



Title	1. 定常な地中温度の分布
Author(s)	浦上, 晃一; URAKAMI, Koichi
Citation	北海道大学地球物理学研究報告, 23, 1-8
Issue Date	1970-03-18
DOI	<a href="https://doi.org/10.14943/gbhu.23.1">https://doi.org/10.14943/gbhu.23.1</a>
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/13969">https://hdl.handle.net/2115/13969</a>
Type	departmental bulletin paper
File Information	23_p1-8.pdf



# 1. 定常な地中温度の分布

浦上 晃 一

(北海道大学理学部地球物理学教室)

— 昭和 44 年 10 月 受理 —

## I. はじめに

すでに、平坦な地表面においてニュートンの冷却が行なわれ、地表に平行な平面上に任意の温度分布を与えたときの定常な熱伝導方程式を解いたが<sup>1)</sup>、ここではその解をもとに熱伝導率の異なる場合の解を求める。また、地表面においてニュートンの冷却則が成立する場合の地中温度の二次元的な分布を等角写像を用いて決定する方法を考えた。

## II. 地表面が平坦な場合の解

地中の熱の伝達は伝導のみによると考へ、温度分布は定常状態にあるとし、媒質は均質、等方的であると仮定する。簡単のために二次元の問題として考へる。

地表に  $x$ -軸、垂直下方に  $y$ -軸をとれば点  $(x, y)$  における温度  $T$  はラプラスの方程式：

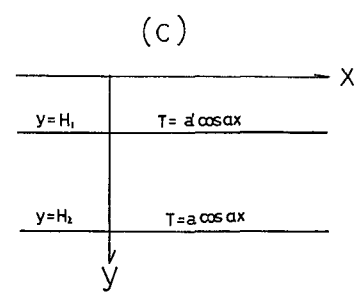
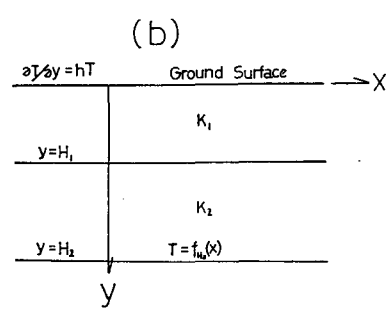
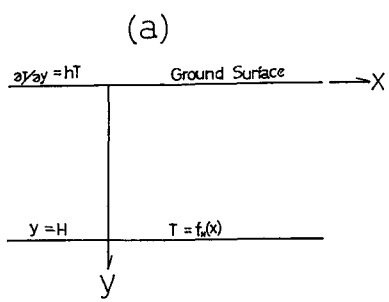
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

を満足する。また、地表面においてニュートンの冷却則が成立すれば

$$\frac{\partial T}{\partial n} = hT \quad (2)$$

を満たす。ここで  $n$  は地表面に垂直な単位ベクトルであり、内向きを正とする。 $h$  は放熱係数である。

第 1 図 (a) に示されるようなモデルについての解は



第 1 図 境界条件  
Fig. 1. Boundary conditions.

1) 浦上晃一; 1 m 深地温分布から地中の温度分布を推定する一方法について、北海道大学地球物理研究報告, 20 (昭和 43 年), 1-13.

$$T = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha \cosh \alpha y + h \sinh \alpha y}{\alpha \cosh \alpha H + h \sinh \alpha H} f_H(\eta) \cdot \cos \alpha(\eta - x) d\eta \quad (3)$$

で与えられる<sup>2)</sup>。ここで  $f_H(x)$  は  $y=H$  における温度分布である。

この解を用いて、第1図(b)に示される熱伝導率がそれぞれ  $K_1, K_2$  と異なる二層に別けられるようなモデルについての解を求めよう。

まず、第1図(c)に示されるモデルについてラプラスの方程式を満足する解を求めよう。境界条件は

$$\left. \begin{array}{l} y = H_1 \quad \text{で} \quad T = a' \cos \alpha x \\ y = H_2 \quad \text{で} \quad T = a \cos \alpha x \end{array} \right\} \quad (4)$$

