



Title	1. 層状泉における熱の移動
Author(s)	浦上, 晃一; URAKAMI, Koichi
Citation	北海道大学地球物理学研究報告, 25, 1-23
Issue Date	1971-03-25
DOI	https://doi.org/10.14943/gbhu.25.1
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/13990
Type	departmental bulletin paper
File Information	25_p1-23.pdf



1. 層状泉における熱の移動

浦上 晃 一

(北海道大学理学部地球物理学教室)

— 昭和45年10月受理 —

I. はじめに

ここで考える温泉の一般的なモデルとして、裂か層状泉または層状泉、即ち温泉水が地下の割れ目から上部の帯水層に湧出し帯水層中を流れているような温泉を選ぶ。このような温泉で、地中から大気中に放出される熱量は熱伝導によって放出される熱量と揚湯などによって流体として放出される熱量の和と考えられているが、揚湯量は温泉開発の度合によっても違い、また熱量を測定した地域内で割れ目から帯水層中に湧出したすべての温泉水が揚湯されるとは考え難く、熱量の地域外への流出が予想され、温泉地の熱エネルギーを論ずる際にもこの流出した熱量を見積る必要がある。

温泉地における熱の移動を決定するには

- i) 速度分布を決定する方程式
- ii) 地下水と温泉水が共存する場合、境界において両者の混合または拡散を決定する方程式
- iii) 熱輸送の方程式

を連立して解かなければならないが、いずれにも係数が定数でない項が含まれ解析解を求めることは困難である。温泉帯水層はそれ程厚くない場合が多いので、i) 及び ii) は平面的な二次元の方程式と考えられるが iii) は三次元としなければならない。数値計算をするにしても iii) が二次元となれば好都合であって、以下、本論文では種々の条件を考慮し、iii) の二次元化及びそれに附随する問題について考える。なお現象はすべて定常状態にあるとする。

II. 伝導による熱の移動

温泉帯水層上端から地表面にかけての地層は不透水層または殆んど温泉水の移動がない地層であることが多く、熱の伝達は伝導のみによると考えてよい。この部分の温度分布は下部の熱源の状態、表面地形、地質構造などに影響され、地表面においてニュートンの冷却則が成立する場合には放熱係数によってもかなり異なる。これらの効果を考慮し、地表付近の不透層中の熱輸送の問題を特に温度分布に注目して考えてみよう。

地表面においてニュートンの冷却則に従って地中の熱が大気中に放出されているとすれば

$$\frac{\partial T}{\partial n} = hT \quad (1)$$

が成立する。地表面に垂直な単位ベクトル (内向きを正) を n と書き、大気の温度は 0°C とした。また h は放熱係数で特別な場合を除き定数とする。地層は均質等方的であるとし、領域内部に熱の sink および source がなければ、温度 T はラプラスの方程式:

$$\nabla^2 T = 0 \quad (2)$$

を満足する (前述の如く、現象は定常状態にあるとする)。二次元として、水平方向に x -軸、鉛直下方に y -軸をとれば、(2)は

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (3)$$

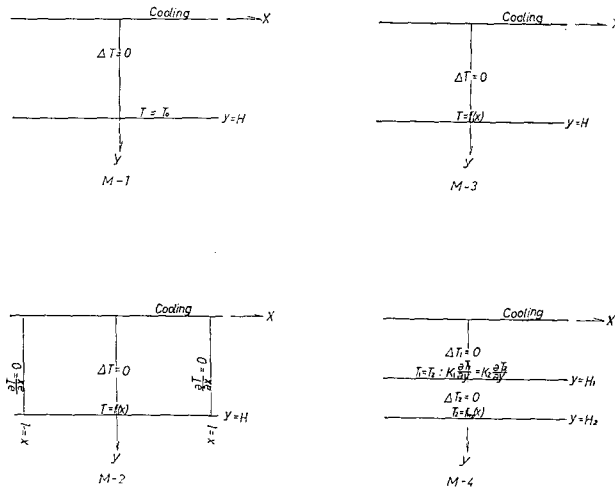
と書ける。さらに地表面が平坦な場合には (1) は

$$\frac{\partial T}{\partial y} = hT \quad (4)$$

となることは明らかであろう。

A) 定常な熱伝導方程式の解

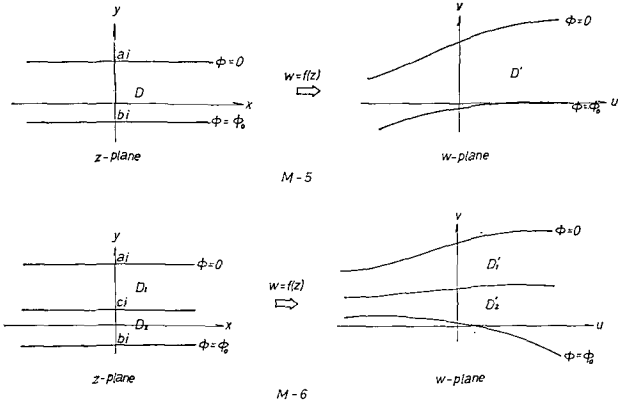
第1図~第3図に示される各々のモデルに関する (1) 及び (3) を満足する温度分布は以下のようになる^{1)~3)}。



第1図 二次元的なモデル

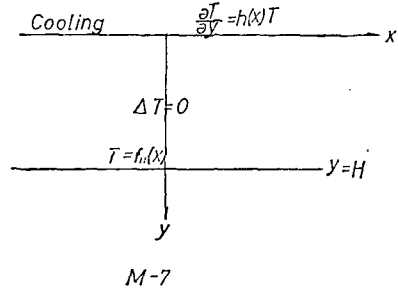
Fig. 1. Two-dimensional models considered here

- 1) 浦上晃一; 1 m 深地温分布から地中の温度分布を推定する方法について, 北海道大学地球物理研究報告, 20 (昭和43年), 1-13.
- 2) 浦上晃一; 定常な地中温度の分布, 北海道大学地球物理研究報告, 23 (昭和45年), 1-8.
- 3) 浦上晃一; 定常な地中温度の分布(その2) 北海道大学地球物理研究報告, 24 (昭和45年), 1-4.



第2図 二次元的なモデル

Fig. 2. Two-dimensional models considered here



第3図 二次元的なモデル

Fig. 3. Two-dimensional models considered here

(1) M-1

$y=H$ における温度 T_0 が一定の場合で一次元の問題と同形となる。

$$T = \frac{hy+1}{hH+1} T_0 \tag{5}$$

(2) M-2

$y=H$ における温度分布が

$$\left. \begin{aligned} T &= f_H(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \alpha_n x \\ a_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f_H(\eta) \cos \alpha_n \eta d\eta \\ \alpha_n &= n\pi/l, \quad (n=0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} \tag{6}$$

で与えられるとき、

$$T = \frac{hy+1}{hH+1} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\alpha_n \cosh \alpha_n y + h \sinh \alpha_n y}{\alpha_n \cosh \alpha_n H + h \sinh \alpha_n H} \cos \alpha_n x \tag{7}$$

となる。

(3) M-3

M-2 で $l \rightarrow \infty$ とした場合

$$T = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha \cosh \alpha y + h \sinh \alpha y}{\alpha \cosh \alpha H + h \sinh \alpha H} f_H(\eta) \cos \alpha(\eta-x) d\eta \tag{8}$$

(4) M-4

熱伝導率が K_1, K_2 と異なる二層に別けられる場合で $y = H_2$ での温度分布を $f_{H_2}(x)$ とすれば領域 D_1, D_2 における温度はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\alpha \int_{-\infty}^\infty \frac{E_5(\alpha)}{E_1(\alpha)} \left\{ \alpha \cosh \alpha y + h \sinh \alpha y \right\} f_{H_2}(\eta) \cos \alpha(\eta-x) d\eta \\ T_2 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\alpha \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{E_2(\alpha)} \left\{ E_5(\alpha) \sinh \alpha(H_2-y) + \sinh \alpha(y-H_1) \right\} \\ &\quad \cdot f_{H_2}(\eta) \cos \alpha(\eta-x) d\eta \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

で与えられる。ここで

$$\left. \begin{aligned} E_1(\alpha) &= \alpha \cosh \alpha H_1 + h \sinh \alpha H_1 \\ E_2(\alpha) &= \sinh \alpha(H_2 - H_1) \\ E_3(\alpha) &= \alpha \sinh \alpha H_1 + h \cosh \alpha H_1 \\ E_4(\alpha) &= \cosh \alpha(H_2 - H_1) \\ E_5(\alpha) &= \frac{\frac{K_2}{E_2(\alpha)}}{\frac{E_3(\alpha)}{E_1(\alpha)} K_1 + \frac{E_4(\alpha)}{E_2(\alpha)} K_2} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

である。有限の所 ($x = \pm l$) に断熱的な境界を置いた場合には α が $\alpha_n = n\pi/l$, 積分が総和となって $M-2$ に対応する解が得られ, 計算にはこれを用いた。

(5) $M-5$

地表面が簡単な曲線で表わされる場合で w -平面の領域 D' の点 w_0 における温度は

$$\left. \begin{aligned} w_0 &= f(z_0) \\ T &= \frac{\phi_0}{a-b} \left\{ a - \operatorname{Im}(z_0) \right\} + \frac{1}{h} \frac{\phi_0}{a-b} \frac{1}{|f'(z_0)|} + 0(h^{-2}) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

