



Title	1. 定常な地中温度の分布 (その2)
Author(s)	浦上, 晃一; URAKAMI, Koichi
Citation	北海道大学地球物理学研究報告, 24, 1-4
Issue Date	1970-09-18
DOI	https://doi.org/10.14943/gbhu.24.1
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/13977
Type	departmental bulletin paper
File Information	24_p1-4.pdf



1. 定常な地中温度の分布 (その2)

浦上 晃 一

(北海道大学理学部地球物理学教室)

— 昭和45年4月受理 —

I. はじめに

すでに、種々のモデルについてラプラスの方程式を解き、定常な地中の温度分布を求めた^{1),2)}。地表面における境界条件としてニュートンの冷却則が成立する場合いずれのモデルも放熱係数を定数としているが、放熱係数は地表面の状態によっても異なると考えられており、部分的な放熱係数の相違が地中の温度分布に及ぼす効果を調べるため、放熱係数が場所の関数として表わされる場合の二次元的な温度分布を求める。

II. フーリエ級数を用いた解

地中の熱の伝達は伝導のみによると考え、温度分布は定常状態にあるとし、媒質は均質、等方的であると仮定する。簡単のために二次元の問題として考える。

地表に x -軸、垂直下方に y -軸をとれば点 (x, y) における温度 T はラプラスの方程式:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

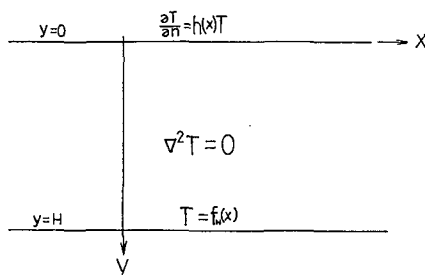
を満足する。また、地表面においてニュートンの冷却則が成立すれば

$$\frac{\partial T}{\partial n} = hT \quad (2)$$

を満たす。ここで、地表面に垂直な単位ベクトルを単に n で表わした (内向きを正とする)。また h は放熱係数であり、大気のを 0°C とした。

第1図に示されるようなモデルについて、放熱係数が

$$h(x) = h_0 + \sum_{n=1}^{\infty} h_n \cos \alpha_n x \quad (3)$$



第1図 簡単なモデル

Fig. 1. Schematic representation of the writer's model.

1) 浦上晃一; 1 m 深地温分布から地中の温度分布を推定する一方法について, 北大地球物理学研究報告, 20 (昭和43年), 1-13.

2) 浦上晃一; 定常な地中温度の分布, 北大地球物理学研究報告, 23 (昭和44年), 1-8.

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{e} \quad (4)$$

と表わされ、さらに $y=H$ における温度分布が

$$f_H(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \alpha_n x \quad (5)$$

で与えられる場合の温度分布を求める。

いま、

$$T = \frac{h_0 y + 1}{h_0 H + 1} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n e^{\alpha_n y} + B_n e^{-\alpha_n y}) \cos \alpha_n x \quad (6)$$

とにおいて、境界条件を満足するように A_n , B_n を決定する。(2), (3), (6) から地表面 ($y=0$) における条件は

$$\begin{aligned} & \frac{h_0}{h_0 H + 1} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (A_n - B_n) \cos \alpha_n x \\ &= \left\{ \frac{1}{h_0 H + 1} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n + B_n) \cos \alpha_n x \right\} \cdot \left\{ h_0 + \sum_{n=1}^{\infty} h_n \cos \alpha_n x \right\} \end{aligned} \quad (7)$$

となり、 $y=H$ における条件は

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n e^{\alpha_n H} + B_n e^{-\alpha_n H}) \cos \alpha_n x = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \alpha_n x \quad (8)$$

となる。十分大きな N に対して近似的に

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{h_0 y + 1}{h_0 H + 1} a_0 + \sum_{n=1}^N (A_n e^{\alpha_n y} + B_n e^{-\alpha_n y}) \cos \alpha_n x \\ h(x) &= h_0 + \sum_{n=1}^N h_n \cos \alpha_n x \\ f_H(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cos \alpha_n x \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

と表わされる場合、 $\alpha_n = n\beta$ とすれば (7) 及び (8) はそれぞれ、

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N n\beta (A_n - B_n) \cos n\beta x &= \sum_{n=1}^N \left\{ h_0 (A_n + B_n) + \frac{a_0}{h_0 H + 1} h_n \right\} \cos n\beta x \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^N \left\{ (A_n + B_n) h_i \cos (n+i)\beta x + (A_n + B_n) h_i \cos (n-i)\beta x \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\sum_{n=1}^N (A_n e^{n\beta H} + B_n e^{-n\beta H}) \cos n\beta x = \sum_{n=1}^N a_n \cos n\beta x \quad (11)$$