とする。(1)から

$$T = (Ae^{\alpha y} + Be^{-\alpha y}) \cos \alpha x \quad (5)$$

(4), (5)を満たすように  $A, B$  を決めると

$$\left. \begin{array}{l} A = \frac{ae^{-\alpha H_1} - a'e^{-\alpha H_2}}{2 \sinh \alpha (H_2 - H_1)} \\ B = \frac{a'e^{\alpha H_2} - ae^{\alpha H_1}}{2 \sinh \alpha (H_2 - H_1)} \end{array} \right\} \quad (6)$$

したがって、温度分布は

$$T = \frac{a' \sinh \alpha (H_2 - y) + a \sinh \alpha (y - H_1)}{\sinh \alpha (H_2 - H_1)} \cos \alpha x \quad (7)$$

となる。

次に第1図(b)のような場合の温度分布  $T_1, T_2$  を求めよう。境界条件は

$$\left. \begin{array}{l} y = 0 \quad \text{で} \quad \frac{\partial T_1}{\partial y} = h T_1 \\ y = H_1 \quad \text{で} \quad T_1 = T_2 = a' \cos \alpha x \\ K_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} = K_2 \frac{\partial T_2}{\partial y} \\ y = H_2 \quad \text{で} \quad T_2 = a \cos \alpha x \end{array} \right\} \quad (8)$$

である。

(3)から

$$T_1 = \frac{\alpha \cosh \alpha y + h \sinh \alpha y}{\alpha \cosh \alpha H_1 + h \sinh \alpha H_1} a' \cos \alpha x \quad (9)$$

(7)から

$$T_2 = \frac{a' \sinh \alpha (H_2 - y) + a \sinh \alpha (y - H_1)}{\sinh \alpha (H_2 - H_1)} \cos \alpha x \quad (10)$$

2) 前出1).

が得られる。(8), (9), (10) から  $a'$  を消去すれば,  $y = H_2$  における温度  $T_2 = a \cos \alpha x$  が与えられた場合の温度分布が求まって,

$$T_1 = \frac{E_5(\alpha)}{E_1(\alpha)} \{ \alpha \cosh \alpha y + h \sinh \alpha y \} a \cos \alpha x \tag{11}$$

$$T_2 = \frac{1}{E_2(\alpha)} \cdot \{ E_5(\alpha) \sinh \alpha (H_2 - y) + \sinh \alpha (y - H_1) \} a \cos \alpha x \tag{12}$$

となる。ここで

$$\left. \begin{aligned} E_1(\alpha) &= \alpha \cosh \alpha H_1 + h \sinh \alpha H_1 \\ E_2(\alpha) &= \sinh \alpha (H_2 - H_1) \\ E_3(\alpha) &= \alpha \sinh \alpha H_1 + h \cosh \alpha H_1 \\ E_4(\alpha) &= \cosh \alpha (H_2 - H_1) \\ E_5(\alpha) &= \frac{\frac{K_2}{E_2(\alpha)}}{\frac{E_3(\alpha)}{E_1(\alpha)} K_1 + \frac{E_4(\alpha)}{E_2(\alpha)} \cdot K_2} \end{aligned} \right\} \tag{13}$$

である。

$y = H_2$  における温度分布が  $T_2 = f_{H_2}(x)$  で与えられる場合には

$$T_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\alpha \int_{-\infty}^\infty \frac{E_5(\alpha)}{E_1(\alpha)} \cdot \{ \alpha \cosh \alpha y + h \sinh \alpha y \} f_{H_2}(\eta) \cos \alpha (\eta - x) d\eta \tag{14}$$