となる。ここで $f(z)$ は z -平面の領域 D を w -平面の領域 D' に等角に写像する関数である。

(6) $M-6$

$M-5$ で熱伝導率が K_1, K_2 と異なる二層に別けられる場合で w -平面の領域 D'_1, D'_2 の点 $w_1 (= f(z_1)), w_2 (= f(z_2))$ の温度はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= \frac{\phi_0}{A} E \left[a - \operatorname{Im}(z_1) + \frac{1}{h} \frac{1}{|f'(z_1)|} \right] + 0(h^{-2}) \\ T_2 &= \frac{\phi_0}{A} \left[E(a-b) + b - \operatorname{Im}(z_2) + \frac{1}{h} \frac{1}{|f'(z_2)|} \right] + 0(h^{-2}) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} E &= K_2/K_1 \\ A &= E(a-b) + b - c \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

である。

(7) $M-7$

放熱係数が場所 (x) の関数の場合で次の二通りの方法で解が求められている。

(i) フーリエ級数を用いた解

(2)で

$$\left. \begin{aligned} h &= h_0 + \sum_{n=1}^N h_n \cos \alpha_n x \\ \alpha_n &= n\pi/l \quad (n=1, 2, \dots, N) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

と表わされるとき、温度分布を近似的に

$$T = \frac{h_0 y + 1}{h_0 H + 1} \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^N (A_n e^{\alpha_n y} + B_n^- e^{-\alpha_n y}) \cos \alpha_n x \quad (15)$$

とおき、 $y=H$ における温度分布を

$$T = f_H(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cos \alpha_n x \quad (16)$$

とすれば(15)の係数 A_n , B_n は

$$\left. \begin{aligned} n\beta(A_n - B_n) &= h_0(A_n + B_n) + \frac{\alpha_0}{h_0 H + 1} h_n \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\epsilon=0}^N \left\{ (A_{n-\epsilon} + B_{n-\epsilon}) h_\epsilon + (A_{n+\epsilon} + B_{n+\epsilon}) h_\epsilon \right\} \\ A_n e^{n\beta H} + B_n e^{-n\beta H} &= a_n \\ n &= 1, 2, \dots, N \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

から決定される。ただし、 A_n , B_n は $n \leq 0$, $n > N$ のときは0とし、また $\beta = \pi/l$ である。

この解で係数 A_n , B_n は収束が悪く近似方法が適切でないと思われる。

(ii) 等角写像を用いた解

$$h = h_0 |f'(z_0)| \quad (18)$$

のとき

$$T = \frac{\phi_0}{a-b} \left(a - \text{Im}(z_0) \right) + \frac{1}{h_0} \frac{\phi_0}{a-b} \frac{1}{|f'(z_0)|} + O(h_0^{-2}) \quad (19)$$

となる。 $f(z)$ は写像関数であるが(19)は z -平面の点 z_0 における温度である。

この解で放熱係数および温度分布が共に $f(z)$ の関数であってそれぞれ独立に選ぶことができない。このように(i)および(ii)は放熱係数の場所的な違いによる効果を調べるには不適当である。そこで、境界条件:

$$\left. \begin{aligned} y=0 \text{ で } T &= f_0(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \alpha_n x \\ y=H \text{ で } T &= f_H(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos \alpha_n x \\ \alpha_n &= \frac{n\pi}{l} \quad (n=1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

を満足し、ラプラスの方程式(3)を満足する解:

$$T = \frac{1}{2H} \left\{ (b_0 - a_0)y + a_0 H \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \sinh \alpha_n (H-y) + b_n \sinh \alpha_n y}{\sinh \alpha_n H} \cos \alpha_n x \quad (21)$$

を用いる。

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{2H} (b_0 - a_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n \{-a_n \cosh \alpha_n (H-y) + b_n \cosh \alpha_n y\}}{\sinh \alpha_n H} \cos \alpha_n x \quad (22)$$

であるから、放熱係数は

$$h = \frac{\frac{1}{2H} (b_0 - a_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n (-a_n \cosh \alpha_n H + b_n)}{\sinh \alpha_n H} \cos \alpha_n x}{f_0(x)} \quad (23)$$

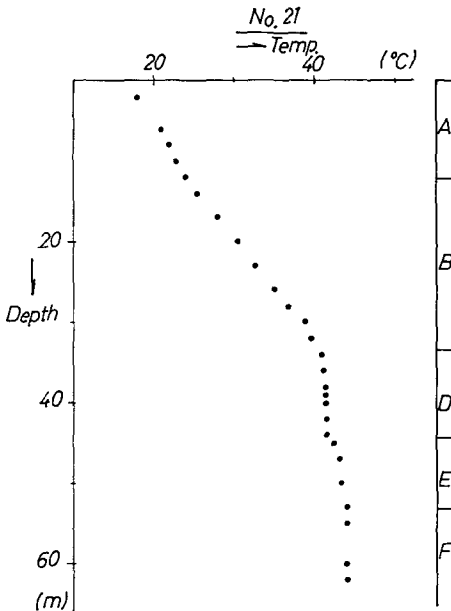
となって $f_H(x)$ を固定すれば h と $f_0(x)$ とは 1 対 1 に対応している。特に $f_H(x) = T_0 = \text{const.}$ とすると (23) は

$$h = \frac{1}{f_0(x)} \left[\frac{1}{2H} (2T_0 - a_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\alpha_n a_n \cosh \alpha_n H}{\sinh \alpha_n H} \right] \cos \alpha_n x \quad (24)$$

となる。

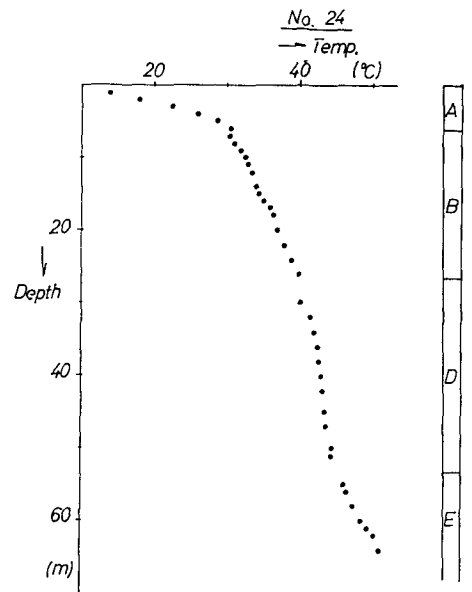
B) 鉛直温度分布の直線近似

温泉地域での地中温度の分布の例として山形県東根温泉において測定された廃井中の水温の鉛直分布及び孔底温度の水平分布⁴⁾を第4図～第8図に示した。水平方向の温度の傾き $|\partial T/$



第4図 東根温泉で測定された孔内水温の鉛直分布 (No. 21)

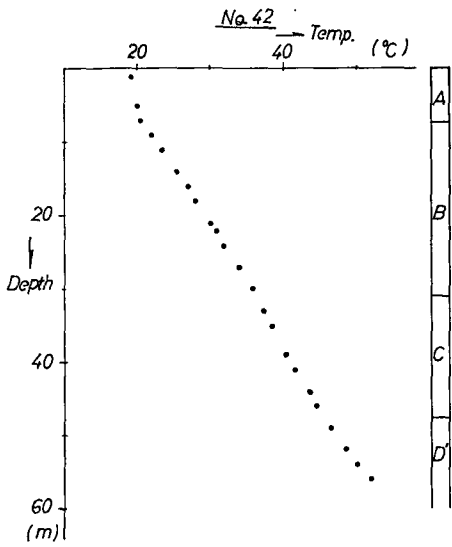
Fig. 4. Vertical distribution of underground temperature at Higashine Spa.



第5図 東根温泉で測定された孔内水温の鉛直分布 (No. 24)

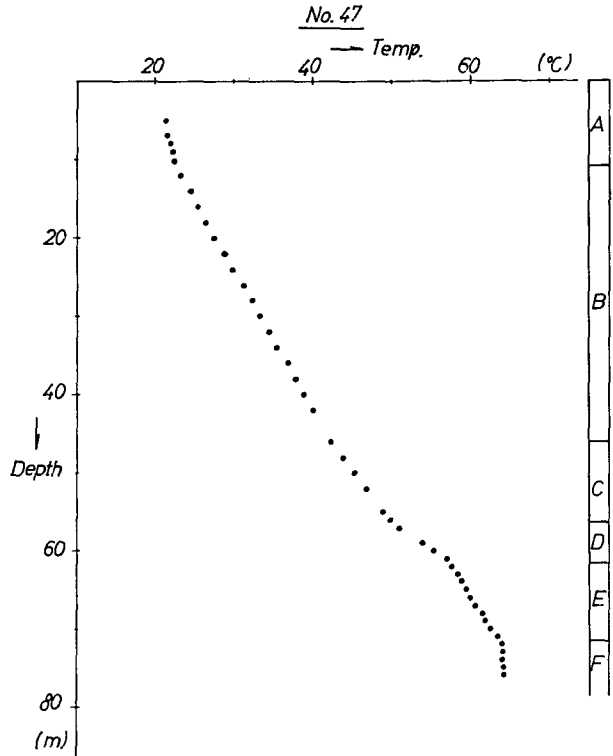
Fig. 5. Vertical distribution of underground temperature at Higashine Spa.

4) 浦上晃一・他；山形県東根温泉の調査，北海道大学地球物理研究報告，22 (昭和44年)，9-29.



