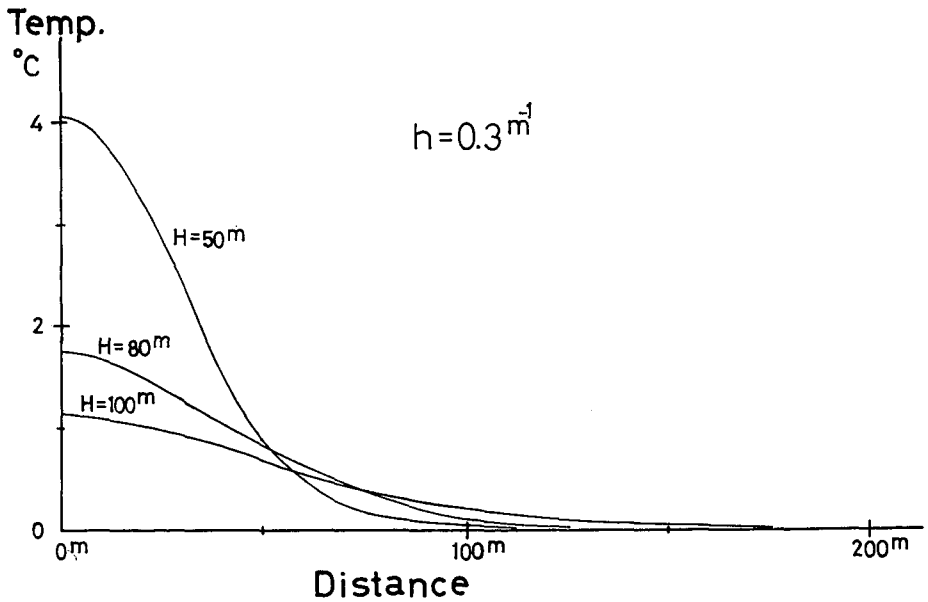
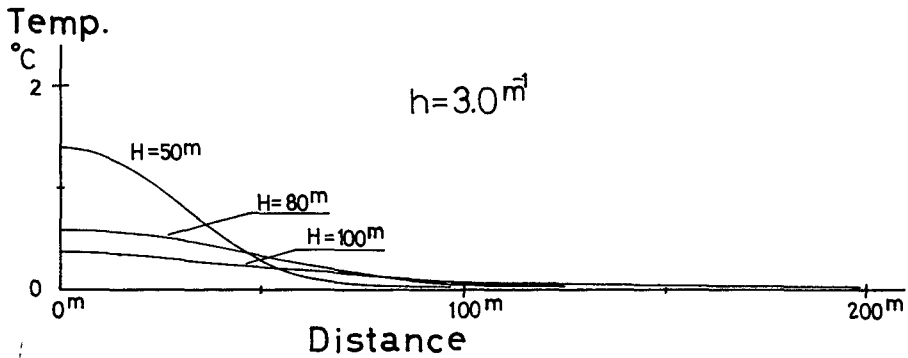
と表わせる。

方程式(1)を満足する解を

$$T = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f_H(\eta) (Ae^{\alpha y} + Be^{-\alpha y}) \cos \alpha (\eta - x) d\eta \tag{20}$$

とおき, (19)を考慮して境界条件を満たすように A, B を決めると,

$$T = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha \cos h \alpha y + h \sin h \alpha y}{\alpha \cos h \alpha H + h \sin h \alpha H} f_H(\eta) \cos \alpha (\eta - x) d\eta \tag{21}$$



第4図 (25)式によって計算した1m深の温度分布
ここで $f_H(x) = 100 \exp\{-x^2/100\}$

Fig. 4. 1 m-depth underground temperature calculated from (22)
 $f_H(x) = 100 \exp\{-x^2/100\}$

$f_H(x)$ が偶関数であれば, (21) は

$$T = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} d\alpha \int_0^{\infty} \frac{\alpha \cos h \alpha y + h \sin h \alpha y}{\alpha \cos h \alpha H + h \sin h \alpha H} f_H(\eta) \cos \alpha x \cos \alpha \eta d\eta \quad (22)$$