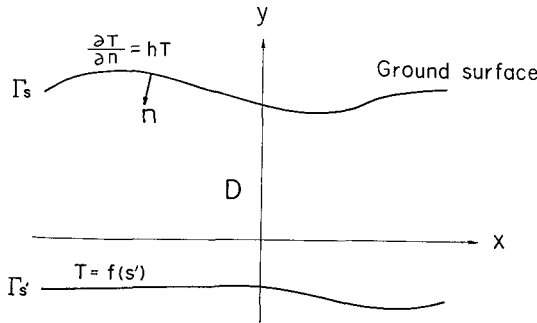
$$T_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\alpha \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{E_2(\alpha)} \cdot \{ E_5(\alpha) \sinh \alpha (H_2 - y) + \sinh \alpha (y - H_1) \} \cdot f_{H_2}(\eta) \cos \alpha (\eta - x) d\eta \tag{15}$$

となることは容易に確かめられるであろう。

### III. 地表面が簡単な曲線で表わされる場合

#### (i) 温度分布を求める方法

第2図のような地表面が簡単な曲線で表わされるような場合の温度分布を求めよう。境界



第2図 二次元的なモデル

Fig. 2. Schematic representation of two-dimensional model.

条件は地表において(2)が成立し、地中の任意の曲線  $\Gamma_s$  においてその線上の温度分布  $F(S')$  を与える、即ち

$$T = F(S') \quad (16)$$

とする。次に、 $\phi = \text{const.}$  の曲線に直角な単位ベクトルを単に  $n$  と書き ( $\phi$  の増加する方向を  $n$  の正の方向とする)、

$$\phi = T - \frac{1}{h} \cdot \frac{\partial T}{\partial n} \quad (17)$$

を考える。地表面において、 $n$  の方向が(2)の  $n$  の方向と一致し、

$$\phi = 0 \quad (18)$$

が成立する。さらに、 $\Delta^2 T = 0$ 、 $\Delta^2 \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right) = \frac{\partial}{\partial n} (\Delta^2 T) = 0$  であるから  $\phi$  もラプラスの方程式:

$$\Delta^2 \phi = 0 \quad (19)$$

を満たす。また、(16)の代りに曲線  $\Gamma_s$  上においては

$$\phi = \phi_0 = \text{const.} > 0 \quad (20)$$

を考える。

いま、(18), (19), (20) を満足する  $\phi$  が求まるとすれば(17)からそれに対応する温度  $T$  が

$$T = \phi + \frac{1}{h} \cdot \frac{\partial T}{\partial n} + \frac{1}{h^2} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial n^2} + \dots \quad (21)$$

と決定できる。

極く簡単な例として一次元の問題を考えてみよう。 $x=0$  で  $\phi=0$ 、 $x=H$  で  $\phi=\phi_0=\text{const.}$  とすれば

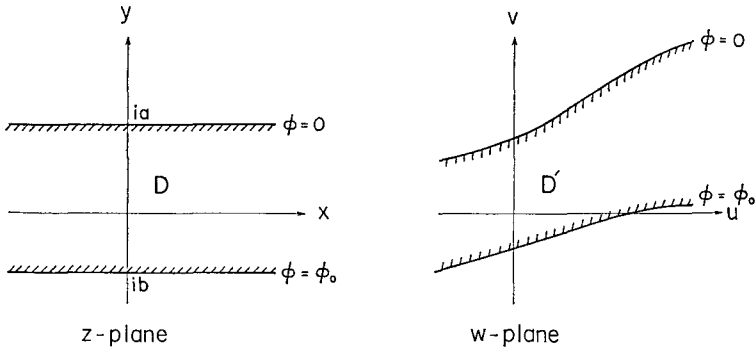
$$\phi = \frac{x}{H} \phi_0 \quad (22)$$

したがって

$$T = \frac{\phi_0}{H} x + \frac{1}{h} \cdot \frac{\phi_0}{H} = \frac{hx+1}{hH} \phi_0 \quad (23)$$

これは  $x=0$  でニュートンの冷却則が成り立ち、 $x=H$  における温度が  $(hH+1)\phi_0/hH$  であるときの(1)の解と一致する。