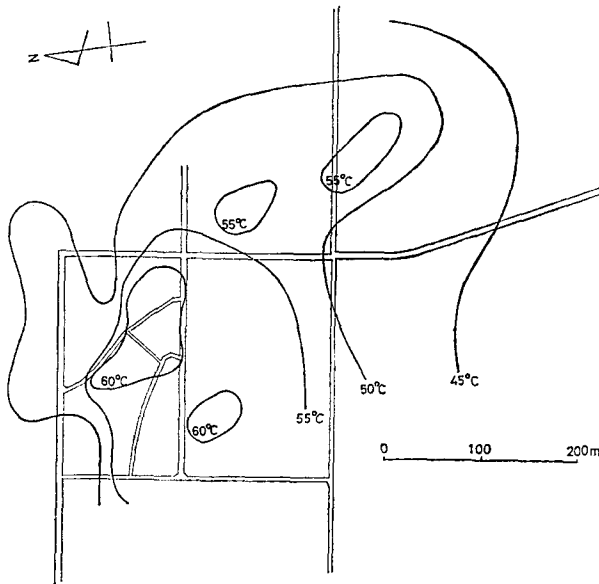
第6図 東根温泉で測定された孔内水温の鉛直分布 (No. 42)

Fig. 6. Vertical distribution of underground temperature at Higashine Spa.



第7図 東根温泉で測定された孔内水温の鉛直分布 (No. 47)

Fig. 7. Vertical distribution of underground temperature at Higashine Spa.



第8図 東根温泉で測定された孔底温度の分布

Fig. 8. Distribution of bottom temperature of hot spring wells at Higashine Spa.

∂x (約 $0.1^\circ\text{C}/\text{m}$ 程度) は鉛直方向の傾き $|\partial T/\partial y|$ ($1^\circ\text{C}/\text{m}$ 程度) に比べてかなり小さい。他の地域で測定された結果もほぼ同様の傾向を示しており、温泉脈がそれ程深くない所にある地域では $|\partial T/\partial x| \ll |\partial T/\partial y|$ と考えてよい。

これは水平方向の熱の移動が無視できることを意味し、その結果 (3) は一次元の方程式:

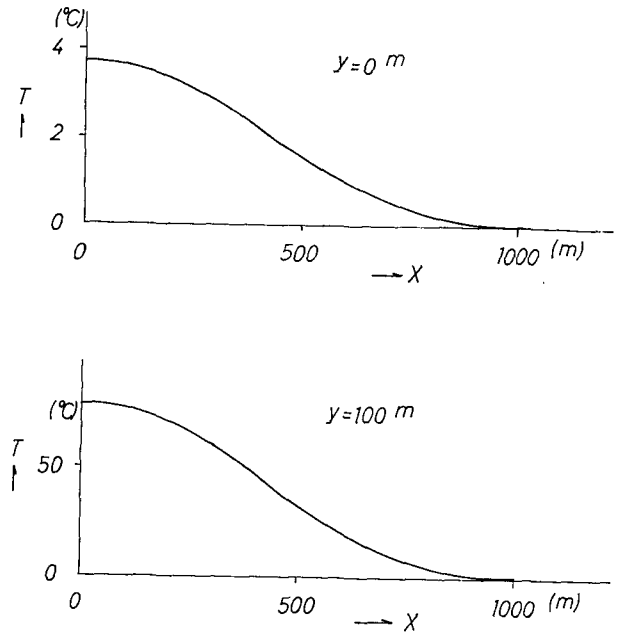
$$\frac{d^2 T}{dy^2} = 0 \quad (25)$$

となって解は一次関数で (5) で与えられる。したがって地中温度の鉛直分布は直線で近似してよいであろう。

第9図に $y=100\text{ m}$ の温度分布を与えたとき、(7) を用いて計算した

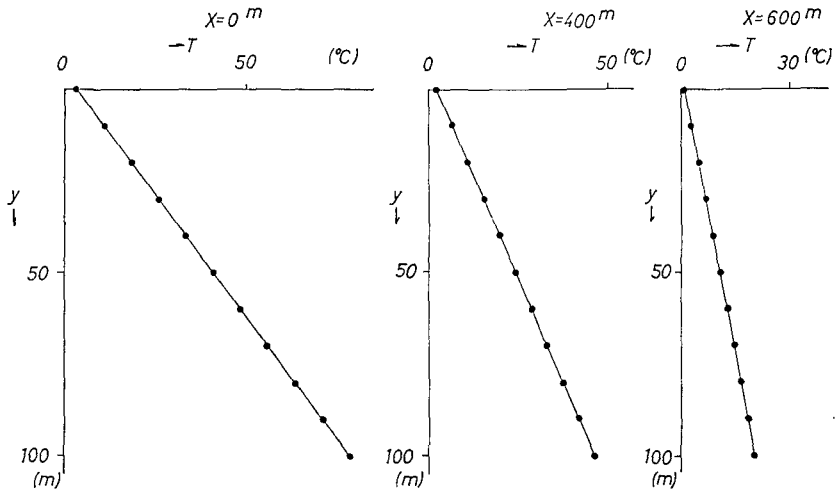
地表面の温度分布を示した。 $x=0\text{ m}$, 400 m , 600 m における鉛直断面の温度分布が第10図であり、計算値 (図中の●印) は (5) の直線にほぼ一致している。

この例では $l=3000\text{ m}$, $h=0.2\text{ m}^{-1}$ としたが、 $l=750\text{ m}$, $h=0.2\text{ m}^{-1}$ の計算結果が第11図



第9図 $f_H(x)$ ($H=100\text{ m}$) と (7) を用いて計算した地表面の温度分布

Fig. 9. $f_H(x)$ and temperature distribution at ground surface calculated from (7)



第10図 (7) を用いて計算した鉛直断面の温度分布

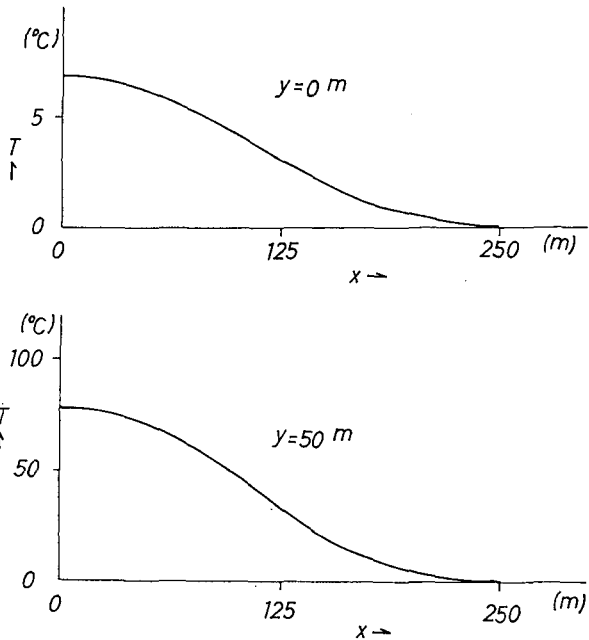
Fig. 10. Vertical distribution of temperature calculated from (7)

および第 12 図である。

地表面が簡単な曲線で表わされる場合、(11), (12) から求めた結果が第 14 図～第 16 図であって、写像関数として $f(z) = z + e^z$, 放熱係数として $h = 2 \text{ m}^{-1}$ を用いた。第 13 図の地表面に直交する直線 A, B, C 上の温度分布である。実線は $w = 0$ と直線の交点での温度と地表の温度を結ぶ線、破線は熱伝導率の異なる二層に別けられる場合である。B, C と地表の傾きが大きくなるにしたがって直線からのずれは増加するが、ずれは比較的小さい。

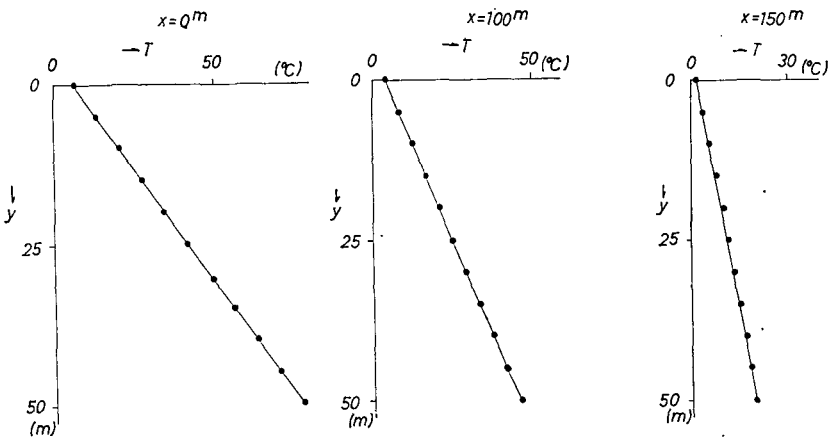
第 17 図は $y = 50 \text{ m}$ の温度を 82°C と一定にしたとき、(21) から求めた温度分布である。地表面における温度分布およびそれに対応する放熱係数を第 18 図に示した。鉛直方向の温度勾配が大であるため地表の温度変化が強調されているが、放熱係数の違いによって第 18 図のような分布が得られることは興味深い。

