



Title	14. 自由表面における反射の際の弾性波のエネルギー流量の収支
Author(s)	田治米, 鏡二; TAZIME, Kyozi
Citation	北海道大学地球物理学研究報告, 25, 259-298
Issue Date	1971-03-25
DOI	https://doi.org/10.14943/gbhu.25.259
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/14003
Type	departmental bulletin paper
File Information	25_p259-298.pdf



14. 自由表面における反射の際の弾性波の エネルギー流量の収支

田 治 米 鏡 二

(北海道大学理学部地球物理学教室)

— 昭和 45 年 10 月受理 —

1. 弾性体のエネルギー

1.1¹⁾ 熱力学の第 1 法則によれば、物体内の総エネルギーの増加は外力によってなされた仕事と物体に供給された熱量との合計に等しい。

外力によってなされる仕事には 2 種類ある。1 つは物体内のある体積が動かされることによって生じる仕事である。密度を ρ とすると、この際に物体の単位体積に作用する力 $\rho \mathbf{K}$ はベクトル量であって、body force と呼ばれる。他の 1 つは物体が変形させられるための仕事である。この際には、物体内の体積を包む面に張り合いが生じる。この張り合い Ψ はテンソル量なので、ストレス・テンソルと呼ばれる。ストレスのことを surface traction, 応力, 歪力などと称することもある。

単位時間内に body force によってなされる仕事は、変位ベクトルを \mathbf{s} とし、微小な体積を $d\tau$ とすると、注目している体積全体については

$$\int \rho \mathbf{K} \cdot \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} d\tau. \quad (1.1.1)$$

ただし、ベクトル・ベクトルはベクトルの内積を意味している。

一方、単位時間内に surface traction によってなされる仕事は、上記の体積を包む面全体について、

$$\oint \Psi \cdot \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A}. \quad (1.1.2)$$

次に、微小な面ベクトル $d\mathbf{A}$ に垂直な単位ベクトルを ν とし、これに直交する他の 2 つの単位ベクトルを λ および μ とすると、

$$\Psi = \Psi_\nu \nu + \Psi_\lambda \lambda + \Psi_\mu \mu, \quad d\mathbf{A} = \nu dA. \quad (1.1.3)$$

ただし、 Ψ_ν などは ν などに垂直な面に作用する力ベクトルを意味していて、これらはベクトル量である。

(1.1.3) によれば、 $\Psi \cdot d\mathbf{A} = \Psi_\nu dA$ なので、(1.1.2) は次のごとく書き換えられる、

1) LOVE, A. E. H.; Mathematical Theory of Elasticity, Cambridge, (1934), 93-95.

$$\S \Psi \cdot \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A} = \S \Psi_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} dA = \S \nu \cdot \left(\Psi \cdot \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} \right) dA. \quad (1.1.4)$$

しかるに、面積積分と体積積分とを関係づけるガウスの発散の定理²⁾によれば、一般のベクトル \mathbf{f} に関し

$$\S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{A} = \int \nabla \cdot \mathbf{f} d\tau; \quad f_\nu = \nu \cdot \mathbf{f}. \quad (1.1.5)$$

ここでは、 ∇ は傾斜ベクトルとして扱われている。

ゆえに、

$$\mathbf{f} = \Psi \cdot \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} \quad (1.1.6)$$

とおけば、(1.1.4)と(1.1.5)から

$$\S \Psi \cdot \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A} = \int \nabla \cdot \left(\Psi \cdot \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} \right) d\tau = \int \left\{ \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} \cdot (\nabla \cdot \Psi) + (\Psi \cdot \nabla) \cdot \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} \right\} d\tau. \quad (1.1.7)$$

結局、単位時間内に物体が外力によってなされる仕事の総和は(1.1.1)と(1.1.7)とから

$$\frac{\partial W_0}{\partial t} = \int \left\{ \rho \mathbf{K} + (\nabla \cdot \Psi) + (\Psi \cdot \nabla) \right\} \cdot \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} d\tau. \quad (1.1.8)$$

さて、(1.1.8)のごときエネルギーが物体に加えられると、物体の運動エネルギーが増加する。単位時間内の運動エネルギーの増加は

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{2} \int \rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} \right) d\tau = \int \rho \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} d\tau \quad (1.1.9)$$

である。しかるに、運動方程式³⁾

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial t^2} = \rho \mathbf{K} + \nabla \cdot \Psi \quad (1.1.10)$$

が与えられているので、

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \int (\Psi \cdot \nabla) \cdot \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} d\tau \quad (1.1.11)$$

とおくと、(1.1.8)~(1.1.11)から

$$\frac{\partial W_0}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial t}. \quad (1.1.12)$$

上式の右辺の第2項は物体の変形によるポテンシャル・エネルギーの単位時間内の増加を意味している。

1.2 等方体では、ラーメの定数を λ および μ とすると、ストレス Ψ とストレイン Φ との関

2) 伊藤徳之助；応用ベクトル解析，丸善，(1948)，164-166.

3) LOVE；前出，85.

伊藤徳之助；前出，379-392.

係は

$$\Psi = \lambda \nabla \cdot \mathbf{s} E + 2\mu \Phi, \quad E \cdot \nabla = \nabla \quad (1.2.1)$$

なので,

$$\Psi \cdot \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} = \lambda \nabla \cdot \mathbf{s} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{s}) + 2\mu \Phi \cdot \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t}. \quad (1.2.2)$$

さらに, 直角座標 (x, y, z) の 3 軸方向の単位ベクトルを $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ とすると,

$$\mathbf{s} = \mathbf{i} s_1 + \mathbf{j} s_2 + \mathbf{k} s_3, \quad \nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}, \quad 2\Phi = \nabla \mathbf{s} + \mathbf{s} \nabla \quad (1.2.3)$$

なので,

$$\begin{aligned} \Phi_{xx} &= \frac{\partial s_1}{\partial x}, & \Phi_{yy} &= \frac{\partial s_2}{\partial y}, & \Phi_{zz} &= \frac{\partial s_3}{\partial z}, & \Phi_{yz} &= \frac{\partial s_3}{\partial y} + \frac{\partial s_2}{\partial z}, \\ \Phi_{zx} &= \frac{\partial s_1}{\partial z} + \frac{\partial s_3}{\partial x}, & \Phi_{xy} &= \frac{\partial s_2}{\partial x} + \frac{\partial s_1}{\partial y} \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

とおくと,

$$2\Phi = 2(\mathbf{i}\mathbf{i}\Phi_{xx} + \mathbf{j}\mathbf{j}\Phi_{yy} + \mathbf{k}\mathbf{k}\Phi_{zz}) + (\mathbf{j}\mathbf{k} + \mathbf{k}\mathbf{j})\Phi_{yz} + (\mathbf{k}\mathbf{i} + \mathbf{i}\mathbf{k})\Phi_{zx} + (\mathbf{i}\mathbf{j} + \mathbf{j}\mathbf{i})\Phi_{xy}. \quad (1.2.5)$$

ゆえに,

$$\begin{aligned} 2\Phi \cdot \nabla &= \mathbf{i} \left(2\Phi_{xx} \frac{\partial}{\partial x} + \Phi_{xy} \frac{\partial}{\partial y} + \Phi_{xz} \frac{\partial}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left(\Phi_{yz} \frac{\partial}{\partial x} + 2\Phi_{yy} \frac{\partial}{\partial y} + \Phi_{yz} \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ &\quad + \mathbf{k} \left(\Phi_{zx} \frac{\partial}{\partial x} + \Phi_{zy} \frac{\partial}{\partial y} + 2\Phi_{zz} \frac{\partial}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

なる演算を経て,

$$\begin{aligned} 2\Phi \cdot \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} &= 2 \left(\Phi_{xx} \frac{\partial \Phi_{xx}}{\partial t} + \Phi_{yy} \frac{\partial \Phi_{yy}}{\partial t} + \Phi_{zz} \frac{\partial \Phi_{zz}}{\partial t} \right) + \Phi_{yz} \frac{\partial \Phi_{yz}}{\partial t} + \Phi_{zx} \frac{\partial \Phi_{zx}}{\partial t} \\ &\quad + \Phi_{xy} \frac{\partial \Phi_{xy}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \Phi_{xx}^2 + \Phi_{yy}^2 + \Phi_{zz}^2 + \frac{1}{2} (\Phi_{yz}^2 + \Phi_{zx}^2 + \Phi_{xy}^2) \right\}. \end{aligned}$$

ゆえに, (1.2.2) は次のごとくまとめられる,

$$\Psi \cdot \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\lambda}{2} (\nabla \cdot \mathbf{s})^2 + \mu (\Phi_{xx}^2 + \Phi_{yy}^2 + \Phi_{zz}^2) + \frac{\mu}{2} (\Phi_{yz}^2 + \Phi_{zx}^2 + \Phi_{xy}^2) \right\}. \quad (1.2.6)$$

(1.1.11) と (1.2.6) とを見くらべると

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\lambda}{2} (\nabla \cdot \mathbf{s})^2 + \mu (\Phi_{xx}^2 + \Phi_{yy}^2 + \Phi_{zz}^2) + \frac{\mu}{2} (\Phi_{yz}^2 + \Phi_{zx}^2 + \Phi_{xy}^2) \quad (1.2.7)$$

であって⁴⁾, これは変形エネルギー関数と称されている。

ところで, (1.1.7)~(1.1.12) をふり返って見ると,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ W_0(\text{body force}) + W_0(\text{surface traction}) \right\} = \frac{\partial}{\partial t} (T + V).$$

4) LOVE; 前出, 102.