以下、複素平面の領域において  $\phi$  及び  $T$  を論じよう。地表  $\Gamma_s$  及び境界  $\Gamma_{s'}$  が十分滑らかな曲線と仮定すると  $\phi = \text{const.}$  の曲線も十分滑らかな曲線と考えて良い。第3図の  $z$ -平面の領域  $D$  が関数  $w = f(z)$  によって  $w$ -平面の領域  $D'$  に等角に写像されたとすれば  $D$  で調和な関数は  $D'$  においても調和であって、 $z$ -平面の境界線上の点  $z_0$  とそれに対応する  $w$ -平面の境界線上の点  $w_0 (w_0 = f(z_0))$  において  $\phi(z_0) = \phi(w_0)$  であれば領域内の点でもこの関係が成立する。また、写像曲線の長さの素片とこれに対応する  $z$ -平面上の曲線との比は



第3図 z-平面と w-平面  
Fig. 3. z-plane and w-plane.

$$\left| \frac{dw}{dz} \right| = |f'(z)| \tag{24}$$

で与えられる<sup>3)</sup>。したがって、z-平面の点  $z_0$  において曲線  $\phi = \text{const.} = \phi(z_0)$  に垂直な方向の  $\phi$  の勾配を  $\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)_{z=z_0}$ ，w-平面におけるそれを  $\left(\frac{\partial\phi}{\partial n'}\right)_{w=w_0}$  とすれば

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial n'}\right)_{w=w_0} = \frac{1}{|f'(z_0)|} \cdot \left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)_{z=z_0} \tag{25}$$

となる。第3図に示される条件：

$$\left. \begin{aligned} z = ai \quad &\text{で} \quad \phi = 0 \\ z = bi \quad &\text{で} \quad \phi = \phi_0 = \text{const.} \end{aligned} \right\} \tag{26}$$

(ここで  $a, b$  は実定数)

では z-平面の点  $z_0$  における  $\phi$  は

$$\phi = \frac{\phi_0}{a-b} (a - \text{Im}(z_0)) \tag{27}$$

となる。このとき w-平面の点  $w_0$ ；

$$w_0 = f(z_0) \tag{28}$$

における温度  $T$  は、 $\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)_{z=z_0} = \frac{\phi_0}{a-b}$  であるから、(21), (25) を用いて、

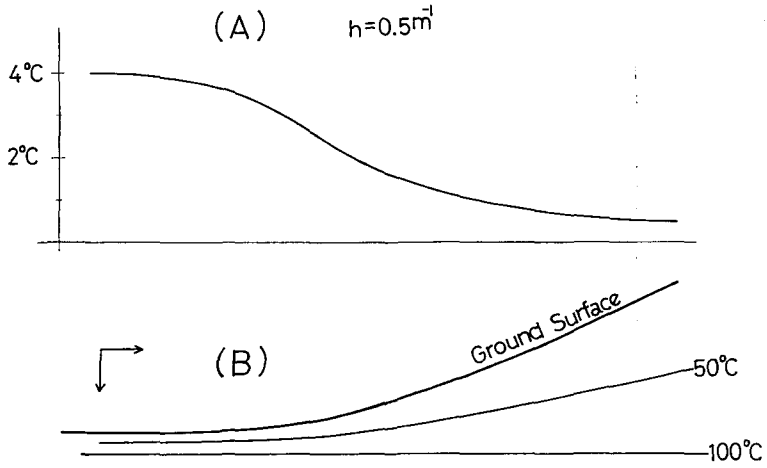
$$T = \frac{\phi_0}{a-b} (a - \text{Im}(z_0)) + \frac{1}{h} \cdot \frac{\phi_0}{a-b} \cdot \frac{1}{|f'(z_0)|} + O(h^{-2}) \tag{29}$$