以上の計算結果からも地中温度の鉛直（地表面が傾斜しているときはそれに直交する線上の）分布が直線で近似できるといえよう。



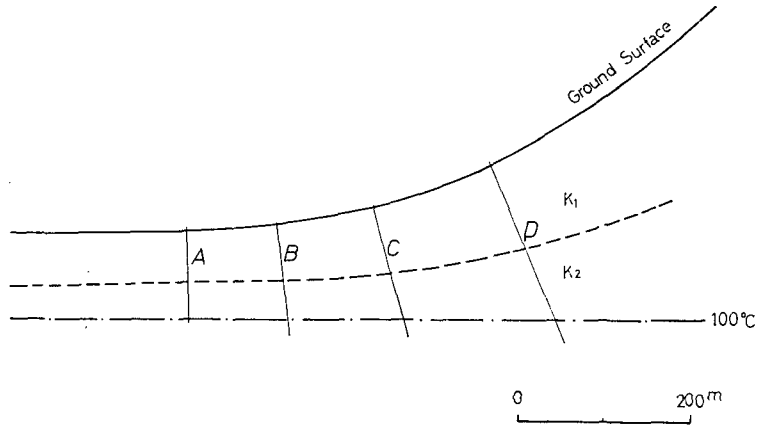
第 11 図 $f_H(x)$ ($H=50 \text{ m}$) と (7) を用いて計算した地表面の温度分布

Fig. 11. $f_H(x)$ and Temperature distribution at ground surface calculated from (7)



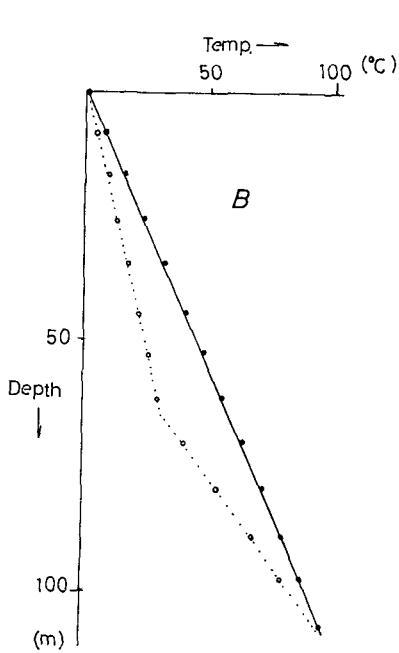
第 12 図 (7) を用いて計算した鉛直断の温度分布

Fig. 12. Vertical temperature distribution calculated from (7)

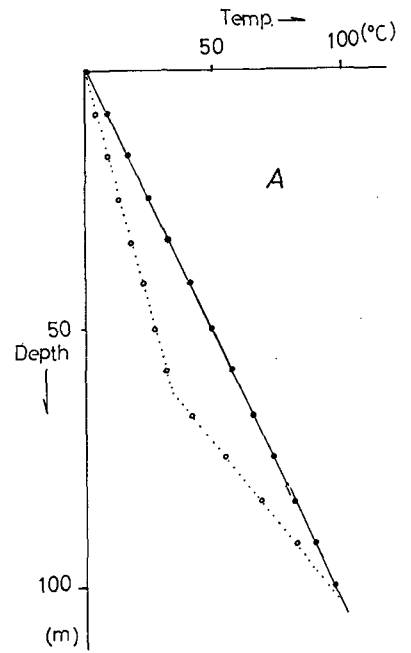


第13図 地表面が簡単な曲線で表わされるモデル

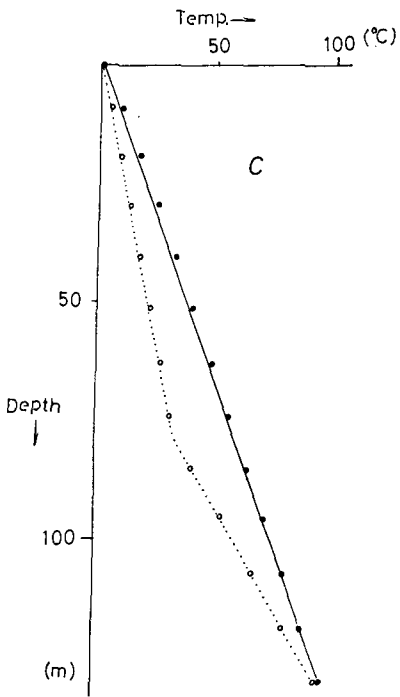
Fig. 13. Model of curved surface



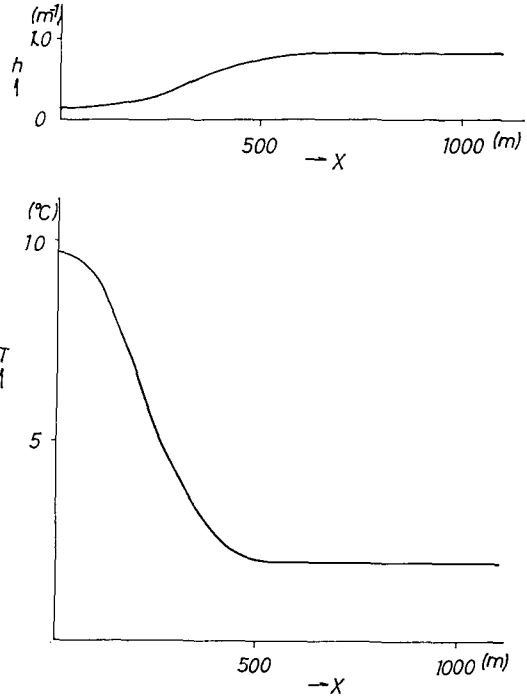
第14図 第13図の直線 A 上の温度分布
Fig. 14. Temperature distribution on A (shown by Fig. 13)



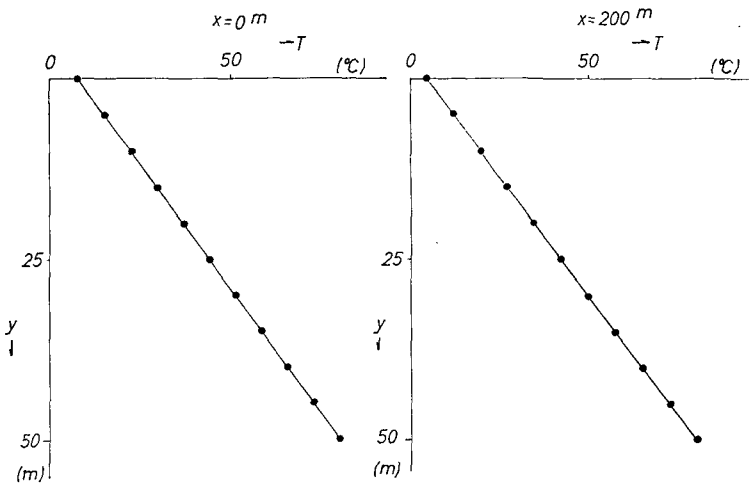
第15図 第13図の直線 B 上の温度分布
Fig. 15. Temperature distribution on B (shown by Fig. 13)



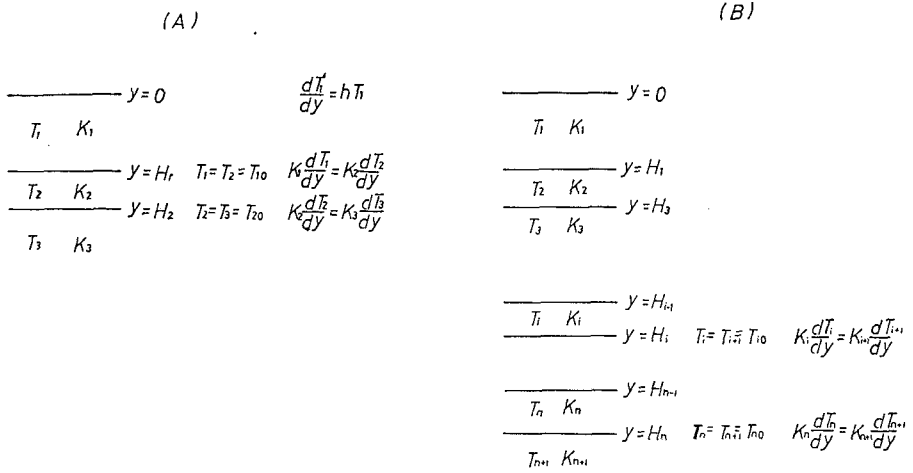
第16図 第13図の直線C上の温度分布
Fig. 16. Temperature distribution on C (shown by Fig. 13)



第17図 放熱係数と地表面における温度分布
Fig. 17. Coefficient of radiation and temperature distribution at ground surface



第18図 (21)を用いて計算した鉛直断面の温度分布
Fig. 18. Vertical temperature distribution calculated from (21)



第19図 一次元のモデル
Fig. 19. One-dimensional model

第19図のように熱伝導率の異なる地層に別かれている場合には温度分布は折れ曲がった直線で表わされるであろう。(A)において、 T_1 は

$$T_1 = \frac{T_{10} - T_{00}}{H_1} y + T_{00} \tag{26}$$

となる。地表面 ($y=0$) ではニュートンの冷却則:

$$\frac{dT_1}{dy} = hT_{00} \tag{27}$$

が成立する。(26), (27) から

$$T_1 = \frac{hy + 1}{hH_1 + 1} T_{10} \tag{28}$$

となつて、領域 D_1 の温度勾配は

$$\frac{dT_1}{dy} = \frac{h}{hH_1 + 1} T_{10} \tag{29}$$

$h'_1 = h/(hH_1 + 1)$ とし、 T_{10} が $y=H_1$ の温度であることを考慮すれば、 $y=H_1$ においても

$$\frac{dT_1}{dy} = h'_1 T_1 \tag{30}$$

とニュートンの冷却則と同様の法則が成り立つ。上式は D_1 の温度勾配を与えているが、 $y=H_1$ では条件:

$$\left. \begin{aligned} K_1 \frac{dT_1}{dy} &= K_2 \frac{dT_2}{dy} \\ T_1 &= T_2 = T_{10} \end{aligned} \right\} \tag{31}$$