となり, (16) で $l \rightarrow \infty$ とすれば級数が積分形に変わり上式が得られる。

例として,

$$f_H(x) = T_0 e^{-\mu_0 x^2} \quad (T_0, \mu_0 \text{ は定数}) \quad (23)$$

とすれば

$$\int_0^{\infty} T_0 e^{-\mu_0 x^2} \cos \alpha \eta d\eta = T_0 \sqrt{\frac{\pi}{\mu_0}} e^{-\frac{\alpha^2}{4\mu_0}} \quad (24)$$

であるから

$$T = \frac{2T_0}{\sqrt{\pi\mu_0}} \int_0^{\infty} \frac{\alpha \cos h \alpha y + h \sin h \alpha y}{\alpha \cos h \alpha H + h \sin h \alpha H} \times e^{-\frac{\alpha^2}{4\mu_0}} \cos \alpha x d\alpha \quad (25)$$

$T=100^\circ\text{C}$; $\mu_0 = \frac{1}{100} \text{ m}^{-2}$; $h=0.3 \text{ m}^{-1}, 3.0 \text{ m}^{-1}$; $H=100 \text{ m}, 50 \text{ m}$ のとき (25) を数値積分して求めた 1 m 深地温分布が第 4 図である。

(3) Model 2-1

地表面は一定温度 (0°C とした) に保ち, $y=H$ における温度分布を $f_H(x)$ とし, 有限の所 ($x=\pm l$) に断熱的な境界を置いた場合。

境界条件は

$$\left. \begin{aligned} T_{y=0} &= 0 \\ T_{y=H} &= f_H(x) \\ \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=\pm l} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

これらの条件でラプラスの方程式を解けば, 点 (x, y) の温度は

$$T = \frac{y}{2H} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\sin h \alpha_n y}{\sin h \alpha_n H} \cos \alpha_n x \quad (27)$$

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f_H(\eta) \cos \alpha_n \eta d\eta \\ \alpha_n &= \frac{n\pi}{l} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

で与えられ, $f_H(x)$ は偶関数である。

$$\left. \begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{hy+1}{hH+1} &= \frac{y}{H} \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha_n \cos h \alpha_n y + h \sin h \alpha_n y}{\alpha_n \cos h \alpha_n H + h \sin h \alpha_n H} &= \frac{\sin h \alpha_n y}{\sin h \alpha_n H} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

であるから, (16) で極限 $h \rightarrow 0$ をとれば (27) が得られる。

(4) Model 2-2

地表面が一定温度 (0°C) に保たれ、 $y=H$ における温度分布が $f_H(x)$ のとき。

境界条件は

$$\left. \begin{array}{l} T_{y=0} = 0 \\ T_{y=H} = f_H(x) \end{array} \right\} \quad (30)$$

この場合の解は川下²⁾によって求められており、

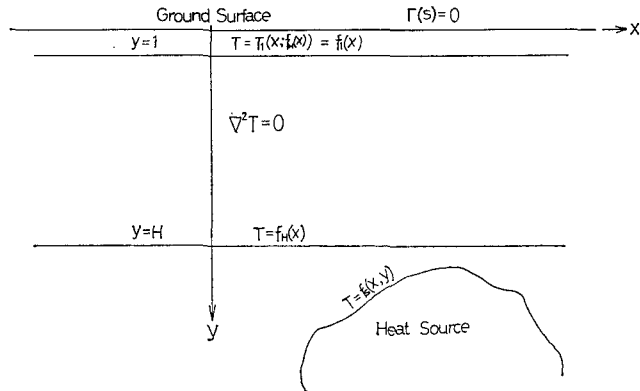
$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin h \alpha y}{\sin h \alpha H} f_H(\eta) \cos \alpha (x-\eta) d\eta \\ &= \frac{1}{2H} \sin h \frac{\pi}{H} y \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_H(\eta) d\eta}{\cos \frac{\pi}{H} y + \cos h \frac{\pi}{H} (x-\eta)} \end{aligned} \quad (31)$$

である。なお、 $f_H(x)$ はフーリエ積分による表示が可能なための十分条件： $\int_{-\infty}^{\infty} |f_H(x)| dx < \infty$ を満足するように normal な温度分布を差し引いたものを考える。