と求まる。

(ii) 計算例

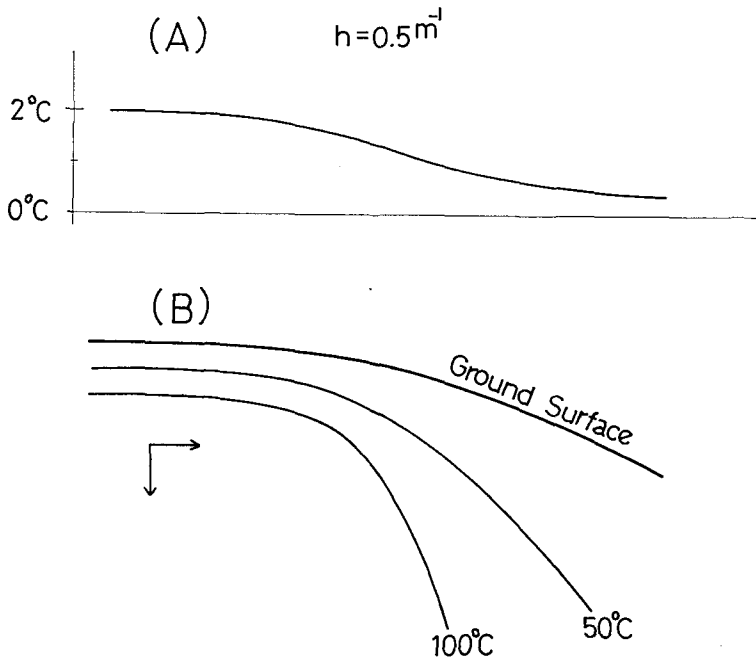
関数  $w = f(z)$  によって写像される w-平面に特異点が生ずることがあるので (29) を用い温

3) 例えば、寺沢寛一；数学概論，岩波書店，175.



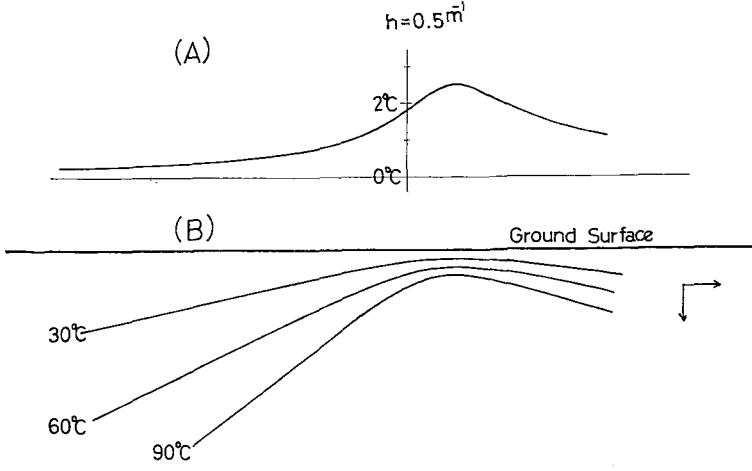
第4図 (29)式によって計算した温度分布  
 (A): 土地表面における温度分布 (B): 地中の等温線  
 (矢印の長さが 100 m)  $f(z)=z+e^z$

Fig. 4. Temperature distribution calculated from eq. (29)  
 (A): temperature distribution at ground surface.  
 (B): isothermal lines under ground-surface.



第5図 (29)式から計算した温度分布  
 (A): 地表面における温度分布 (B): 地中の等温線  
 (矢印の長さが 100 m)  $f(z)=z+e^z$ .

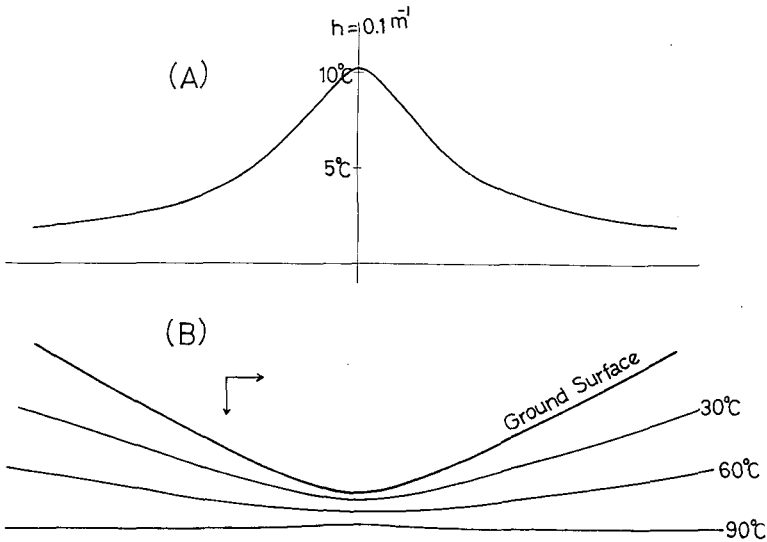
Fig. 5. Temperature distribution calculated from eq. (29)  
 (A): temperature distribution at ground surface  
 (B): isothermal lines under ground surface