を満足しなければならないから、 $h_2 = \frac{K_1}{K_2} h'_1$ とおいて

$$\frac{dT_2}{dy} = h_2 T_2 \quad (32)$$

すると、領域 D_2 の現象を問題にすると、 D_1 の地層を剥ぎ取り $y=H_1$ における境界条件として (32) を用いるとよい。一般に $n+1$ 個の地層があるとき (第 19 図 (B)), $y=H_n$ で

$$\frac{dT_n}{dy} = h'_n T_n \quad (33)$$

$$\frac{dT_{n+1}}{dy} = h_{n+1} T_{n+1} \quad (34)$$

が成立する。ここで、 h'_n, h_{n+1} は

$$\left. \begin{aligned} h'_n &= \frac{h'_{n-1} \frac{K_{n-1}}{K_n}}{h'_{n-1} (H_n - H_{n-1}) \frac{K_{n-1}}{K_n} + 1} \\ h_n &= \frac{K_n}{K_{n+1}} h'_n \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

である。 $K_n/K_{n+1} = (dT_n/dy)/(dT_{n+1}/dy)$ であるから異なる地層の温度勾配の比が求まれば h'_n, h_{n+1} は (35) から決定できる。東根温泉の測定結果 (第 4 図~第 7 図参照) から計算した深 10 m 毎の h'_n を第 1 表に載せた。

第 1 表

(単位は m^{-1})

Depth (m)	No. 1	3	10	21	24	42	47
0	0.667	0.050	0.063	0.063	0.012	0.019	0.015
10	0.090	0.075	0.039	0.039	0.015	0.048	0.013
20	0.047	0.043	0.028	0.037	0.014	0.033	0.027
30		0.030	0.014	0.027	0.005	0.025	0.021
40					0.005	0.016	0.017
50					0.005	0.022	0.019
60					0.014	0.018	0.031
70							0.011

III. 帯水層中の温泉水の冷却

温泉水または地下水などの流体の移動がない不透水層では熱は伝導のみによって伝達される。さらに、層状泉地域の地表附近の不透水層において地温の鉛直分布は直線で近似され、その結果、ある深さにおいて地表面におけるニュートンの冷却則と同様の方則が成立することがわかった。一方、温泉水および地下水の流動に伴う熱の移動は伝導によるものより大きく帯水層およびその周囲の温度分布はこれら流体の流動状況に強く影響されると思われる。したがって、層状泉地域に地中温度の分布あるいは熱輸送の問題を論ずる際にはこの効果を見積る必要があるが、一般的に議論を進めるには種々の困難を伴うので簡単なモデルについて考えよ

う。ボーリングおよび地球物理学的な調査の結果，層状泉型温泉の帯水層は比較的薄い例が多く，本節の議論が成立する場合も多いと思われる。

帯水層中の定常な熱輸送の方程式は

$$\rho cu \nabla T = K \nabla^2 T \tag{36}$$

で与えられる。ここで ρ は流体の密度， c は比熱である。 u は流体の流速でベクトルであるが単に u と書いた。また K は媒質（考えている流体によって飽和されている）の熱伝導率である。

第 20 図のように一定の厚さの帯水層中を一様な速度 u で流体が運動しているとき，伝導による水平方向（流体の流れの方向）の熱の移動が無視できるとすれば，(36)は

$$\rho cu \frac{\partial T}{\partial x} = K \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{37}$$

となる。さらに

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad \left(\kappa = \frac{K}{\rho cu} \right) \tag{38}$$

と変形し， x を時間 t に対応させると一次元の非定常な熱伝導方程式と同形となる。帯水層下端でも (34) と同様の方法が成り立つと仮定すると，帯水層の上端，下端における条件は dT/dy が $\partial T/\partial y$ に変り

$$\left. \begin{aligned} y=0 \text{ で } \frac{\partial T}{\partial y} &= h_1 T \\ y=l \text{ で } \frac{\partial T}{\partial y} &= h_2 T \end{aligned} \right\} \tag{39}$$

となる。

$$x=0 \text{ で } T = T_0 = \text{const.} \tag{40}$$

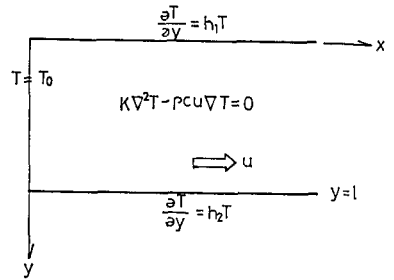
とすれば， $h_2=0$ のとき，即ち $y=l$ に断熱的な境界を考えた場合，これらの境界条件を満足する解は

$$T = T_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2L \cos \{ \alpha_n(l-y)/l \} \sec \alpha_n}{L(L+1) + \alpha_n^2} e^{-\alpha_n^2 x} \tag{41}$$

で与えられる⁵⁾。ここで α_n は

$$\alpha \tan \alpha = L \tag{42}$$

を満たす正根であり



第 20 図 帯水層中の熱輸送についてモデル

Fig. 20. Model for heat transfer in aquifer bounded by parallel planes

5) CARSLAW and JAEGER; Conduction of Heat in Solids, Oxford, 121-126.

$$\left. \begin{aligned} L &= lh_1 \\ Y &= \kappa \frac{x}{l^2} \end{aligned} \right\} (43)$$

である。

また $h_2 \neq 0$ のとき、CARSLAW and JEAGER の解を拡張すると方程式 (38) 及び境界条件 (39) を満足する解は

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(y) e^{-\epsilon_n^2 x} \int_0^l Z_n(y) f(y) dy \quad (44)$$

である⁵⁾。ここで

$$Z_n(y) = \frac{[2(\beta_n^2 + h_2^2)]^{1/2} (\beta_n \cos \beta_n y + h_1 \sin \beta_n y)}{\{(\beta_n^2 + h_1^2) [(\beta_n^2 + h_2^2) l - h_2] + h_1(\beta_n^2 + h_2^2)\}^{1/2}} \quad (45)$$

β_n は

$$(\beta_n^2 + h_1 h_2) \sin \beta_n l = \beta_n (h_1 - h_2) \cos \beta_n l \quad (46)$$

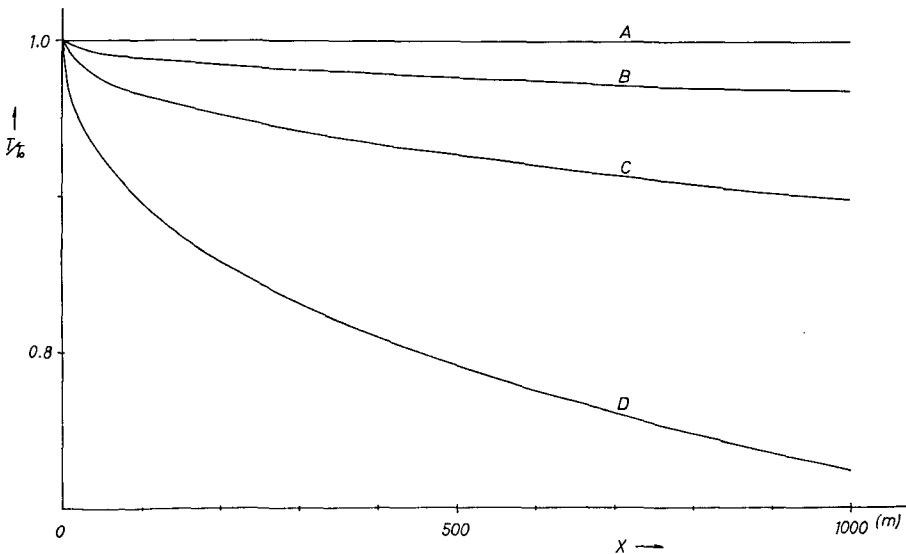
を満たす正根であって、 $f(y)$ は $x=0$ における温度分布である。 h_1, h_2 は放熱、熱の吸収にしたがって正負の符号を取る。

第2表のような値について (41) から計算した温度分布を第21図～第23図に示した。

第21図は $y=0$ 即ち帯水層上端の T/T_0 であるが、 $x=0$ の近くでは急に低下しその後ほぼ直線的に

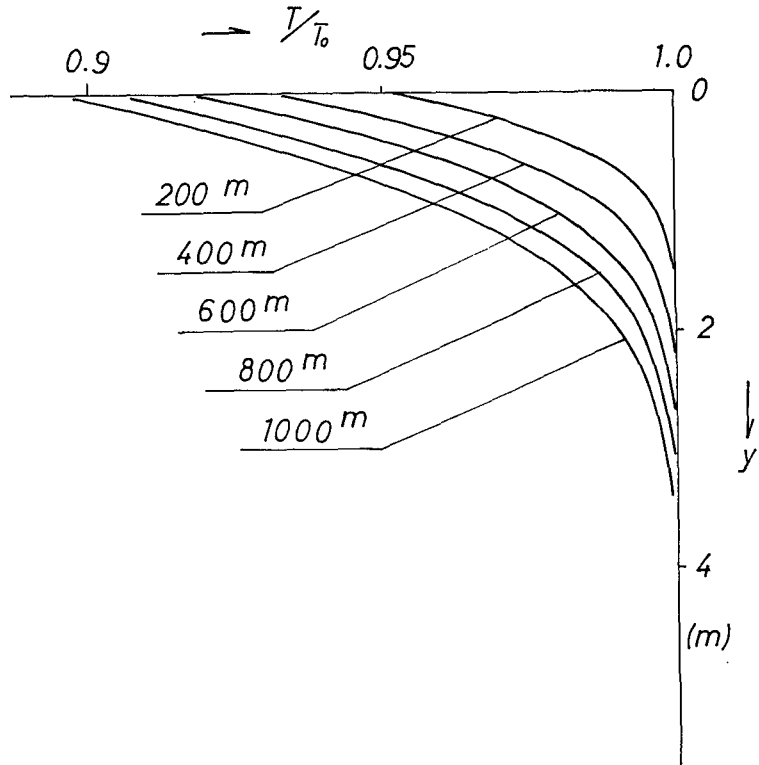
第2表

	h (cm^{-1})	K (cm)
A	2.0×10^{-4}	1.0×10^{-1}
B	1.0×10^{-4}	1.0
C	1.0×10^{-3}	1.0×10^{-1}
D	1.0×10^{-3}	1.0