III. 1 m 深地温分布から地中の温度を決定する方法

温泉地域の熱的状态を示すと思われる第5図において、地中の温度分布が定常であると仮定したとき、熱源の形及び表面の温度 $f_s(x, y)$ さらに地表面における条件： $\Gamma(s)=0$ (地表面においてニュートンの冷却が行なわれている場合、一定温度に保たれている場合に対応する。) が与えられると地中の温度分布は一意に定まる。そのとき $y=H$ での温度分布を $f_H(x)$ とすれば、 $y=H$ より浅い部分の温度を論ずる際、境界条件として $f_s(x, y)$ の代わりに $f_H(x)$ を用いても同一の結果が得られる。 $y=1\text{ m}$ における温度分布は $f_s(x, y)$ の関数、したがって $f_H(x)$ の関数であって $T_1(x; f_H(\eta))$ と書ける。測定された1 m 深地温分布 $f_1(x)$ との関係式：

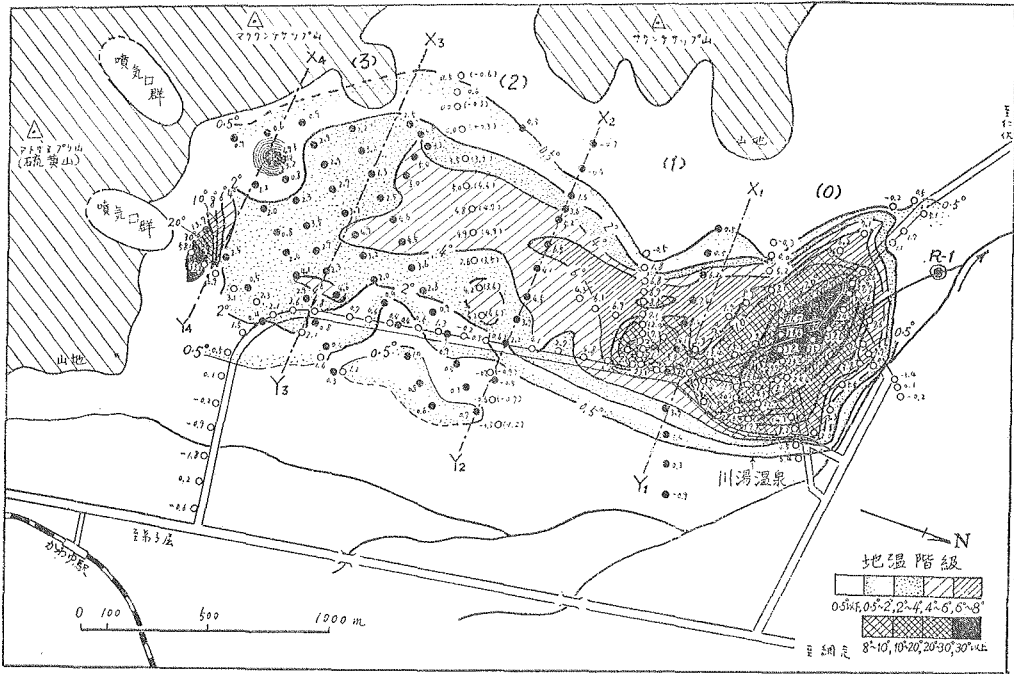
$$T_1(x; f_H(\eta)) = f_1(x) \quad (32)$$



第5図 温泉地域の鉛直断面を示す模型

Fig. 5. Schematic representation of vertical section on a hot spring area.

2) 川下研介；前出。



第6図 川湯温泉における1 m 深地温分布 (福富らによる)

Fig. 6. Horizontal distribution of 1 m-depth underground temperature at kawayu Spa. (after FUKUTOMI et al.)