となる。(10) 及び (11) が任意の x について成立するためには

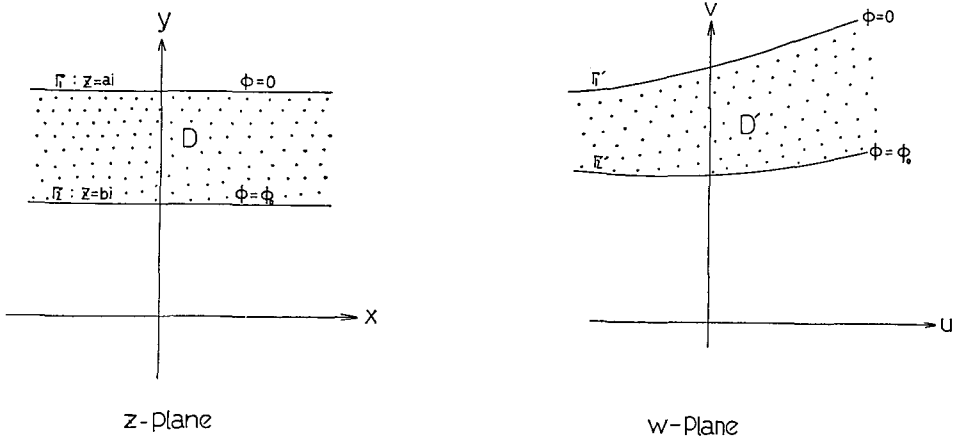
$$\begin{aligned} n\beta (A_n - B_n) &= h_0 (A_n + B_n) + \frac{a_0}{h_0 H + 1} h_n \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left\{ (A_{n-i} + B_{n-i}) h_i + (A_{n+i} + B_{n+i}) h_i \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

$$A_n e^{n\beta H} + B_n e^{-n\beta H} = a_n \quad (13)$$

が $n=1, 2, \dots, N$ に関して各々成立すれば良い。ただし, $n+i>N$ 及び $n-i<0$ のとき A_n, B_n は 0 とする。(12), (13) の $2N$ 元 1 次の連立方程式から A_n, B_n を求めると温度分布が決定できる。

III. 等角写像を用いた解

以下複素平面における領域で温度分布 T を考えよう。第 2 図で z -平面の領域 D が写像関数 $w=f(z)$ によって w -平面の領域 D' に等角に移されたとすれば D において調和関数 T は D' においても調和, 即ちラプラスの方程式を満足する。また, それぞれの境界上の点 z_0, w_0 ($w_0=f(z_0)$) において $T(w_0)=T(z_0)$ であれば領域内の任意点においても $T(w)=T(z)$ ($w=f(z)$) となる。写像曲線の長さの素片とこれに対応する z -平面上の曲線の長さの素片との比は



第 2 図 z -平面と w -平面
Fig. 2. z -plane and w -plane.

$$\left| \frac{dw}{dz} \right| = |f'(z)| \tag{14}$$

であるから, z -平面の曲線 Γ_1 とそれに対応する w -平面の曲線 Γ_1' に垂直な単位ベクトルをそれぞれ n, n' と書けば

$$\left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_{w=w_0} = \frac{1}{|f'(z_0)|} \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial n'} \right)_{z=z_0} \tag{15}$$

の関係が成立する。したがって, h_0 を定数とするとき w -平面の領域 D' において

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_1' \text{ で } \quad \frac{\partial T}{\partial n'} &= h_0 T \\ \Gamma_2' \text{ で } \quad T &= f(w) \\ \nabla^2 T &= 0 \end{aligned} \right\} \tag{16}$$

を満足する温度分布を求めることは (15) を考慮すれば z -平面の領域 D において

$$\left. \begin{array}{l} \Gamma_1 \text{ で } \quad \frac{\partial T}{\partial n} = h_0 \cdot |f'(z_0)| \cdot T \\ \Gamma_2 \text{ で } \quad T = f(z) \\ \nabla^2 T = 0 \end{array} \right\} \quad (17)$$

を満たす T を求めることと同等となる。第2図の w -平面の領域 D' の点 $w_0 (= f(z_0))$ において (16) を満たす温度は

$$T = \frac{\phi_0}{a-b} (a - \text{Im}(z_0)) + \frac{1}{h_0} \cdot \frac{\phi_0}{a-b} \cdot \frac{1}{|f'(z_0)|} + O(h_0^{-2}) \quad (18)$$

で与えられるから³⁾, z -平面の領域 D の点 z_0 の温度も (18) となり, (2) と (17) の比較から Γ_1 における放熱係数は

$$h = h_0 \cdot |f'(z_0)| \quad (19)$$

となっていることがわかる。なお, この場合 Γ_2 及び Γ_2' における温度分布は $f(z)$ または $f(w)$ を任意に与えるものでなく, モデル及び ϕ_0 等によって (18) から定まるものである。

おわりに, 御指導, 御助言をいただいた, 福富教授をはじめ地球物理学教室陸水学講座の皆様へ厚く感謝します。

1. Steady Temperature Distributions under the Ground Surface (Part 2)

By Koichi URAKAMI

(Department of Geophysics, Faculty of Science, Hokkaido University)

In this paper, two-dimensional differential equation of the heat conduction in steady state is solved by the following methods,

- (i) method of FOURIER series.
- (ii) method of conformal mapping.

If Newton's cooling takes place at the ground surface and its coefficient is a function of horizontal distance x (Fig. 1, Fig. 2), steady temperature under the ground surface are given by eq. (9) and eq. (18).

3) 前出.