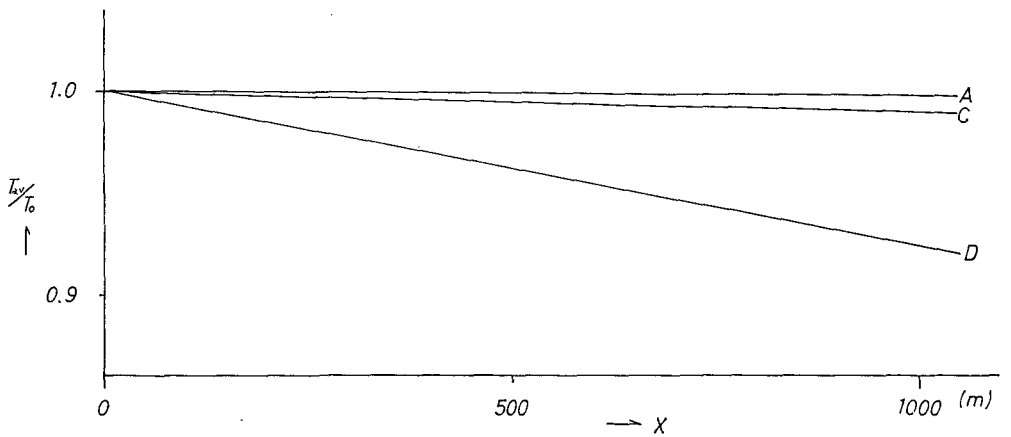
第21図 帯水層表面の温度分布

Fig. 21. Surface temperature distribution calculated from (41)



第 22 図 鉛直断面の温度分布

Fig. 22. Vertical Temperature distribution in aquifer



第 23 図 平均温度の分布

Fig. 23. Average temperature distribution in aquifer, calculated from (41)

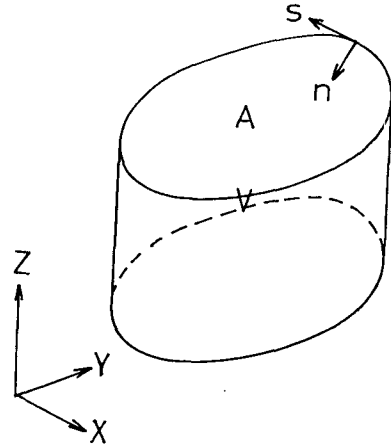
低下している。図中、 D の温度低下が最も大きく 1000 m 流下したとき 27.6% の低下が見られる。この場合、放熱係数 h_1 を $13^{-3} \text{ cm}^{-1} = 10^{-1} \text{ m}^{-1}$ と大きな値で、また $\kappa = K/\rho C u$ は 1.0 cm であり K は $10^{-3} \text{ cal} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{sec}^{-1} \cdot ^\circ\text{C}$ の order であり $\rho C = 1.0 \cdot \text{cal} \cdot \text{cm}^{-3} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$ であるから流速は

ほぼ $10^{-3} \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-1} = 8.6 \times 10^{-1} \text{ m} \cdot \text{day}^{-1}$ とかなり小さな値を用いている。温泉水の流速の実測例はほとんどなく、放熱係数の測定例も少ないので確かなことはいえないが実際の温度低下は高々 D の程度と想像される。

第 22 図は $x=200 \text{ m}, 400 \text{ m}, 600 \text{ m}, 800 \text{ m}, 1000 \text{ m}$ の各鉛直断面における T/T_0 (計算に用いた値は第 2 表の C) である。他の場合も同様の傾向を示している。第 23 図は各鉛直断面の T_{av}/T_0 (T_{av} は断面の平均温度すなわち $T_{av} = \frac{1}{L} \int_0^L T(x, y) dy$) と x の関係で、ほぼ直線の変化が見られる。

帯水層上端の単位面積を通過して放出される熱量は $K \cdot \partial T / \partial y$ であり、帯水層の表面温度 T_s を用いて表わせれば (39) から $K h_1 T_s$ となる。帯水層がそれ程がそれ程厚くないとき、 T_s の代わりに T_{av} を用いても大差ないと思われる。天然の帯水層では、種々の原因によって温泉水の流速分布に乱れが生じ、また拡散現象も考えられるので鉛直断面の温度分布の平均化が起きるのであろう。これは放熱量を見積るとき、 T_s の代わりに T_{av} を用いた場合の差を減少させる効果がある。このように帯水層中を流動している温泉が上部の地層に放出される熱量は平均温度 T_{av} に比例すると考えてよいであろう。

帯水層中にとった体積要素 (第 24 図) に対して、
 T_{av} : 帯水層の鉛直断面の平均温度、
 q_H : 温泉水の単位幅あたりの流量、
 K : 帯水層熱伝導率、
 h' : 帯水層上端における放熱係数 ((33) の h'_n に対応する)、
 K' : 上部地層の熱伝導率、
 h'' : 帯水層下端の放熱係数、
 K'' : 下部の地層の熱伝導率、
 ρ : 温泉水の密度、
 C : 温泉水の比熱、
 q_v : 揚湯量または帯水層中に流入する温泉水の量 (領域からの流出を正とする) とすれば、水平方向の熱の移動は温泉水の流動によって $\oint (\rho c q_H \cdot T_{av})_n ds$ 、伝導によって $\oint_S (-\text{grad } T_{av})_n ds$ 、鉛直方向では、単位断面積の鉛直は柱の上端から放出される熱量は $K' h' T_{av}$ 、下端から放出される熱量は $K'' h'' T_{av}$ 、と表せるから伝導によって $\int_A (K' h' + K'' h'') T_{av} dA$ (帯水層中に熱が流入する場合、 h', h'' を負とする)、もし温泉水の sink または source があれば $\int_A \rho c q_v T_{av} dA$ である。



第 24 図 帯水層中にとった体積要素
 Fig. 24. Volume element in aquifer

これらに保存則を適用すると

$$\oint (\rho c q_H T_{av} - K \text{ grad } T_{av})_n ds - \int_A (K' h' + K'' h'' + \rho c q_H) T_{av} dA = 0 \quad (47)$$

発散定理を用いて

$$\int_A \left\{ \text{div} (\rho c q_H T_{av} - K \text{ grad } T_{av}) - (K' h' + K'' h'' + \rho c q_H) T_{av} \right\} dA = 0 \quad (48)$$

A は任意であるから

$$K \nabla^2 T_{av} - \rho c \nabla \cdot (q_H T_{av}) - K' h' T_{av} - K'' h'' T_{av} - \rho c q_v T_{av} = 0 \quad (49)$$

が得られる。 ∇ は二次元の微分演算子であり、左辺の第 3~5 項は境界条件を含め二次元化したため生じた項である。

(49) を簡単なモデルに適用して温泉水の冷却の問題を考えよう。

第 25 図のように割れ目が直線状に無限に続いている場合、(49) は一次元の方程式となり、また流れの方向での温度勾配が小さく伝導による熱輸送が無視できるとすれば

$$\rho c \frac{d}{dx} (q_H T_{av}) = - (K' h' + K'' h'') T_{av} - \rho c q_v T_{av} \quad (50)$$

さらに帯水層下端では断熱的な境界 ($h''=0$) を考え、割れ目以外に sink または source がないとすれば、連続の条件を用いて

$$\rho c q_H \frac{dT_{av}}{dx} = - K' h' T_{av} \quad (51)$$

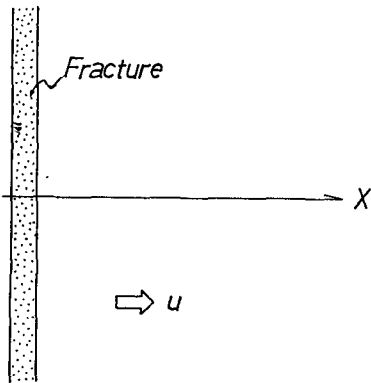
境界条件; $x=0$ で $T_{av}=T_0$, を満足する解は

$$T_{av} = T_0 e^{-\alpha x}, \quad \alpha = \frac{K' h'}{\rho c q_H} \quad (52)$$