ゆえに, body force \mathbf{K} が無い時は

$$\frac{\partial}{\partial t} (T+V) = \oint \Psi \cdot \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A} \quad (1.2.8)$$

であって, 上式の右辺は $d\mathbf{A}$ で囲まれた面全体を通して単位時間に流れ入るエネルギー流量とみなされる。すると, (1.1.6) の \mathbf{f} は物体内へ入るエネルギー流量の面密度ベクトルと解釈される。運動エネルギーおよびポテンシャル・エネルギーの体積密度を w_{kin} および w_{pot} とすると,

$$T = \int w_{\text{kin}} d\tau, \quad V = \int w_{\text{pot}} d\tau \quad (1.2.9)$$

であって, (1.2.8) は次のごとく書き換えられる⁵⁾,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int (w_{\text{kin}} + w_{\text{pot}}) d\tau = \oint \mathbf{f} \cdot d\mathbf{A}. \quad (1.2.10)$$

断面積 A の平行層内を層に平行な x 方向に伝播する波動を考える。エネルギー密度およびエネルギー流量密度の1周期間の平均値を \bar{w}_{kin} , \bar{w}_{pot} および \bar{f}_x とすると, (1.2.10) の左辺は

$$(\bar{w}_{\text{kin}} + \bar{w}_{\text{pot}}) \frac{d}{dt} \int d\tau = (\bar{w}_{\text{kin}} + \bar{w}_{\text{pot}}) A \frac{dx}{dt}.$$

一方, (1.2.10) の右辺は $\bar{f}_x A$ である。ゆえに,

$$(\bar{w}_{\text{kin}} + \bar{w}_{\text{pot}}) \frac{dx}{dt} = \bar{f}_x. \quad (1.2.11)$$

1.3⁶⁾ 次に, (1.1.11) と (1.1.7) に戻ると,

$$V = \int \Psi \cdot \nabla \cdot \mathbf{s} d\tau = \oint \Psi \cdot \mathbf{s} \cdot d\mathbf{A} - \int \mathbf{s} \cdot \nabla \cdot \Psi d\tau. \quad (1.3.1)$$

しかるに, (1.2.7) によれば

$$w_{\text{pot}} = \Psi \cdot \nabla \cdot \mathbf{s} \text{ は } \Phi_{xx}^2, \Phi_{xy}^2, \dots$$

などに関する斉次式である。

一般に, $f(x_j) = \sum_j x_j^2$ の場合は $\partial f_j(x_j)/\partial x_j = 2 \sum_j x_j$ なので,

$$f(x_j + \delta x_j) = \sum_j (x_j + \delta x_j)^2 = \sum_j x_j^2 + \sum_j (\delta x_j)^2 + 2 \sum_j (\delta x_j) x_j = f(x_j) + f(\delta x_j) + \delta f(x_j). \quad (1.3.2)$$

そこで, 境界条件と平衡条件とを満す変位を \mathbf{s} , ひずみを Φ とし, 境界条件は満すが平衡条件は満さぬ変位を $\mathbf{s} + \delta \mathbf{s}$, ひずみを $\Phi + \delta \Phi$ とすると, Φ は \mathbf{s} の関数なので, (1.3.2) は次のごとく表わされる。

$$w_{\text{pot}}(\mathbf{s} + \delta \mathbf{s}) = w_{\text{pot}}(\mathbf{s}) + w_{\text{pot}}(\delta \mathbf{s}) + \delta w_{\text{pot}}(\mathbf{s}). \quad (1.3.3)$$

5) LOVE; 前出, 177-178.

6) LOVE, 前出, 171-173.

しかるに、無限小変形の理論では、 $d\Psi/ds=0$ なので、(1.3.1)と(1.3.3)とから

$$V(\mathbf{s}+\delta\mathbf{s})-V(\mathbf{s})=V(\delta\mathbf{s})+\oint\boldsymbol{\Psi}\cdot\delta\mathbf{s}\cdot d\mathbf{A}-\int\delta\mathbf{s}\cdot\nabla\cdot\boldsymbol{\Psi}d\tau. \quad (1.3.4)$$

しかるに、body force が無くて \mathbf{s} が平衡条件を満しているとき、(1.1.10)により $\nabla\cdot\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{s})=0$ なので、(1.3.4)の右辺の第3項は0である。また、 \mathbf{s} も $\mathbf{s}+\delta\mathbf{s}$ も境界条件を満しているとき、解の唯一性により、境界面 \mathbf{A} 上では $\delta\mathbf{s}=0$ でなければならぬ。ゆえに、右辺の第2項も0である。一方、 $V(\delta\mathbf{s})$ は(1.2.7)に見られるごとき $(\delta\Phi)^2$ に関する斉次式なので、常に正の値である。結局、(1.3.4)は次のごとく解される。

$$V(\mathbf{s}+d\mathbf{s})>V(\mathbf{s}). \quad (1.3.5)$$

この式は、変形によるポテンシャル・エネルギーは平衡状態の時に最小になる、ことを意味している。

1.4 エネルギー流量の流入密度は(1.1.6)に与えられているので、この式の右辺の符号を変え、さらに(1.2.1)を代入すると、等方体におけるエネルギー流量の流出密度は次のごとく表わされる：

$$\mathbf{f}=-\left\{\lambda(\partial\mathbf{s}/\partial t)\nabla\cdot\mathbf{s}+2\mu\Phi\cdot(\partial\mathbf{s}/\partial t)\right\}. \quad (1.4.1)$$

さらに、直角座標 (x, z) を採用し、その単位ベクトルを \mathbf{i} および \mathbf{k} 、変位 \mathbf{s} の成分を s_1 および s_3 とすれば、

$$\mathbf{s}=\mathbf{i}s_1+\mathbf{k}s_3, \quad \nabla=\mathbf{i}\partial/\partial x+\mathbf{k}\partial/\partial z \quad (1.4.2)$$

なので、

$$\begin{aligned} \nabla\mathbf{s} &= \mathbf{i}\mathbf{i}\frac{\partial s_1}{\partial x}+\mathbf{k}\mathbf{i}\frac{\partial s_1}{\partial z}+\mathbf{i}\mathbf{k}\frac{\partial s_3}{\partial x}+\mathbf{k}\mathbf{k}\frac{\partial s_3}{\partial z}, \\ \mathbf{s}\nabla &= \mathbf{i}\mathbf{i}\frac{\partial s_1}{\partial x}+\mathbf{i}\mathbf{k}\frac{\partial s_1}{\partial z}+\mathbf{k}\mathbf{i}\frac{\partial s_3}{\partial x}+\mathbf{k}\mathbf{k}\frac{\partial s_3}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

ゆえに、(1.2.3)を参照しながら(1.4.3)を(1.4.1)に代入すると、エネルギー流量密度ベクトルの x および z 成分はそれぞれ次のごとく表わされる：

$$\begin{aligned} f_x &= \mathbf{f}\cdot\mathbf{i} = -(\Psi_{xx}\partial s_1/\partial t + \Psi_{xz}\partial s_3/\partial t), \\ f_z &= \mathbf{f}\cdot\mathbf{k} = -(\Psi_{zx}\partial s_1/\partial t + \Psi_{zz}\partial s_3/\partial t); \\ \Psi_{xx} &= \lambda(\partial s_1/\partial x + \partial s_3/\partial z) + 2\mu\partial s_1/\partial x, & \Psi_{xz} &= \Psi_{zx} = \mu(\partial s_3/\partial x + \partial s_1/\partial z), \\ \Psi_{zz} &= \lambda(\partial s_1/\partial x + \partial s_3/\partial z) + 2\mu\partial s_3/\partial z. \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

次に、

$$v_p = \left\{(\lambda+2\mu)/\rho\right\}^{1/2}, \quad v_s = (\mu/\rho)^{1/2}, \quad h = \omega/v_p, \quad k = \omega/v_s \quad (1.4.5)$$

とおき、P波およびS波の変位ポテンシャル

$$\Phi(x, z, t) = \phi(x, z) e^{i\omega t} \quad \text{および} \quad \Psi(x, z, t) = \psi(x, z) e^{i\omega t} \quad (1.4.6)$$

を導入し、

$$s_1 = \partial\Phi/\partial x + \partial\Psi/\partial z, \quad s_3 = \partial\Phi/\partial z - \partial\Psi/\partial x \quad (1.4.7)$$

とおけば、

$$(\nabla^2 + h^2)\phi = 0 \quad \text{および} \quad (\nabla^2 + k^2)\psi = 0 \quad (1.4.8)$$

であれば、 $\mathbf{K}=0$ なる場合の運動方程式 (1.1.10) が \mathbf{s} によって満される。

しかるに、(1.4.5) によれば

$$\lambda = \mu \left\{ (k/h)^2 - 2 \right\} \quad (1.4.9)$$

であり、(1.4.6)~(1.4.8) によれば

$$\partial s_1/\partial x + \partial s_3/\partial z = \nabla^2 \Phi = -h^2 \phi e^{i\omega t}.$$

ゆえに、(1.4.4) のストレスの各成分は変位ポテンシャルを用いて、次のごとく表わされる：

$$\begin{aligned} \frac{\Psi_{xx}}{\mu} &= \left\{ (2h^2 - k^2)\phi + 2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right) \right\} e^{i\omega t}, \\ \frac{\Psi_{xz}}{\mu} &= \frac{\Psi_{zx}}{\mu} = \left\{ 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right\} e^{i\omega t}, \\ \frac{\Psi_{zz}}{\mu} &= \left\{ (2h^2 - k^2)\phi + 2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right) \right\} e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (1.4.10)$$

ここで注意すべきは、(1.4.4) の右辺はいずれも変位の成分または変位ポテンシャルに関して 2 次式であり、しかも複素数 Φ に関しては $\Re \Phi^2 \neq (\Re \Phi)^2$ であることである。ゆえに、(1.4.4) の変位の成分または変位ポテンシャルはそれらの実数部のみを採用しなければならぬ。