第6図 (29)式から計算した温度分布

(A): 地表面における温度分布 (B): 地中の等温線  
 (矢印の長さが100 m)  $f(z) = e^{\frac{1}{6}z} - e^{-\frac{5}{6}z}$

Fig. 6. Temperature distribution calculated from eq. (29)  
 (A): temperature distribution at ground surface  
 (B): isothermel lines under ground surface.



第7図 (29)式によって計算された温度分布

(A): 地表面における温度分布 (B): 地中の等温線  
 (矢印の長さが100 m)  $f(z) = e^{\frac{1}{2}z} - e^{-\frac{1}{2}z}$

Fig. 7. Temperature distribution calculated from eq. (29)  
 (A): temperature distribution at ground surface  
 (B): isothermal lines under ground surface.

度分布を計算するにはこれらの点を含まない領域を選ぶ必要があり、この制限のために  $w$ -平面内に取り得る領域は極めて小さなものになる。それゆえ計算に用いる  $w$ -平面のモデルを実際のモデルの縮小されたものと考えると良い。例えば、100 m が  $w$ -平面の単位の長さに相当するとすれば (29) に用いる数値は 100 m を基本の単位としなければならない。このとき放熱係数は  $h=1 \text{ m}^{-1}=100 (100 \text{ m})^{-1}$  となり、 $\phi$  の勾配を  $100^\circ\text{C}/(100 \text{ m})$  とすれば、 $1/|f(z_0)| \sim 0(1)$  のとき  $0(h^{-2})=0(10^{-2})$  となり  $0(h^{-2})$  は無視できる。なお、 $1/|f(z_0)|$  は高々  $0(10)$  であろう。

第 4 図～第 7 図に (29) を用いて計算した温度分布の例を示す。(A) は地表面における温度分布であり、(B) は地中の温度分布である。

ここで用いた写像関数  $w=f(z)$  は H. KOBER によった<sup>4)</sup>。

おわりに、御指導、御助言をいただいた福富教授をはじめ地球物理学教室陸水学講座の皆様には厚く感謝します。

なお、計算には北大計算センターの NEAC 2203 G を用いた。

## 1. Steady Temperature Distributions Under the Ground Surface

By Koichi URAKAMI

(Department of Geophysics, Faculty of Science, Hokkaido University)

Two-dimensional distributions of steady temperature under the ground surface are considered for the following two cases.

(1) Case of different conductivities. For the boundary conditions shown in Fig. 1(b), a solution of LAPLACE's equation is found to be eq. (14) and (15).

(2) Case of curved ground surface. We define a function  $\phi$  by eq. (17), and it is obvious that

*if  $T$  is a harmonic function,  $\phi$  is also harmonic, and at the ground surface the boundary condition (shown in Fig. 2) transforms to  $\phi=0$  for  $\phi$ .*

Then, the temperature distribution  $T$  can be determined by eq. (21) from  $\phi$ , which is solution of LAPLACE's equation and at the ground surface satisfied the boundary condition:  $\phi=0$ .

In Fig. 3, when the region  $D$  in  $z$ -plane maps conformally into the region  $D'$  in  $w$ -plane,  $\phi$  in  $D'$  is easily obtained and using theory of conformal transforms  $T$  can be determined as eq. (29). The steady temperature distributions calculated from eq. (29) are shown Fig. 4~7.

4) H. KOBER; Dictionary of conformal representations, Dover.