となる。

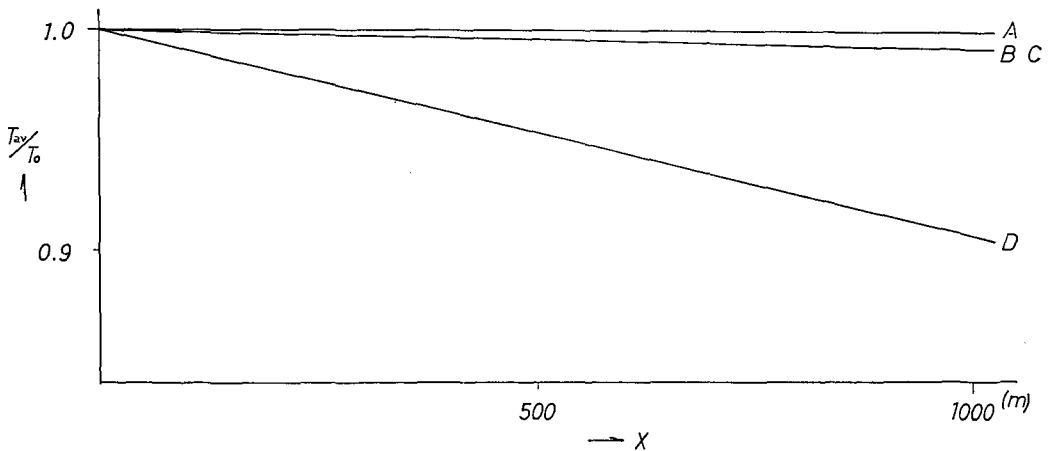
第 3 表

	h' (cm^{-1})	K' ($\text{cal}\cdot\text{cm}^{-1}\cdot\text{sec}\cdot^\circ\text{C}^{-1}$)	q_H ($\text{cm}^3\cdot\text{sec}^{-1}$)
A	2.0×10^{-4}	1.0×10^{-3}	1.0×10
B	1.0×10^{-4}	1.0×10^{-3}	1.0
C	1.0×10^{-3}	1.0×10^{-3}	1.0×10
D	1.0×10^{-3}	1.0×10^{-3}	1.0



第 25 図 簡単な層状泉のモデル

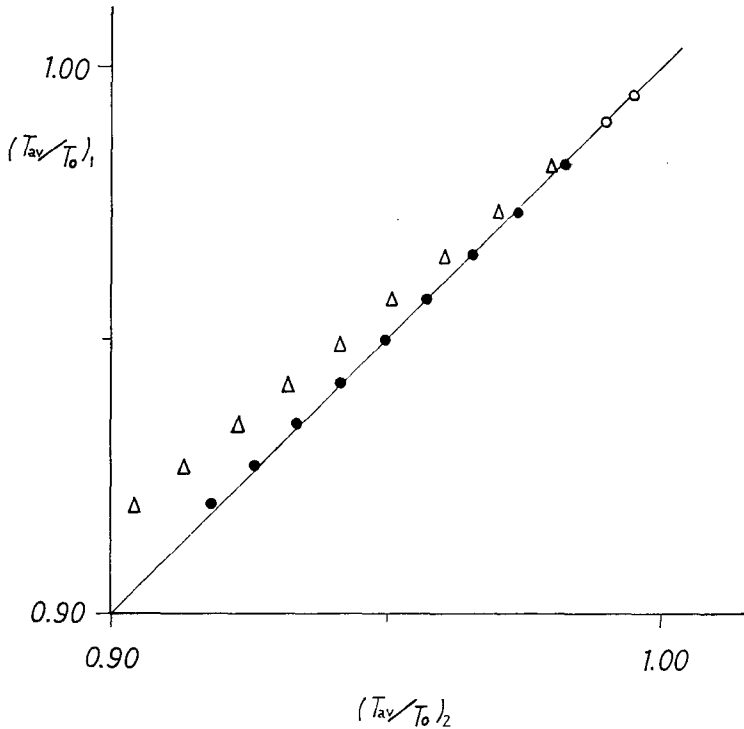
Fig. 25. Schematic representation of hot water flow system considered here



第 26 図 温泉水の温度分布

Fig. 26. Temperature distribution of hot water

第3表の数値を用いて(52)から求めた T_{av}/T_0 が第26図である。第3表の数値は第2表のそれに対応している。たとえば、Aでは $h'=1.0 \times 10^{-3} \text{ cm}^{-1} = h_1$, $K'=1.0 \times 10^{-3} \text{ cal} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{sec}^{-1} \cdot \text{C}^{-1} = K$, $q_H = u \cdot l = 1.0 \times 10 \text{ cm}^3 \cdot \text{sec}^{-1}$ である。 $K'=K$, $h'=h_1$ であるから(41)と(52)は同一のモデルに対する解となっている。第26図の分布はほぼ直線であって第23図と類似な形を示している。両者の関係をさらに詳細に調べるため第27図を作った。(41)の温度 $(T_{av}/T_0)_1$, (52)の温度 $(T_{av}/T_0)_2$ をそれぞれ縦軸、横軸にとった。図中、直線は $(T_{av}/T_0)_1 = (T_{av}/T_0)_2$ の点であり、○印はc, △印はDである。温度の低下が小さいとき両者はほとんど等しいが、低下量が大きくなるにしたがって直線からのずれも増し、(52)は帯水層からの放熱量を過大に見積もっているため上方にずれる。●印はDの放熱係数だけを $8.5 \times 10^{-4} \text{ cm}^{-1}$ と小さくした場合(52)から求めた値と第21図のDとをプロットしたものでほぼ直線上にある。



第27図 $(T_{av}/T_0)_1$ と $(T_{av}/T_0)_2$ の関係
 Fig. 27. Relation between $(T_{av}/T_0)_1$ and $(T_{av}/T_0)_2$

第25図で $h''=0$, 単位面積あたり $q_v = \text{const}$ の揚湯が行なわれている場合, $x=0$ で $q_H=Q$ とすれば, $q_H=Q-q_v x$ であるから

$$\frac{d}{dx} (q_H T_{av}) = -q_v T_{av} + (Q - q_v x) \frac{dT_{av}}{dx}$$

したがって(50)は

$$\rho c(Q - q_v x) = \frac{dT_{av}}{dx} = -K'h'T_{av} \quad (53)$$

$x=0$ で $T_{av} = T_0$ とすれば

$$T_{av} = T_0 \left(1 - \frac{q_v}{Q} x\right)^\alpha, \quad \alpha = \frac{K'h'}{\rho c q_v} \quad (54)$$

となる。 $q_v x/Q \ll 1$ のとき

$$T_{av} = T_0 \left\{1 - \alpha \frac{q_v}{Q} x + 0 \left(\left(\frac{q_v}{Q} x \right)^2 \right) \right\} \quad (55)$$

したがって

$$T_{av} \approx T_0 \left(1 - \alpha \frac{q_v}{Q} x\right) \quad (56)$$

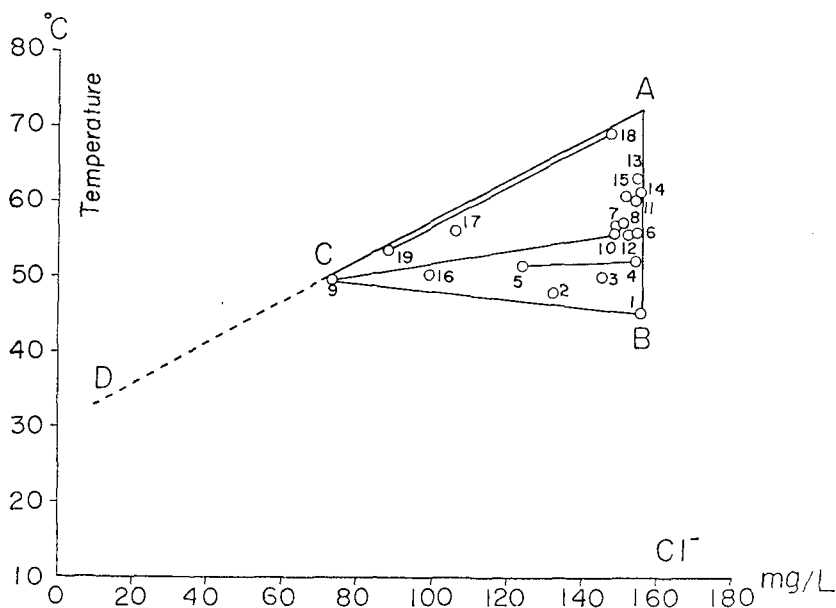
いま、 $dT/dx = -T_{gr}$ とすると

$$T_{gr} \approx \frac{K'h'}{\rho c q_v} \frac{q_v T_0}{Q} = \frac{K'h'}{\rho c Q} T_0 \quad (57)$$