そこで、(1.4.6) の Φ および Ψ の共軛複素数をそれぞれ

$$\Phi^*(x, z, t) = \phi^*(x, z) e^{-i\omega t} \quad \text{および} \quad \Psi^*(x, z, t) = \psi^*(x, z) e^{-i\omega t} \quad (1.4.11)$$

とすると、

$$\Re \Phi = (1/2)(\Phi + \Phi^*)$$

なので、

$$\partial \Re \Phi / \partial t = \Re \partial \Phi / \partial t = (i\omega/2)(\Phi - \Phi^*).$$

また、

$$(\Re \Phi)^2 = (1/4)(\phi^2 e^{2i\omega t} + 2\phi\phi^* + \phi^{*2} e^{-2i\omega t})$$

なので、1 周期 $2\pi/\omega$ の間の平均値を採用すると、

$$\left[(\Re \Phi)^2 \right]_{\text{mean}} = (1/2)\phi\phi^*.$$

ゆえに、

$$\begin{aligned}
\left[\left(\Re \Psi_{xz} \right) \left(\Re \frac{\partial s_1}{\partial t} \right) \right]_{\text{mean}} &= \frac{i\omega}{4} (s_1 \Psi_{xz}^* - s_1^* \Psi_{xz}) = \frac{i\omega\mu}{4} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \left\{ (2h^2 - k^2) \phi^* \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2 \left(\frac{\partial^2 \phi^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x \partial z} \right) \right\} - \left(\frac{\partial \phi^*}{\partial x} + \frac{\partial \psi^*}{\partial z} \right) \left\{ (2h^2 - k^2) \phi + 2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right) \right\} \right], \\
\left[\left(\Re \Psi_{xz} \right) \left(\Re \frac{\partial s_3}{\partial t} \right) \right]_{\text{mean}} &= \frac{i\omega}{4} (s_3 \Psi_{xz}^* - s_3^* \Psi_{xz}) = \frac{i\omega\mu}{4} \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right. \\
&\quad \left. \times \left(2 \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial z^2} \right) - \left(\frac{\partial \phi^*}{\partial z} - \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right) \left(2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) \right\}, \\
\left[\left(\Re \Psi_{zx} \right) \left(\Re \frac{\partial s_1}{\partial t} \right) \right]_{\text{mean}} &= \frac{i\omega}{4} (s_1 \Psi_{zx}^* - s_1^* \Psi_{zx}) = \frac{i\omega\mu}{4} \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right. \\
&\quad \left. \times \left(2 \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial z^2} \right) - \left(\frac{\partial \phi^*}{\partial x} + \frac{\partial \psi^*}{\partial z} \right) \left(2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) \right\}, \\
\left[\left(\Re \Psi_{zx} \right) \left(\Re \frac{\partial s_3}{\partial t} \right) \right]_{\text{mean}} &= \frac{i\omega}{4} (s_3 \Psi_{zx}^* - s_3^* \Psi_{zx}) = \frac{i\omega\mu}{4} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \left\{ (2h^2 - k^2) \phi^* \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2 \left(\frac{\partial^2 \phi^*}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x \partial z} \right) \right\} - \left(\frac{\partial \phi^*}{\partial z} - \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right) \left\{ (2h^2 - k^2) \phi + 2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right) \right\} \right].
\end{aligned} \tag{1.4.12}$$

一方、単位体積あたりの運動エネルギーは、(1.1.9)により

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\rho}{2} \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} = \frac{\rho}{2} \left\{ \left(\frac{\partial s_1}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial s_3}{\partial t} \right)^2 \right\}; \tag{1.4.13}$$

$$\begin{aligned}
\left[\left(\Re \frac{\partial s_1}{\partial t} \right)^2 \right]_{\text{mean}} &= \frac{1}{2} \frac{\partial s_1}{\partial t} \frac{\partial s_1^*}{\partial t} = \frac{\omega^2}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial \phi^*}{\partial x} + \frac{\partial \psi^*}{\partial z} \right), \\
\left[\left(\Re \frac{\partial s_3}{\partial t} \right)^2 \right]_{\text{mean}} &= \frac{1}{2} \frac{\partial s_3}{\partial t} \frac{\partial s_3^*}{\partial t} = \frac{\omega^2}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \phi^*}{\partial z} - \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right).
\end{aligned}$$

また、単位体積あたりの変形によるポテンシャルエネルギーは、(1.2.7)により

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial \tau} &= \frac{\lambda}{2} (\nabla \cdot \mathbf{s})^2 + \mu \left\{ \left(\frac{\partial s_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial s_3}{\partial z} \right)^2 + \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial s_1}{\partial z} + \frac{\partial s_3}{\partial x} \right)^2 \right. \\
&= \frac{\rho}{2} \left[v_p^2 \left(\frac{\partial s_1}{\partial x} + \frac{\partial s_3}{\partial z} \right)^2 + v_s^2 \left\{ \left(\frac{\partial s_3}{\partial x} + \frac{\partial s_1}{\partial z} \right)^2 - 4 \frac{\partial s_1}{\partial x} \frac{\partial s_3}{\partial z} \right\} \right];
\end{aligned} \tag{1.4.14}$$

$$\begin{aligned}
\left[\left(\Re \left(\frac{\partial s_1}{\partial x} + \frac{\partial s_3}{\partial z} \right) \right)^2 \right]_{\text{mean}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_1}{\partial x} + \frac{\partial s_3}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial s_1^*}{\partial x} + \frac{\partial s_3^*}{\partial z} \right) = \frac{h^4}{2} \phi \phi^*, \\
\left[\left(\Re \left(\frac{\partial s_3}{\partial x} + \frac{\partial s_1}{\partial z} \right) \right)^2 \right]_{\text{mean}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_3}{\partial x} + \frac{\partial s_1}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial s_3^*}{\partial x} + \frac{\partial s_1^*}{\partial z} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) \left(2 \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} \right), \\
\left[\left(\Re \frac{\partial s_1}{\partial x} \right) \left(\Re \frac{\partial s_3}{\partial z} \right) \right]_{\text{mean}} &= \frac{1}{4} \left(\frac{\partial s_1}{\partial x} \frac{\partial s_3^*}{\partial z} + \frac{\partial s_3}{\partial z} \frac{\partial s_1^*}{\partial x} \right) \\
&= \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right) \left(\frac{\partial^2 \phi^*}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x \partial z} \right) + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right) \left(\frac{\partial^2 \phi^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x \partial z} \right).
\end{aligned}$$

2. 自由表面における平面波の反射

2.1 境界面に平行な方向の P 波および S 波の角波数を ξ とし、境界面に垂直な方向の P 波

および S 波の角波数をそれぞれ α および β とする。次に、自由表面における変位ポテンシャルの P→P, P→S, S→P および S→S 反射係数をそれぞれ A, B, C および D とすると⁷⁾,

$$\begin{aligned} A = D &= - \left\{ (\beta^2 - \xi^2)^2 - 4\xi^2 \alpha \beta \right\} / \left\{ (\beta^2 - \xi^2)^2 + 4\xi^2 \alpha \beta \right\}, \\ B = -(\alpha/\beta) C &= 4\alpha\xi(\beta^2 - \xi^2) / \left\{ (\beta^2 - \xi^2)^2 + 4\xi^2 \alpha \beta \right\} \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

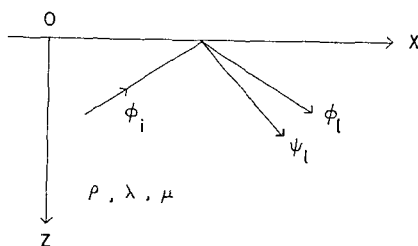
であって、これらの間には次の関係がある：

$$A^2 - BC = 1. \quad (2.1.2)$$

ゆえに、P 波の変位ポテンシャル

$$\Phi_i(x, z, t) = \phi_i(x, z) e^{i\omega t}; \quad \phi_i(x, z) = e^{-i(\xi z - \alpha z)} \quad (2.1.3)$$

が自由表面 $z=0$ に入射すると、第 2.1 図に示されているごとく、次のごとき P 波および SV 波が反射する：



第 2.1 図 平面波の反射

Fig. 2. 1. Reflections of plane waves.

$$\Phi_i(x, z, t) = \Phi_i(z=0) A e^{-i\alpha z} \quad \text{および} \quad \Psi_l(x, z, t) = \Phi_i(z=0) B e^{-i\beta z}. \quad (2.1.4)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \Phi_i(x, z, t) &= \phi_i(x, z) e^{i\omega t}; \quad \phi_i(x, z) = A(\xi) e^{-i(\xi z + \alpha z)}, \\ \Psi_l(x, z, t) &= \psi_l(x, z) e^{i\omega t}; \quad \psi_l(x, z) = B(\xi) e^{-i(\xi z + \beta z)} \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

とおくと、(2.1.3) および (2.1.5) の ϕ_i, ϕ_l および ψ_l はそれぞれヘルムホルツの偏微分方程式 (1.4.8) を満す。しかも、これらは自由表面 $z=0$ において、次の境界条件をも満している：

$$\Psi_{zz} = \Psi_{zx} = 0. \quad (2.1.6)$$

さて、 $A(\xi)$ も $B(\xi)$ も実数の場合は、 ϕ_i, ϕ_l および ψ_l の共軛複素数は次のごとく表わされる：

$$\phi_i^* = e^{i(\xi'x - \alpha'z)}, \quad \phi_l^* = A(\xi') e^{i(\xi'x + \alpha'z)}, \quad \psi_l^* = B(\xi') e^{i(\xi'x + \beta'z)} \quad (2.1.7)$$