を満足するように $f_H(x)$ を決定すれば, $f_1(x)$ から推定される $y=H$ における温度分布である。

地温の異常な範囲は有限と考えられるから区間を十分大きくとれば $f_1(x)$ を偶関数として良く, そのフーリエ級数による表示は

$$\left. \begin{aligned} f_1(x) &= \frac{a'_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a'_n \cos \alpha_n x \\ a'_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f_1(\eta) \cos \alpha_n \eta d\eta \\ \alpha_n &= \frac{n\pi}{l} \quad (n=0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

である。

Model 1-1 の解 (16) で $y=1$ とすると,

$$T_1(x; f_H(\eta)) = \frac{h+1}{hH+1} \cdot \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\alpha_n \cosh \alpha_n + h \sinh \alpha_n}{\alpha_n \cosh \alpha_n H + h \sinh \alpha_n H} \cos \alpha_n x \quad (34)$$

(32), (33), (34) から

$$\begin{aligned} & \frac{h+1}{hH+1} \cdot \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\alpha_n \cosh \alpha_n + h \sinh \alpha_n}{\alpha_n \cosh \alpha_n H + h \sinh \alpha_n H} \cos \alpha_n x \\ &= \frac{1}{2} a'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a'_n \cos \alpha_n x \end{aligned} \quad (35)$$

この式が任意の x に対して成立するためには

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{hH+1}{h+1} a'_0 \\ a'_n &= \frac{\alpha_n \cosh \alpha_n H + h \sinh \alpha_n H}{\alpha_n \cosh \alpha_n + h \sinh \alpha_n} a'_n \quad (n = 1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

であれば良い。(36)を(7)に代入すると深さ H の温度分布は

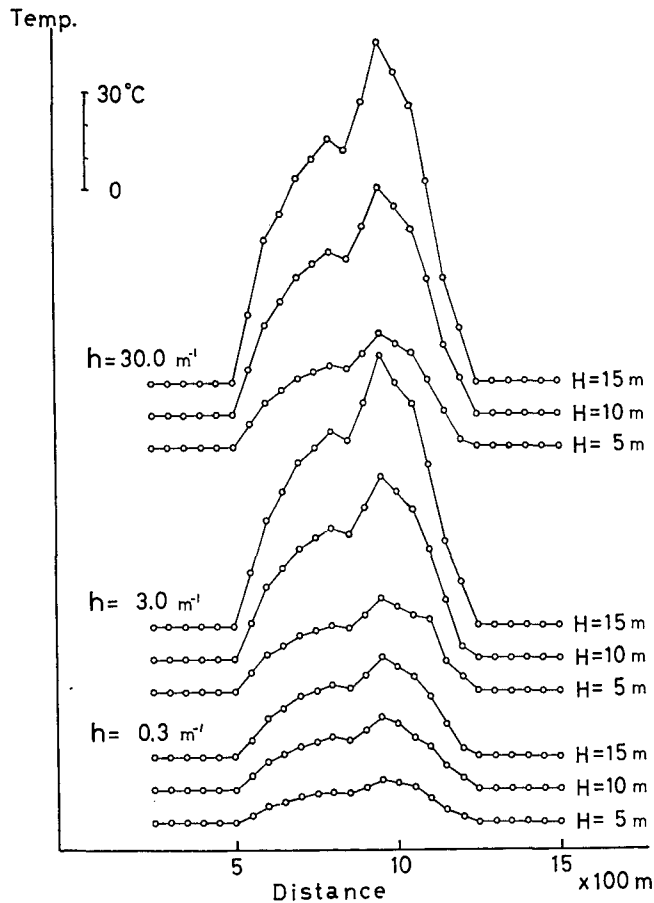
$$f_H(x) = \frac{hH+1}{h+1} \cdot \frac{a'_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n \cosh \alpha_n H + h \sinh \alpha_n H}{\alpha_n \cosh \alpha_n + h \sinh \alpha_n} a'_n \cos \alpha_n x \quad (37)$$

また特別な場合として $f_1(x) = T_1 = \text{const.}$ のときは

$$f_H(x) = \frac{hH+1}{h+1} T_1 \quad (38)$$

となる。

Model 2-1 の解(27)を用いると



第7図 1 m 深地温から推定される第6図 X_2 - Y_2 断面の地中温度分布
 Fig. 7. Estimated underground temperature at X_2 - Y_2 section in Fig. 6.

$$f_H(x) = \frac{H}{2} a_0' + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh \alpha_n H}{\sin h \alpha_n} \cos \alpha_n x \quad (39)$$