となって、 $x=0$ における流量 Q が

$$Q \approx \frac{K'h'T_0}{\rho c T_{gr}} \quad (58)$$

と求まる。例として山形県天童温泉で得られた資料^{6),7)}を用いて Q を推定しよう。第28図の

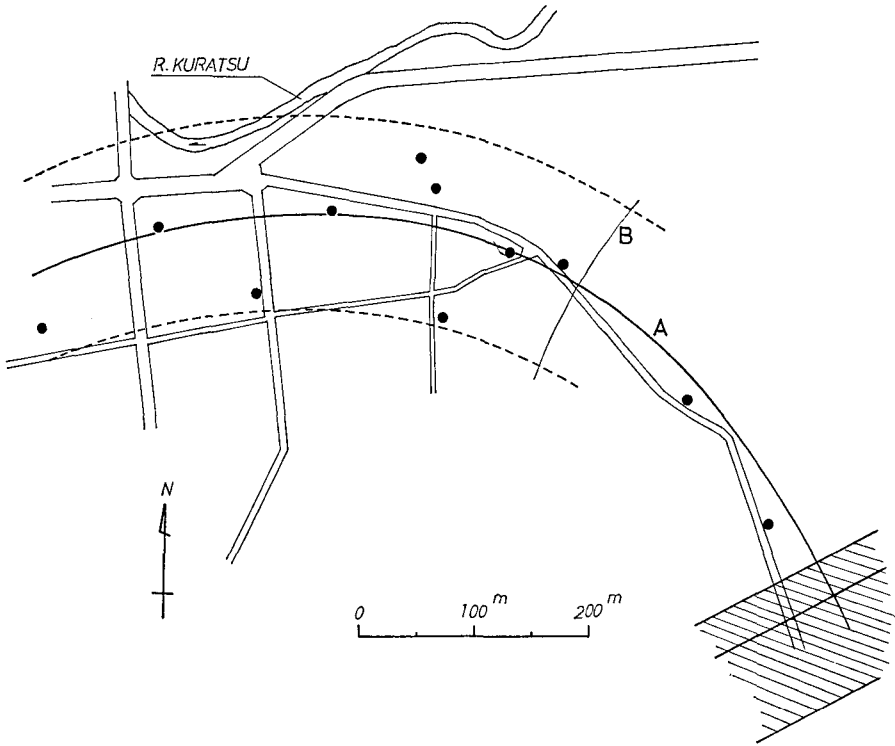


第28図 天童温泉における温度と Cl^- との関係

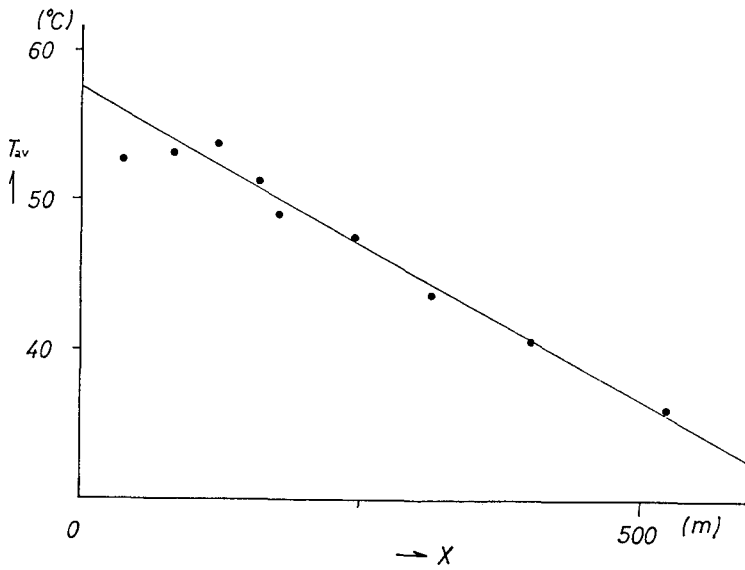
Fig. 28. Relation between temperature and Cl^- in Tendo hot springs

6) 山形県衛生部；山形県の温泉（第5輯）村山南部地区温泉（昭和40），1-2。

7) 福富孝治・他；山形天童温泉の地球物理学的研究，北海道大学地球物理研究報告，18（昭和42年），1-32。



第29図 天童温泉における Cl^- が 150 mg 以上の源泉分布
 Fig. 29. Geographical distribution of hot springs in Tendo



第30図 天童温泉の帯水層の温泉水の温度
 Fig. 30. Temperature of hot water in aquifer at Tendo Spa.

湧出温度と Cl^- との関係で、各々の源泉は $A(73^\circ\text{C}, \text{Cl}^-=156 \text{ mg}/\ell)$, $B(46^\circ\text{C}, 156 \text{ mg}/\ell)$, および $C(50^\circ\text{C}, 71 \text{ mg}/\ell)$ を頂点とする三角形内に分布している。辺 AB に沿った部分の源泉は化学成分がほとんど同じであって流下中の冷却を示している。この地域の Cl^- が $150 \text{ mg}/\ell$ 以上の源泉の分布を第 29 図、 A は温泉水の等圧力線及び湧出温度の等温線にほぼ直交するように引いた曲線である。第 30 図は第 29 図の A にそって測かった距離 x (原原を B) と温度 T の関係であるが、 T は山形市の年平均気温 10.8°C を基準とし、パイプ上昇中の冷却を考え、湧出温度に須川の式⁸⁾ から求まる補正を加えたものを用いた。図から $T_{gr}=4.2 \times 10^{-4} \text{C}\cdot\text{cm}^{-1}$, $T_0=57.5^\circ\text{C}$ となり、 K' は天童温泉で測定された地表付近の土壌の値 $1.92 \times 10^{-3} \text{ cal}\cdot\text{cm}^{-1}\cdot\text{sec}^{-1}\cdot^\circ\text{C}$ を用い、地中温度の鉛直分布から求められた $h=1.2 \times 10^{-4} \text{ cm}^{-1}$ を用いると、 $Q=3.3 \times 10^{-2} \text{ cm}^3\cdot\text{sec}^{-1}$ となる。昭和 41 年 11 月、揚水試験によってこの地域の透水量係数の平均値 $34.2 \text{ cm}^2\cdot\text{sec}^{-1}$ が得られており、温泉水の水頭勾配は昭和 36 年 7 月の調査ではほぼ 1.0×10^{-2} 、これから Q を求めると $3.4 \times 10^{-1} \text{ cm}^3\cdot\text{sec}^{-1}$ となって前述の値はかなり小さい。

流れの方向の温度勾配が無視できるとして一次元のモデルを考えたと地下水と温泉水の境界付近ではそれに直角な方向（流れに直角な方向）の温度勾配は無視できないと思われる。温泉水と地下水が同一流度で流れている場合、領域内の揚湯及び湧出がなく、 $\partial^2 T/\partial x^2 \approx 0$, $h''=0$ とすると、(49) は

$$K \frac{\partial^2 T_{av}}{\partial y^2} - \rho c u \frac{\partial T_{av}}{\partial x} - K' h' T_{av} = 0 \quad (59)$$

となる。 $y=0$ に境界があるとし、 $x=0$ における境界条件を

$$T_{av} = \begin{cases} 0, & y > 0 \\ T_0/2, & y = 0 \\ T_0, & y < 0 \end{cases} \quad (50)$$

とすれば、(59) の解は

$$T_{av} = \frac{T_0}{2} e^{-\beta x} \left\{ 1 - \text{erf} \left(\frac{y}{\sqrt{4\kappa x}} \right) \right\} \quad (61)$$

ここで

$$\beta = \frac{K' h'}{\rho c u}, \quad \kappa = \frac{K}{\rho c u} \quad (62)$$

である。

IV. おわりに

帯水層下端に断熱的な境界をおいたモデルまたは両端で (39) が成立するモデルでは前章の

8) 須川 明；湧出管を上昇する温泉の温度低下について、北海道大学地球物理研究報告，9 (昭和 37 年)，33-44.

議論から、帯水層から放出される（または帯水層に流入する）熱量はその平均温度に比例することがわかった。さらに鉛直断面の温度分布の平均化現象はこの近似を高める効果を持つであろう。その結果、三次元の熱輸送の方程式は二次元化され、(49) で表わされる。帯水層中に温泉水が湧出する割れ目により近い方が下部の地層温度も高いと思われるので(39)の第2式は第1近似として成立するだろう。割れ目付近を除き、下層の鉛直温度分布は直線で近似されると考えるから下端の境界条件は一般に $\partial T/\partial y = h(T_i - T)$ と表わされ、したがって第2近似として $\partial T_{ax}/\partial y = h(T_i - T_{av})$ が成立し、この場合、(49)の修正が必要となろう。

おわりに、本研究を進めるにあたって数々の御指導をして下さった福富教授を始め陸水学講座の皆様に感謝します。

なお計算は北大大型計算センターの FACOM 230-60 を用いた。

1. Heat Transfer Problems in an Aquifer Containing Hot Water

By Koichi URAKAMI

(Department of Geophysics, Faculty of Science, Hokkaido, University)

In this paper, heat transfer problems of hot springs of the so-called aquifer type were studied by the writer for the following two cases:

1) *Impermeable layer*, in which fluid flow is negligible. A layer which lays near the ground surface satisfies heat conduction equation in steady state, and its solution are given by (7)~(21) for two-dimensional models (shown by Fig. 1~Fig. 3). Observations of temperature distribution of hot springs suggested that horizontal gradient of temperature is much smaller than vertical one. This means that the horizontal heat transport is negligible, then the equation is rewritten by one-dimensional form and its solution is a linear function. Temperature distribution on vertical section calculated from two-dimensional models are approximated by a straight line (Fig. 9~Fig. 18). From this, the case in which a cooling law (as same as Newton's law) is realized is easily developed. When we consider heat transfer under this condition, it is possible to use the new cooling law and to get rid of the difficulty of double layers.

2) *Aquifer containing hot spring water*, in which heat transfer occurs by convection and conduction. When hot water flows uniformly through the aquifer with constant thickness (Fig. 25), gradient on flow direction may be negligible. Then the equation of heat transfer becomes (38), and if conditions at the surface are (39), $h_2=0$ and $T=T_0$ at $x=0$, the solution is given by (41). The heat radiated from the surface is proportional to the surface temperature. When the heat is estimated by the average temperature instead of the surface temperature, the error is small, then the heat transfer equation may be expressed by (49).