上式の波数および反射係数に ' を付けたのは、元の量とそれらの共軛複素量とを区別するためである。ただし、

7) 田治米鏡二；成層構造に対する ray theory の適用 (4)，地震，11 (1958)，151-152.

$$\text{平面波に対しては} \quad \xi = \xi'. \quad (2.1.8)$$

ゆえに、この場合は、他のすべての量についても'の有無は意味がない。ここでは、平面波以外の計算の便宜に供するために、あえて、(2.1.7)のごとく表わした。

ともかく、

$$\phi = \phi_i(x, z) + \phi_l(x, z), \quad \psi = \psi_l(x, z) \quad (2.1.9)$$

とおき、(2.1.9)を(1.4.12)に代入すると、

$$\begin{aligned} \left[(\Re \Psi_{xx}) (\Re \partial s_1 / \partial t) \right]_{\text{mean}} &= (\omega \mu / 4) \left[\left\{ \xi (\phi_i + \phi_l) + \beta \psi_l \right\} \left\{ (2\alpha'^2 - k^2) (\phi_i^* + \phi_l^*) - 2\xi' \beta' \psi_l^* \right\} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \xi' (\phi_i^* + \phi_l^*) + \beta' \psi_l^* \right\} \left\{ (2\alpha^2 - k^2) (\phi_i + \phi_l) - 2\xi \beta \psi_l \right\} \right], \\ \left[(\Re \Psi_{xz}) (\Re \partial s_3 / \partial t) \right]_{\text{mean}} &= -(\omega \mu / 4) \left[\left\{ \alpha (\phi_i - \phi_l) + \xi \psi_l \right\} \left\{ 2\xi' \alpha' (\phi_i^* - \phi_l^*) - (\beta'^2 - \xi'^2) \psi_l^* \right\} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \alpha' (\phi_i^* - \phi_l^*) + \xi' \psi_l^* \right\} \left\{ 2\xi \alpha (\phi_i - \phi_l) - (\beta^2 - \xi^2) \psi_l \right\} \right], \\ \left[(\Re \Psi_{zx}) (\Re \partial s_1 / \partial t) \right]_{\text{mean}} &= (\omega \mu / 4) \left[\left\{ \xi (\phi_i + \phi_l) + \beta \psi_l \right\} \left\{ 2\xi' \alpha' (\phi_i^* - \phi_l^*) - (\beta'^2 - \xi'^2) \psi_l^* \right\} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \xi' (\phi_i^* + \phi_l^*) + \beta' \psi_l^* \right\} \left\{ 2\xi \alpha (\phi_i - \phi_l) - (\beta^2 - \xi^2) \psi_l \right\} \right], \\ \left[(\Re \Psi_{zz}) (\Re \partial s_3 / \partial t) \right]_{\text{mean}} &= -(\omega \mu / 4) \left[\left\{ \alpha (\phi_i - \phi_l) + \xi \psi_l \right\} \left\{ (\xi'^2 - \beta'^2) (\phi_i^* + \phi_l^*) + 2\xi' \beta' \psi_l^* \right\} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \alpha' (\phi_i^* - \phi_l^*) + \xi' \psi_l^* \right\} \left\{ (\xi^2 - \beta^2) (\phi_i + \phi_l) + 2\xi \beta \psi_l \right\} \right]. \end{aligned}$$

次に、これらの計算結果を(1.4.4)に代入すると、エネルギー流量密度の成分の1周期 $2\pi/\omega$ の間の平均値は次のごとくなる：

$$\begin{aligned} \bar{J}_x &= (\omega \mu / 4) \left[\left\{ 2\alpha \alpha' (\xi + \xi') - \xi (\alpha'^2 - k^2) - \xi' (2\alpha^2 - k^2) \right\} (\phi_i \phi_i^* + \phi_l \phi_l^*) \right. \\ &\quad \left. + \left\{ 2\beta \beta' (\xi + \xi') - \xi (\beta'^2 - \xi'^2) - \xi' (\beta^2 - \xi^2) \right\} \psi_l \psi_l^* \right. \\ &\quad \left. - \left\{ 2\alpha \alpha' (\xi + \xi') + \xi (2\alpha'^2 - k^2) + \xi' (2\alpha^2 - k^2) \right\} (\phi_i \phi_l^* + \phi_l \phi_i^*) \right. \\ &\quad \left. - \left\{ \beta (2\alpha'^2 - 2\xi \xi' - k^2) \psi_l (\phi_i^* + \phi_l^*) + \beta' (2\alpha^2 - 2\xi \xi' - k^2) (\phi_i + \phi_l) \psi_l^* \right\} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \alpha (2\xi \xi' - \beta'^2 + \xi'^2) (\phi_i - \phi_l) \psi_l^* + \alpha' (2\xi \xi' - \beta^2 + \xi^2) \psi_l (\phi_i^* - \phi_l^*) \right\} \right], \\ \bar{J}_z &= -(\omega \mu / 4) \left[\left\{ 2\xi \xi' (\alpha + \alpha') + \alpha (\beta'^2 - \xi'^2) + \alpha' (\beta^2 - \xi^2) \right\} (\phi_i \phi_i^* - \phi_l \phi_l^*) \right. \\ &\quad \left. - \left\{ 2\xi \xi' (\beta + \beta') + \beta (\beta'^2 - \xi'^2) + \beta' (\beta^2 - \xi^2) \right\} \psi_l \psi_l^* \right. \\ &\quad \left. + \left\{ 2\xi \xi' (\alpha' - \alpha) - \alpha (\beta'^2 - \xi'^2) + \alpha' (\beta^2 - \xi^2) \right\} (\phi_l \phi_i^* - \phi_i \phi_l^*) \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \xi (\beta'^2 - \xi'^2) - \xi' (\beta^2 - \xi^2) \right\} \left\{ \psi_l (\phi_i^* + \phi_l^*) - (\phi_i + \phi_l) \psi_l^* \right\} \right. \\ &\quad \left. + 2(\xi - \xi') \left\{ \alpha \beta' (\phi_i - \phi_l) \psi_l^* - \alpha' \beta \psi_l (\phi_i^* - \phi_l^*) \right\} \right]. \quad (2.1.10) \end{aligned}$$

上式の中で、 $\phi_i \phi_i^*$, $\phi_l \phi_l^*$ および $\psi_l \psi_l^*$ を係数に持つ項は、それぞれ入射 P 波、反射 P 波

および反射 S 波のエネルギー流量密度である。これらに反し、他の項は上記の 3 種の波が互いに干渉して生じたエネルギー流量密度を意味している。

平面波の場合は、(2.1.8) の条件があるので、まず、(2.1.10) の \bar{f}_z は次のごとく簡単になる：

$$\begin{aligned} \bar{f}_z(x, z) &= -(\omega \mu k^2 \alpha / 2) \{ \phi_i \phi_i^* - \phi_l \phi_l^* - (\beta/\alpha) \psi_l \psi_l^* \}, \\ \phi_i \phi_i^* &= 1, \quad \phi_l \phi_l^* = A^2, \quad \psi_l \psi_l^* = B^2. \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

しかるに、(2.1.1) と (2.1.2) の関係により

$$\phi_l \phi_l^* + (\beta/\alpha) \psi_l \psi_l^* = A^2 - BC = 1 = \phi_i \phi_i^*. \quad (2.1.12)$$

ゆえに、 $\bar{f}_z = 0$ であって、(2.1.12) は入射 P 波のエネルギー流量密度の z 成分は反射 P 波および反射 S 波のエネルギー流量密度の z 成分に正しく保存されることを意味している。

次に、(2.1.8) を (2.1.10) の \bar{f}_x に代入すると、

$$\begin{aligned} \bar{f}_x(x, z) &= (\omega \mu / 2) \left[\xi k^2 (\phi_i \phi_i^* + \phi_l \phi_l^* + \psi_l \psi_l^*) + 2\xi (4\alpha^2 - k^2) A \cos(2\alpha z) \right. \\ &\quad \left. + (\alpha + \beta) \{ 3\xi^2 - \beta(2\alpha - \beta) \} B \cos(\alpha + \beta) z - (\alpha - \beta) \{ 3\xi^2 + \beta(2\alpha + \beta) \} AB \cos(\alpha - \beta) z \right]. \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

ゆえに、干渉によって生じた \bar{f}_x の 1 部は、 x 軸に平行で、 z 方向に周期的に変化する縞模様を呈する。

今、第 2.2 図に示されているごとく、限られた幅の平面波を考え、 x に垂直な面を通過するエネルギー流量を計算すると、

$$\begin{aligned} \int \phi_i \phi_i^* dz &= \overline{MP}, \\ \int \phi_l \phi_l^* dz &= A^2 \overline{MP}, \\ \int \psi_l \psi_l^* dz &= B^2 \overline{MS}. \end{aligned}$$

しかるに、(1.4.5) の h および k はそれぞれ P 波および S 波の伝播方向の角波数を意味しているので、P 波および S 波の入射角をそれぞれ θ_p および θ_s とすると、

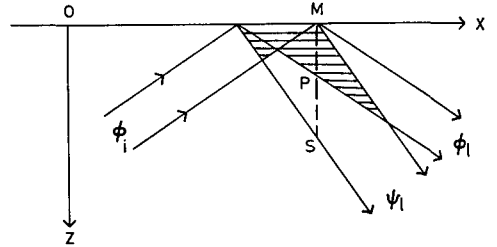
$$\xi = h \sin \theta_p = k \sin \theta_s, \quad \alpha = h \cos \theta_p, \quad \beta = k \cos \theta_s, \quad (2.1.14)$$

とみなされる。ゆえに、第 2.1 図を参照すると、

$$\beta/\alpha = \tan \theta_p / \tan \theta_s = \overline{MS} / \overline{MP}. \quad (2.1.15)$$

ゆえに、(2.1.12) と同様に

$$\int \phi_l \phi_l^* dz + \int \psi_l \psi_l^* dz = \overline{MP} = \int \phi_i \phi_i^* dz. \quad (2.1.16)$$



第 2.2 図 限られた幅の平面波の反射
Fig. 2.2. Reflections of plane waves having finite breadths.