$f_1(x)$ として normal な温度分布を差し引いたものを考えると $\int_{-\infty}^{\infty} |f_1(x)| dx < \infty$ が成立し、フーリエ積分によって

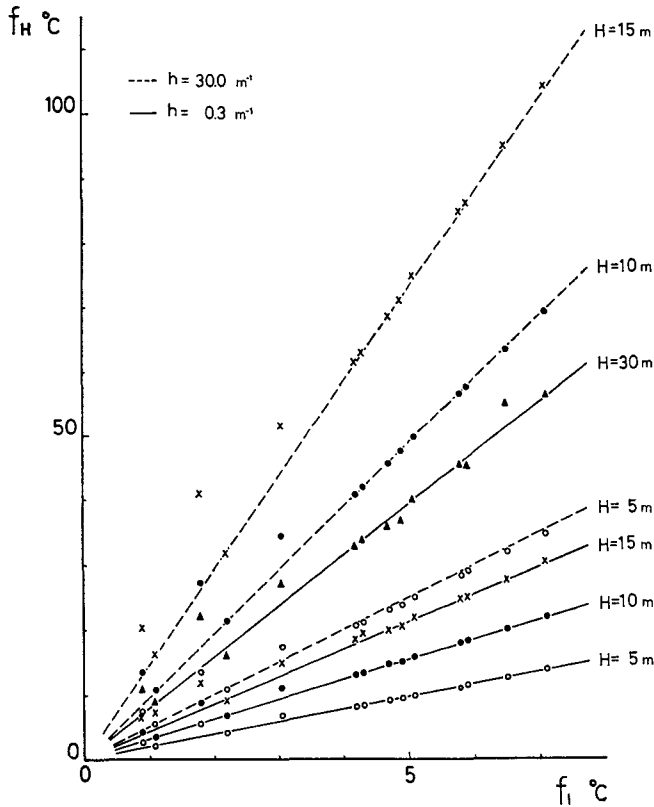
$$f_1(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\eta) \cos \alpha (\eta - x) d\eta \quad (40)$$

と表わせる。

Model 1-2 の解を用いた場合、深さ H の温度分布は (19), (21), (32), (40) から

$$f_H(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha \cosh \alpha H + h \sinh \alpha H}{\alpha \cosh \alpha + h \sinh \alpha} f_1(\eta) \cos \alpha (\eta - x) d\eta \quad (41)$$

また Model 2-2 の解を用いた場合は



第8図 f_1 と f_H の関係

f_1 : 1 m 深地温 f_H : (37) を用いて計算した各深さの地中温度
点線及び一破線は (38) から得られる値

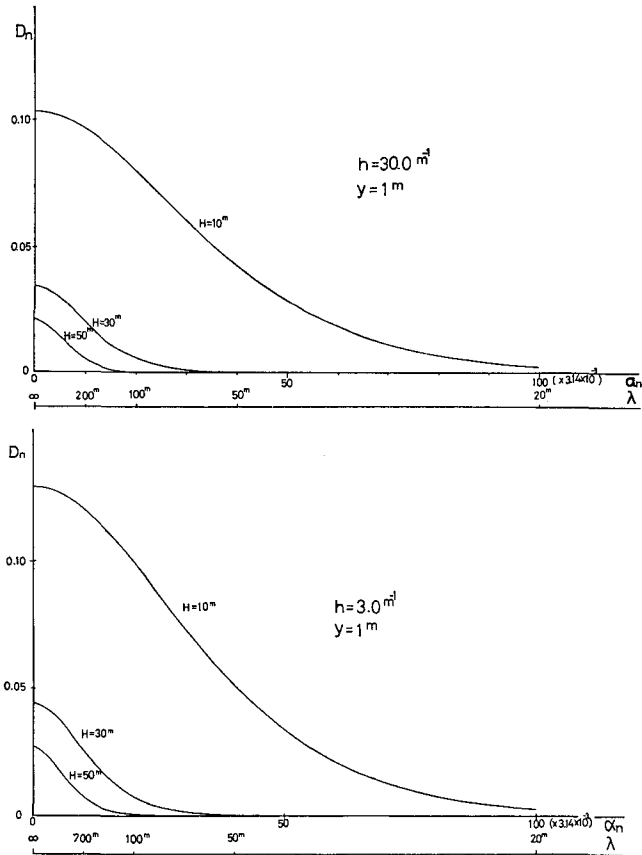
Fig. 8. Relation between f_1 and f_H

f_1 : 1 m-depth underground temperature.
 f_H : underground temperature on $y=H$ estimated from (37).
solid line and broken line are values obtained from (38).