限られた幅の平面波では、第 2.1 図に見られるごとく、 z の大きな処で観察すると種々の波の干渉による影響から逃れることができる。この場合には

$$\int \bar{f}_x dz = (\omega \mu \xi k^2 / 2) \left\{ \int \phi_i \phi_i^* dz + \int \phi_l \phi_l^* dz + \int \psi_l \psi_l^* dz \right\} \quad (2.1.17)$$

であって、(2.1.16)により、入射 P 波の x 方向へのエネルギー流量は反射 P 波および反射 S 波の x 方向へのエネルギー流量に保存される。

しかるに、(2.1.11)の各量は z によらぬので、(2.1.16)も(2.1.17)も z のいかんによらず成立すべきである。すると、干渉によるエネルギー流量密度の x 成分は 0 でなくとも、その存在深度 z が適当に調節されて、エネルギー流量は 0 になるものと察せられる。

このような状態では、(2.1.12)と(2.1.16)とにより、入射 P 波のエネルギー流量はすべて反射 P 波と反射 S 波のエネルギー流量に保存される。したがって、他の波、たとえばレ-レ-波、に与えるべき余分のエネルギー流量を平面入射波は持っていない。

2.2 入射波が P 波 ϕ_i でなくて、SV 波 ψ_i の場合には、

$$\phi_i = e^{-\varepsilon(\varepsilon z - \beta z)}, \quad \phi_l = C(\xi) e^{-\varepsilon(\varepsilon z + \alpha z)}, \quad \psi_l = D(\xi) e^{-\varepsilon(\varepsilon z + \beta z)}, \quad (2.2.1)$$

$$\begin{aligned} \left[(\Re W_{xx}) (\Re \partial s_1 / \partial t) \right]_{\text{mean}} &= (\omega \mu / 4) \left[\left\{ \xi \phi_l - \beta (\psi_i - \psi_l) \right\} \left\{ (2\alpha'^2 - k^2) \phi_i^* + 2\xi' \beta' (\phi_i^* - \psi_l^*) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \xi' \phi_i^* - \beta' (\psi_i^* - \psi_l^*) \right\} \left\{ (2\alpha^2 - k^2) \phi_l + 2\xi \beta (\psi_i - \psi_l) \right\} \right], \\ \left[(\Re W_{zz}) (\Re \partial s_3 / \partial t) \right]_{\text{mean}} &= (\omega \mu / 4) \left[\left\{ -\alpha \phi_l + \xi (\psi_i + \psi_l) \right\} \left\{ 2\xi' \alpha' \phi_i^* + (\beta'^2 - \xi'^2) (\psi_i^* + \psi_l^*) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ -\alpha' \phi_i^* + \xi' (\psi_i^* + \psi_l^*) \right\} \left\{ 2\xi \alpha \phi_l + (\beta^2 - \xi^2) (\psi_i + \psi_l) \right\} \right], \\ \left[(\Re W_{xz}) (\Re \partial s_1 / \partial t) \right]_{\text{mean}} &= (\omega \mu / 4) \left[\left\{ \xi \phi_l - \beta (\psi_i - \psi_l) \right\} \left\{ -2\xi' \alpha' \phi_i^* - (\beta'^2 - \xi'^2) (\psi_i^* + \psi_l^*) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \xi' \phi_i^* - \beta' (\psi_i^* - \psi_l^*) \right\} \left\{ -2\xi \alpha \phi_l - (\beta^2 - \xi^2) (\psi_i + \psi_l) \right\} \right], \\ \left[(\Re W_{zx}) (\Re \partial s_3 / \partial t) \right]_{\text{mean}} &= -(\omega \mu / 4) \left[\left\{ -\alpha \phi_l + \xi (\psi_i + \psi_l) \right\} \left\{ -(\beta'^2 - \xi'^2) \phi_i^* \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2\xi' \beta' (\psi_i^* - \psi_l^*) \right\} + \left\{ -\alpha' \phi_i^* + \xi' (\psi_i^* + \psi_l^*) \right\} \left\{ -(\beta^2 - \xi^2) \phi_l - 2\xi \beta (\psi_i - \psi_l) \right\} \right]. \end{aligned}$$

ゆえに、(2.1.10)の代わりに、次式に到着する：

$$\begin{aligned} \bar{f}_x &= (\omega \mu / 4) \left[\left\{ 2\beta \beta' (\xi + \xi') - \xi (\beta'^2 - \xi'^2) - \xi' (\beta^2 - \xi^2) \right\} (\psi_i \psi_i^* + \psi_l \psi_l^*) \right. \\ &\quad \left. + \left\{ 2\alpha \alpha' (\xi + \xi') - \xi (2\alpha'^2 - k^2) - \xi' (2\alpha^2 - k^2) \right\} \phi_i \phi_i^* \right. \\ &\quad \left. - \left\{ 2\beta \beta' (\xi + \xi') + \xi (\beta'^2 - \xi'^2) + \xi' (\beta^2 - \xi^2) \right\} (\psi_i \psi_i^* + \psi_l \psi_l^*) \right. \\ &\quad \left. - \left\{ \alpha (2\xi \xi' - \beta'^2 + \xi'^2) \phi_l (\psi_i^* + \psi_l^*) + \alpha' (2\xi \xi' - \beta^2 + \xi^2) \phi_i^* (\psi_i + \psi_l) \right\} \right. \\ &\quad \left. - \left\{ \beta (2\xi \xi' - 2\alpha'^2 + k^2) (\psi_i - \psi_l) \phi_i^* + \beta' (2\xi \xi' - 2\alpha^2 + k^2) \phi_l (\psi_i^* - \psi_l^*) \right\} \right], \\ \bar{f}_z &= -(\omega \mu / 4) \left[\left\{ 2\xi \xi' (\beta + \beta') + \beta (\beta'^2 - \xi'^2) + \beta' (\beta^2 - \xi^2) \right\} (\psi_i \psi_i^* - \psi_l \psi_l^*) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\left\{2\xi\xi'(\alpha+\alpha')+\alpha(\beta'^2-\xi'^2)+\alpha'(\beta^2-\xi^2)\right\}\phi_i\phi_i^* \\
& -\left\{2\xi\xi'(\beta'-\beta)-\beta(\beta'^2-\xi'^2)+\beta'(\beta^2-\xi^2)\right\}(\phi_i\psi_i^*-\psi_i\phi_i^*) \\
& +\left\{\xi(\beta'^2-\xi'^2)-\xi'(\beta^2-\xi^2)\right\}\left\{(\phi_i+\psi_i)\phi_i^*-\phi_i(\psi_i^*+\phi_i^*)\right\} \\
& +2(\xi'-\xi)\left\{\alpha'\beta(\phi_i-\psi_i)\phi_i^*-\alpha\beta'\phi_i(\psi_i^*-\phi_i^*)\right\}.
\end{aligned} \tag{2.2.2}$$

入射波が SV 波の場合には, β は実数でも, α は虚数 $-i\hat{\alpha}$ になりうる。この際には, (2.1.1) のすべての反射係数は複素数になる。ゆえに,

$$\tan Y(\xi) = 4\hat{\alpha}\beta\xi^2/(\beta^2-\xi^2)^2 \tag{2.2.3}$$

とおくと, (2.1.1) は次のごとく書かれる:

$$A = e^{i(2Y+\pi)}, \quad C = |C|e^{i(Y+\pi)}; \quad |C| = \left\{4\beta\xi/(\beta^2-\xi^2)\right\} \cos Y. \tag{2.2.4}$$

すると, (2.2.1) は次のごとく変わる:

$$\psi_i = e^{-i(\xi z - \beta z)}, \quad \phi_i = |C|e^{-i\hat{\alpha}z}e^{-i(\xi z - Y - \pi)}, \quad \psi_i = e^{-i(\hat{\alpha}z + \beta z - 2Y - \pi)}. \tag{2.2.5}$$

さて, α が実数の場合には,

$$\partial\phi_i/\partial z = -i\alpha\phi_i, \quad \partial\phi_i^*/\partial z = i\alpha'\phi_i^*$$

であった。これに反し, α が虚数 $-i\hat{\alpha}$ の場合は

$$\partial\phi_i/\partial z = -\hat{\alpha}\phi_i, \quad \partial\phi_i^*/\partial z = -\hat{\alpha}'\phi_i^*.$$

ゆえに, α が虚数の場合には, (2.2.2) の α と α' とをそれぞれ $-i\hat{\alpha}$ と $i\hat{\alpha}'$ とに置き換えるべきである。たとえば,

$$\begin{aligned}
\bar{f}_z = & -(\omega\mu/4)\left[\left\{2\xi\xi'(\beta+\beta')+\beta(\beta'^2-\xi'^2)+\beta'(\beta^2-\xi^2)\right\}(\psi_i\phi_i^*-\phi_i\psi_i^*)\right. \\
& -i\left\{2\xi\xi'(\hat{\alpha}'-\hat{\alpha})-\hat{\alpha}(\beta'^2-\xi'^2)+\hat{\alpha}'(\beta^2-\xi^2)\right\}\phi_i\phi_i^* \\
& -\left\{2\xi\xi'(\beta'-\beta)-\beta(\beta'^2-\xi'^2)+\beta'(\beta^2-\xi^2)\right\}(\psi_i\psi_i^*-\psi_i\psi_i^*) \\
& +\left\{\xi(\beta'^2-\xi'^2)-\xi'(\beta^2-\xi^2)\right\}(\psi_i\phi_i^*-\phi_i\psi_i^*+\psi_i\phi_i^*-\phi_i\psi_i^*) \\
& \left.+2i(\xi'-\xi)\left\{\hat{\alpha}'\beta(\psi_i\phi_i^*-\phi_i\psi_i^*)+\hat{\alpha}\beta'(\phi_i\psi_i^*-\psi_i\phi_i^*)\right\}\right].
\end{aligned} \tag{2.2.6}$$

平面波の場合は, (2.1.8) を (2.2.6) に代入すると, 次の結果を得る:

$$\bar{f}_z = -(\omega\mu k^2\beta/2)(\psi_i\psi_i^*-\psi_i\psi_i^*), \quad \psi_i\psi_i^* = \psi_i\psi_i^* = 1. \tag{2.2.7}$$

もし, α のみならず, β も虚数であるとすれば, (2.2.6) の β と β' とをそれぞれ $-i\hat{\beta}$ と $i\hat{\beta}'$ とに置き換えるべきである。すると, $(\psi_i\psi_i^*-\psi_i\psi_i^*)$ の係数も 0 になる。

3. 自由表面におけるビームの反射

3.1 第 3.1 図に示されているごとく, $z = E$ に薄い平面のシャヘイ板を置くと, 幅 $2a$ の穴

を通過した入射平面波のみがシャヘイ板の後側へ進み、幅 $2a$ のビームが形成される。もちろん、穴を通過する際に回折現象が起こるので、ビームの縁は不明瞭となり、ビームの断面上的の波の振幅は一樣でない。しかし、ここではビームの構造を詳しく調べるのではなく、ビーム全体のエネルギー流量を見るのが目的である。ゆえに、上記のごときビームを扱うことにした。

そのために、 $z=E$ 面上で

$$F(x') = \begin{cases} 0 & \text{for } |x'| > a \\ 1 & \text{for } -a < x' < a \end{cases} \quad (3.1.1)$$

なる関数を定義し、元来の入射平面波の角波数を ξ_0 とし、

$$S(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(x') e^{i(\xi - \xi_0)x'} dx' \quad (3.1.2)$$

とおくと、シャヘイ板の後側に形成される入射ビームは次のごとく表わされる⁸⁾：

$$\phi_i(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\xi) e^{-i(\xi x + \alpha(E-z))} d\xi. \quad (3.1.3)$$

この式の $S(\xi)$ を α^{-1} で置き換えると、線状振源 $(0, E)$ から発射される円筒波になる。今は、(3.1.1) を (3.1.2) に代入すると、 $z=E$ 上で、

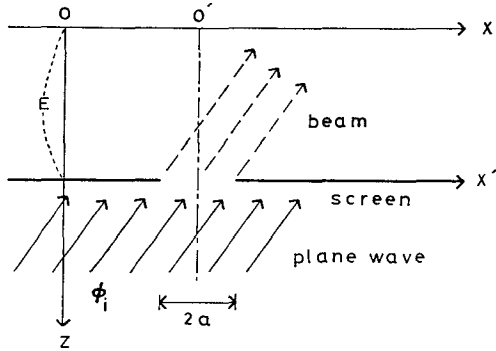
$$S(\xi) = \sin \left\{ (\xi - \xi_0) a \right\} / \left\{ \pi (\xi - \xi_0) \right\}. \quad (3.1.4)$$

ゆえに、第 3.2 図に示されているごとく、 $S(\xi)$ は $\xi = \xi_0$ で極大 a/π になり、 $|\xi - \xi_0|$ が大きくなるにつれて 0 に近づく。

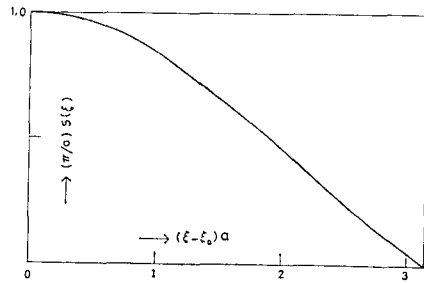
さて、(2.1.3) の入射平面波が (3.1.3) のごときビームになると、(2.1.5) の反射平面波もそれぞれ次のごときビームになる：

$$\begin{aligned} \phi_i(x, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} S(\xi) A(\xi) e^{-i(\xi x + \alpha E + \alpha z)} d\xi, \\ \phi_r(x, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} S(\xi) B(\xi) e^{-i(\xi x + \alpha E + \beta z)} d\xi. \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

さらに、(3.1.4) および (3.1.5) の共軛複素数は



第 3.1 図 シャヘイ板によるビームの形成
Fig. 3.1. Construction of the beam by the screen.



第 3.2 図 $S(\xi)$ の変化
Fig. 3.2. Variation of $S(\xi)$.

8) BREKHOVSKIKH, L. M.; Waves in Layered Media, Academic Press, (1960), 100-122.

$$\begin{aligned}
\phi_i^*(x, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} S(\xi') e^{i(\xi'x + \alpha'(E-z))} d\xi', \\
\phi_i^*(x, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} S(\xi') A(\xi') e^{i(\xi'x + \alpha'E + \alpha'z)} d\xi', \\
\phi_i^*(x, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} S(\xi') B(\xi') e^{i(\xi'x + \alpha'E + \beta'z)} d\xi'.
\end{aligned} \tag{3.1.6}$$

ゆえに,

$$\phi_i \phi_i^*(\text{beam}) = \iint_{-\infty}^{\infty} S(\xi) S(\xi') \phi_i \phi_i^*(\text{plane wave}) d\xi' d\xi$$

などの関係がある。このような結果，エネルギー流量密度に関しても，次のごとき関係が成立する：

$$\bar{f}(\text{beam}) = \iint_{-\infty}^{\infty} S(\xi) S(\xi') \bar{f}(\text{plane wave}) d\xi' d\xi. \tag{3.1.7}$$

ゆえに，(2.1.10) の \bar{f}_z を (3.1.7) の被積分関数に代入すると，

$$\bar{f}_z(x, z : \text{beam}) = -(\omega\mu/4) \left\{ I_1(x, z) + I_2(x, z) + I_3(x, z) + I_4(x, z) + I_5(x, z) + I_6(x, z) \right\}; \tag{3.1.8}$$

$$\begin{aligned}
I_1(x, z) &= \iint_{-\infty}^{\infty} S(\xi) S(\xi') \left\{ \alpha(\beta'^2 - \xi'^2) + \alpha'(\beta^2 - \xi^2) + 2\xi\xi'(\alpha + \alpha') \right\} \phi_i \phi_i^* d\xi' d\xi, \\
I_2(x, z) &= - \iint_{-\infty}^{\infty} S(\xi) S(\xi') \left\{ \alpha(\beta'^2 - \xi'^2) + \alpha'(\beta^2 - \xi^2) + 2\xi\xi'(\alpha + \alpha') \right\} \phi_i \phi_i^* d\xi' d\xi, \\
I_3(x, z) &= - \iint_{-\infty}^{\infty} S(\xi) S(\xi') \left\{ \beta(\beta'^2 - \xi'^2) + \beta'(\beta^2 - \xi^2) + 2\xi\xi'(\beta + \beta') \right\} \phi_i \phi_i^* d\xi' d\xi, \\
I_4(x, z) &= \iint_{-\infty}^{\infty} S(\xi) S(\xi') \left\{ \alpha(\beta'^2 - \xi'^2) - \alpha'(\beta^2 - \xi^2) + 2\xi\xi'(\alpha - \alpha') \right\} (\phi_i \phi_i^* - \phi_i \phi_i^*) d\xi' d\xi, \\
I_5(x, z) &= \iint_{-\infty}^{\infty} S(\xi) S(\xi') \left\{ \xi(\beta'^2 - \xi'^2) - \xi'(\beta^2 - \xi^2) \right\} (\phi_i \phi_i^* + \phi_i \phi_i^* - \phi_i \phi_i^* - \phi_i \phi_i^*) d\xi' d\xi, \\
I_6(x, z) &= 2 \iint_{-\infty}^{\infty} S(\xi) S(\xi') (\xi' - \xi) \left\{ \alpha\beta'(\phi_i \phi_i^* - \phi_i \phi_i^*) + \alpha'\beta(\phi_i \phi_i^* - \phi_i \phi_i^*) \right\} d\xi' d\xi.
\end{aligned}$$

しかるに，(3.1.8) の被積分関数に含まれている変位ポテンシャルはすべて平面波のもので，共通な係数 $\exp \{i(\xi' - \xi)x + i(\alpha' - \alpha)E\}$ を省略すると， $z=0$ では

$$\begin{aligned}
\phi_i \phi_i^* &= 1, \quad \phi_i \phi_i^* = A(\xi) A(\xi'), \quad \phi_i \phi_i^* = B(\xi) B(\xi'), \quad \phi_i \phi_i^* - \phi_i \phi_i^* = A(\xi') - A(\xi), \\
\phi_i \phi_i^* \pm \phi_i \phi_i^* &= B(\xi) \pm B(\xi) A(\xi'), \quad \phi_i \phi_i^* \pm \phi_i \phi_i^* = B(\xi') \pm B(\xi') A(\xi).
\end{aligned}$$

また，(3.1.8) の被積分関数 $S(\xi)$ および $S(\xi')$ は (3.1.4) に見られるごとく， ξ_0 の近くでしか大きな値を持つことができぬ。