$$f_H(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\alpha \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin h \alpha H}{\sin h \alpha} f_1(\eta) \cos \alpha(\eta - x) d\eta \quad (42)$$

となる。

適用例として、福富ら³⁾が北海道川湯温泉において測定した1 m 深地温分布 (第6図) から(34)を用いて X_2 - Y_2 断面の地中温度を normal な温度分布を差引いたものについて計算した (第7図)。計算では $l=3,000$ m, 放熱係数 $h=30.0$ m⁻¹, 3.0 m⁻¹, 0.3 m⁻¹ とし, $n=60$ まで和を取った。地温測定間隔が100 mであったので二点の平均値を中間の地温として50 m 間隔で計算したが, 計算された温度に対してもこの関係はほぼ成立し, 各深さにおける温度分布は相似な形を示している。 $f_1(x)$ と $f_H(x)$ との間には第8図に示されるように直線的な関係があり, 成瀬⁴⁾が洞爺湖温泉で地中の温泉分布の推定に用いた方法, ここでは(38)から決定される温度 (第



第9図
Fig. 9.

- 3) 福富孝治・須川 明・藤本忠美; 川湯温泉の地球物理学的研究, 北海道大学地球物理学研究報告, 4 (昭和31年), 39-64.
- 4) 成瀬廉二; 1 m 深地温より洞爺湖温泉における地下泉温分布の推定, 北海道大学地球物理学研究報告, 16 (昭和41年), 51-60.

8 図の直線)と殆んど差がない。これは比較的浅い部分の温度であることによると考えられる。

(37)で

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{D_n} &= \frac{\alpha_n \cosh \alpha_n H + h \sinh \alpha_n H}{\alpha_n \cosh \alpha_n + h \sinh \alpha_n} \\ \alpha_n &= \frac{n\pi}{l} \quad (n = 1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

とおき、 D_n を計算すると第9図のようになる。 D_n は H の増加と共に減少し、したがって $1/D_n$ は増加する。このため深くなるにしたがって(37)から計算される温度の誤差も増加する。また、第7, 8図から判るように1 m 深地温分布から推定される地中の温度分布は放熱係数によって著しく異なるのでその値の決定には十分な精度が要求される。

IV. あとがき

地中の温度分布は地形、地質等によって影響されるが、これらに関する研究が殆んど行なわれていないので上述の方法を温泉地域に適用する際の誤差、放熱係数決定の精度を一般的に論ずることはできず、各々の場合についてボーリングの資料等との比較から見積らなければならない。1 m 深地温の測定間隙を密にし、(41)か、または総和の項数を増して(34)を用い推定される温度分布についてさらに検討する必要がある。しかし、比較的浅い部分の温度推定には、川湯温泉のように1 m 深地温の変化の大きい地域でも計算上大差ないので、(38)を用いてよいと思われる。

おわりに、御指導、御助言をいただいた、福富教授をはじめ地球物理学教室陸水学講座の皆様へ厚く感謝します。

なお、計算は北大センターのNEAC 2203 G によった。

1. On a Method of the Underground Temperature Prospecting

By Koichi URAKAMI

(Department of Geophysics, Faculty of Science, Hokkaido University)

In this paper, the differential equation of the heat conduction in steady state is solved for Model 1-1 and Model 1-2 as shown in Fig. 1, and a theoretical method is introduced to prospect the underground temperature from that of 1 meter depth.

A numerical example, which is result of the application to data measured by FUKUTOMI et al. at Kawayu Spa, is shown in Fig. 7. The temperature evaluated from this method are compared with the values obtained from the simple method which have been derived from solution of one dimensional heat conduction equation (Fig. 8), it supposes that there are no great difference between the two.