ゆえに， ξ または ξ' に関するすべての関数を ξ_0 付近でテーラー展開し， $\xi - \xi_0$ または $\xi' - \xi_0$ の 2 乗以上を係数に持つ項を無視すると，長い計算経過の後に次の結果に達する：

$$\begin{aligned}
I_1(x, 0) &= 2k^2 \alpha(\xi_0) I(x, 0), \\
I_2(x, 0) &= -2k^2 \alpha(\xi_0) A^2(\xi_0) I(x, 0), \\
I_3(x, 0) &= -2k^2 \beta(\xi_0) B^2(\xi_0) I(x, 0), \\
I_4(x, 0) &= -\left[(\xi/\alpha)(k^2 - 4\alpha^2)(\partial A/\partial \xi) \right]_{\xi=\xi_0} \partial^2 I(x, 0)/\partial x^2, \\
I_5(x, 0) &= -(k^2 + 2\xi_0^2) \left[(1+A)\partial B/\partial \xi - B\partial A/\partial \xi \right]_{\xi=\xi_0} \partial^2 I(x, 0)/\partial x^2, \\
I_6(x, 0) &= -2 \left[\beta B \partial \left\{ \alpha(1-A) \right\} / \partial \xi - \alpha(1-A) \partial(\beta B) / \partial \xi \right]_{\xi=\xi_0} \partial^2 I(x, 0)/\partial x^2; \\
I(x, 0) &= \iint_{-\infty}^{\infty} S(\xi) S(\xi') e^{i(\alpha' - \alpha)E} e^{i(\xi' - \xi)x} d\xi' d\xi. \tag{3.1.9}
\end{aligned}$$

しかるに、

$$|\partial^2 I(x, 0)/\partial x^2| = (\xi' - \xi)^2 |I(x, 0)| \approx (A\xi)^2 |I(x, 0)| \ll \xi_0^2 |I(x, 0)|$$

なので、 I_1, I_2, I_3 に比し I_4, I_5, I_6 は極めて小さいと考えられる。ゆえに、後の3量を無視すると、(3.1.8)は次のごとくなる：

$$\bar{F}_z(x, 0: \text{beam}) = -(\omega\mu/4) \left\{ I_1(x, 0) + I_2(x, 0) + I_3(x, 0) \right\}. \tag{3.1.10}$$

しかも、 I_1, I_2, I_3 に関しては、平面波の場合の(2.1.12)と同様に、

$$-\left\{ I_2(x, 0) + I_3(x, 0) \right\} = 2k^2 \alpha(\xi_0) I(x, 0) \left[A^2 + (\beta/\alpha) B^2 \right]_{\xi=\xi_0} = I_1(x, 0). \tag{3.1.11}$$

これを(3.1.10)に代入すると、 $\bar{F}_z=0$ なので、 $z=0$ 面をこれに垂直に通過する入射P波のビームのエネルギー流量はすべて反射P波と反射S波のビームのエネルギー流量に保存されるものと解釈される。

次に、(2.1.10)の \bar{F}_z を(3.1.7)の被積分関数に代入すると、

$$\bar{F}_z(x, z: \text{beam}) = (\omega\mu/4) \left\{ I_1(x, z) + I_2(x, z) + I_3(x, z) + I_4(x, z) + I_5(x, z) + I_6(x, z) \right\}. \tag{3.1.12}$$

上式の I_1, I_2 および I_3 はそれぞれP波の入射ビーム、P波およびS波の反射ビームに対応し、 I_4, I_5 および I_6 はそれらの干渉によって生じた項である。ふたたび、 ξ または ξ' の関数を ξ_0 近傍でテーラー展開し、 $\xi - \xi_0$ または $\xi' - \xi_0$ の1乗以上の項を無視すると、今度は、(2.1.13)の ξ を ξ_0 で置き換えたものを(3.1.7)に代入したのと同じ結果になる。すると、(3.1.12)についても、平面波の場合の(2.1.17)と同様な結論が得られる。

3.2 入射ビームがP波ではなくてSV波で、かつ $\xi < h$ の場合は、(2.2.2)を(3.1.7)に代入すると、(3.1.8)は次のように変わる：

$$\bar{F}_z(x, z: \text{beam}) = -(\omega\mu/4) \left\{ I_1(x, z) + I_2(x, z) + I_3(x, z) + I_4(x, z) + I_5(x, z) + I_6(x, z) \right\}; \tag{3.2.1}$$

$$\begin{aligned}
I_1(x, z) &= \iint_{-\infty}^{\infty} S(\xi) S(\xi') \left\{ \beta(\beta'^2 - \xi'^2) + \beta'(\beta^2 - \xi^2) + 2\xi\xi'(\beta + \beta') \right\} \psi_i \psi_i^* d\xi' d\xi, \\
I_2(x, z) &= - \iint_{-\infty}^{\infty} S(\xi) S(\xi') \left\{ \beta(\beta'^2 - \xi'^2) + \beta'(\beta^2 - \xi^2) + 2\xi\xi'(\beta + \beta') \right\} \psi_i \psi_i^* d\xi' d\xi, \\
I_3(x, z) &= - \iint_{-\infty}^{\infty} S(\xi) S(\xi') \left\{ \alpha(\beta'^2 - \xi'^2) + \alpha'(\beta^2 - \xi^2) + 2\xi\xi'(\alpha + \alpha') \right\} \phi_i \phi_i^* d\xi' d\xi, \\
I_4(x, z) &= \iint_{-\infty}^{\infty} S(\xi) S(\xi') \left\{ \beta(\beta'^2 - \xi'^2) - \beta'(\beta^2 - \xi^2) + 2\xi\xi'(\beta - \beta') \right\} (\psi_i \psi_i^* - \phi_i \phi_i^*) d\xi' d\xi, \\
I_5(x, z) &= \iint_{-\infty}^{\infty} S(\xi) S(\xi') \left\{ \xi(\beta'^2 - \xi'^2) - \xi'(\beta^2 - \xi^2) \right\} (\psi_i \phi_i^* + \phi_i \psi_i^* - \phi_i \psi_i^* - \psi_i \phi_i^*) d\xi' d\xi, \\
I_6(x, z) &= 2 \iint_{-\infty}^{\infty} S(\xi) S(\xi') (\xi' - \xi) \left\{ \alpha' \beta (\psi_i - \phi_i) \phi_i^* + \alpha \beta' \phi_i (\psi_i^* - \phi_i^*) \right\} d\xi' d\xi.
\end{aligned}$$

ここでも、 ξ または ξ' の関数を ξ_0 近傍でテーラ-展開すると、結局、(3.1.9)~(3.1.11) に似た結果が得られる。

入射ビームが SV 波で、しかも $h < \xi < k$ であると、 β は実数であるが α は虚数 $-i\hat{\alpha}$ になる。この場合は、(2.2.6) を (3.1.7) に代入すると、(3.2.1) の右辺の各項は次のようになる：

$$\begin{aligned}
I_1(x, z) &= \iint_{-\infty}^{\infty} S(\xi) S(\xi') \left\{ \beta(\beta'^2 - \xi'^2) + \beta'(\beta^2 - \xi^2) + 2\xi\xi'(\beta + \beta') \right\} \psi_i \psi_i^* d\xi' d\xi, \\
I_2(x, z) &= - \iint_{-\infty}^{\infty} S(\xi) S(\xi') \left\{ \beta(\beta'^2 - \xi'^2) + \beta'(\beta^2 - \xi^2) + 2\xi\xi'(\beta + \beta') \right\} \psi_i \psi_i^* d\xi' d\xi, \\
I_3(x, z) &= i \iint_{-\infty}^{\infty} S(\xi) S(\xi') \left\{ \hat{\alpha}(\beta'^2 - \xi'^2) - \hat{\alpha}'(\beta^2 - \xi^2) + 2\xi\xi'(\hat{\alpha} - \hat{\alpha}') \right\} \phi_i \phi_i^* d\xi' d\xi, \\
I_4(x, z) &= \iint_{-\infty}^{\infty} S(\xi) S(\xi') \left\{ \beta(\beta'^2 - \xi'^2) - \beta'(\beta^2 - \xi^2) + 2\xi\xi'(\beta - \beta') \right\} (\psi_i \psi_i^* - \phi_i \phi_i^*) d\xi' d\xi, \\
I_5(x, z) &= \iint_{-\infty}^{\infty} S(\xi) S(\xi') \left\{ \xi(\beta'^2 - \xi'^2) - \xi'(\beta^2 - \xi^2) \right\} (\psi_i \phi_i^* - \phi_i \psi_i^* + \phi_i \psi_i^* - \psi_i \phi_i^*) d\xi' d\xi, \\
I_6(x, z) &= 2i \iint_{-\infty}^{\infty} S(\xi) S(\xi') (\xi' - \xi) \left\{ \hat{\alpha}' \beta (\psi_i - \phi_i) \phi_i^* + \hat{\alpha} \beta' \phi_i (\psi_i^* - \phi_i^*) \right\} d\xi' d\xi. \quad (3.2.2)
\end{aligned}$$

ふたたび、 ξ も ξ' も ξ_0 近傍でテーラ-展開すると、

$$\begin{aligned}
\beta(\beta'^2 - \xi'^2) + \beta'(\beta^2 - \xi^2) + 2\xi\xi'(\beta + \beta') &\approx 2k^2 \beta(\xi_0), \\
\hat{\alpha}(\beta'^2 - \xi'^2) - \hat{\alpha}'(\beta^2 - \xi^2) + 2\xi\xi'(\hat{\alpha} - \hat{\alpha}') &\approx -(\xi' - \xi) \left[\frac{(\xi/\hat{\alpha})(k^2 + 4\hat{\alpha}^2)}{\xi} \right]_{\xi=\xi_0}, \\
\beta(\beta'^2 - \xi'^2) - \beta'(\beta^2 - \xi^2) - 2\xi\xi'(\beta' - \beta) &\approx (\xi' - \xi) \left[\frac{(\xi/\beta)(k^2 - 4\beta^2)}{\xi} \right]_{\xi=\xi_0}. \quad (3.2.3)
\end{aligned}$$

ゆえに、

$$Y'_0 = \partial Y(\xi_0) / \partial \xi, \quad (3.2.4)$$

$$I(x, 0) = \iint_{-\infty}^{\infty} S(\xi) S(\xi') e^{i(\beta' - \beta)z} e^{i(\xi' - \xi)x} d\xi' d\xi \quad (3.2.5)$$

とおくと、(3.2.1) の右辺の始めの 4 項は次のごとく表わされる：

$$\begin{aligned}
 I_1(x, 0) &= 2k^2\beta(\xi_0) I(x, 0), \\
 I_2(x, 0) &= -2k^2\beta(\xi_0) I(x-2Y'_0, 0) = -I_1(x-2Y'_0, 0), \\
 I_3(x, 0) &= -\left[(\xi/\hat{\alpha})(k^2+4\hat{\alpha}^2)|C|^2 \right]_{\xi_0} \partial I(x-Y'_0, 0)/\partial x, \\
 I_4(x, 0) &= -2\left[(\xi/\beta)(k^2-4\beta^2)\sin 2Y \right]_{\xi_0} \partial I(x-Y'_0, 0)/\partial x. \tag{3.2.6}
 \end{aligned}$$

さらに,

$$\begin{aligned}
 \xi(\beta'^2-\xi'^2)-\xi'(\beta^2-\xi^2) &\approx -(\xi'-\xi)(k^2+2\xi_0^2), \\
 \phi_i\phi_i^*-\phi_i\phi_i^*+\phi_i\phi_i^*-\phi_i\phi_i^* &\approx 2\left[\cos^2 Y(\partial/\partial\xi) \left\{ 4\beta\xi/(\beta^2-\xi^2) \right\} \right]_{\xi_0} (\xi'-\xi) e^{iY(\xi)-Y(\xi')}, \\
 \hat{\alpha}'\beta(\phi_i\phi_i^*-\phi_i\phi_i^*)+\hat{\alpha}\beta'(\phi_i\phi_i^*-\phi_i\phi_i^*) \\
 &\approx 2i\left[(\hat{\alpha}|C|)(\partial/\partial\xi)(\beta\sin Y)-\beta\sin Y(\partial/\partial\xi)(\hat{\alpha}|C|) \right]_{\xi_0} e^{iY(\xi)-Y(\xi')}.
 \end{aligned}$$

ゆえに, (3.2.1)の右辺の後の2項に関しては,

$$I_5(x, 0), \quad I_6(x, 0) \propto \partial^2 I(x-Y'_0, 0)/\partial x^2. \tag{3.2.7}$$

ゆえに, I_3 と I_4 は $\xi'-\xi$ に比例するのに対し, I_5 と I_6 は $(\xi'-\xi)^2$ に比例する。しかるに, ξ' も ξ も ξ_0 に近いので, I_5 と I_6 を I_1 と I_2 に比して無視すれば, (3.2.1)は次のごとく書き換えられる:

$$\bar{f}_z(x, 0: \text{beam}) = -(\omega\mu/4) \left\{ I_1(x, 0) + I_2(x, 0) + I_3(x, 0) + I_4(x, 0) \right\}. \tag{3.2.8}$$

上式の右辺の各項を模式的に表わすと第3.3図のごとくなる。この容子は2媒質の境界面における音波の全反射⁹⁾に似ている。反射SVビーム I_2 は $x=0$ において入射SVビームから x 方向に $2Y'_0$ だけずれる。しかし, I_1 と I_2 の振幅は単に逆転しているだけなので, ビームの中間では

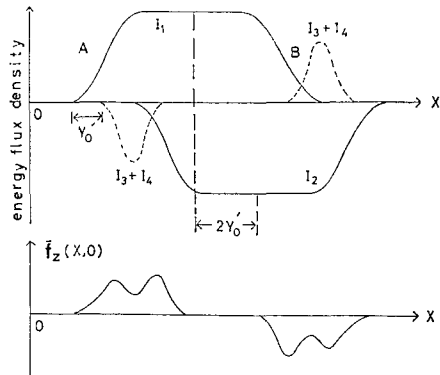
$$I_1 + I_2 = I_3 + I_4 = 0.$$

これに反し, 入射ビームの両端(A, B)付近では

$$I_1 + I_2 \neq 0$$

なので, I_3+I_4 やさらに I_5+I_6 などが加わって, はじめて $\bar{f}_z(x, 0: \text{beam}) = 0$ の条件が満されるものと思われる。

上述のごとく, ビームの両端付近では I_3+I_4 は0ではないが, その振幅はA付近とB付近では逆転しているので, I_3+I_4 を x についてAから



第3.3図 自由表面におけるSVビームの全反射

Fig. 3.3. Total reflection of SV beam on the free surface.

9) BREKHOVSKIKH, L. M., 前出, 113.

$B+2Y'_0$ まで積分すれば, その結果は 0 になる。すなわち, エネルギー流量密度ではなくて, エネルギー流量に注目すれば, ビーム全体としては, 常に

$$\int \bar{f}_z(x, 0; \text{beam}) dx = 0 \quad (3.2.9)$$

であって, 入射ビームのエネルギー流量はすべて反射ビームのみに保存される。

4. 円筒関数の 2, 3 の性質の応用

4.1 等方体の運動方程式は

$$v_p = \{(\lambda + 2\mu)/\rho\}^{1/2}, \quad v_s = (\mu/\rho)^{1/2}$$

とおき, body force を無視すると,

$$\partial^2 \mathbf{s} / \partial t^2 = v_p^2 \nabla \nabla \cdot \mathbf{s} - v_s^2 \nabla \times \nabla \times \mathbf{s}. \quad (4.1.1)$$

運動が時間的に定常な場合は, ω を角周波数とし

$$h = \omega/v_p, \quad k = \omega/v_s. \quad (4.1.2)$$

とおくと, (4.1.1) は次のごとくなる,

$$\mathbf{s} = -h^{-2} \nabla \nabla \cdot \mathbf{s} + k^{-2} \nabla \times \nabla \times \mathbf{s}. \quad (4.1.3)$$

この式の両辺に $\text{div} \equiv \nabla \cdot$ あるいは $\text{rot} \equiv \nabla \times$ なる演算¹⁰⁾ を施すと,

$$(\nabla^2 + h^2) \nabla \cdot \mathbf{s} = 0 \quad \text{および} \quad (\nabla^2 + k^2) \nabla \times \mathbf{s} = 0. \quad (4.1.4)$$

ゆえに, (4.1.3) を解くには

$$(\nabla^2 + k^2) \phi = 0 \quad (4.1.5)$$

なる形のヘルムホルツの偏微分方程式の特解を求め, それを適当に組み合わせればよい。その際に, 3次元の座標ごとに変数が分離された特解を仮定すると, 各座標変数 z ごとに, (4.1.5) は一般に次の形の常微分方程式に分けられる,

$$L(\psi) = \frac{d^2 \psi}{dz^2} + p(z) \frac{d\psi}{dz} + q(z) \psi = 0. \quad (4.1.6)$$

平面波の場合は

$$L(\psi) = d^2 \psi / dz^2 + k^2 \psi \quad \therefore \quad p = 0, \quad q = k^2,$$

円筒波の場合は, (4.2.3) のごとく

$$\begin{aligned} L(\psi) &= d^2 \psi / dz^2 + (1/z) (d\psi / dz) + (1 - v^2/z^2) \psi \quad \therefore \quad p = 1/z, \\ q &= 1 - v^2/z^2. \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

(4.1.6) において,

10) 伊藤徳之助; 前出, 34, 137.

$$p = \frac{d}{dz} (\ln f) = \frac{1}{f} \frac{df}{dz} \quad (4.1.8)$$

とおくと,

$$L(\psi) = \frac{1}{f} \frac{d}{dz} \left(f \frac{d\psi}{dz} \right) + q\psi$$

と書かれる。

(4.1.6)には互いに独立な解 y_1 と y_2 とが存在すべきなので,

$$\mathcal{A}(y_1, y_2) \equiv y_1 \frac{dy_2}{dz} - y_2 \frac{dy_1}{dz} \quad (4.1.9)$$

を考察してみる。 $\mathcal{A}(y_1, y_2)$ は齊次方程式 $L(\psi) = 0$ の解 y_1 および y_2 の Wronskian と呼ばれている。¹¹⁾

ベクトル \mathbf{y}_1 とベクトル \mathbf{y}_2 の方向が同じであれば $\mathbf{y}_2 = a\mathbf{y}_1$ なので, $\mathcal{A}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) = 0$ になる。これに反し, \mathbf{y}_1 と \mathbf{y}_2 の方向が違えば $\mathcal{A}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) \neq 0$ であって, \mathbf{y}_1 と \mathbf{y}_2 とは互いに独立であると云われる。

y_1 および y_2 を (4.1.6) の互いに独立な解とすると,

$$\frac{d\mathcal{A}}{dz} = y_1 \frac{d^2 y_2}{dz^2} - y_2 \frac{d^2 y_1}{dz^2} = -y_1 \left(p \frac{dy_2}{dz} + q y_2 \right) + y_2 \left(p \frac{dy_1}{dz} + q y_1 \right).$$

ゆえに, (4.1.8) を用いて,

$$\frac{d\mathcal{A}}{dz} = -p\mathcal{A} = -\mathcal{A} \frac{d}{dz} (\ln f).$$

$$\therefore \ln \mathcal{A} = - \int p dz = - \ln f + \text{constant},$$

すなわち,

$$\mathcal{A} = \text{constant} \cdot \frac{1}{f(z)}. \quad (4.1.10)$$

円筒波の場合は (4.1.7) と (4.1.8) とから

$$f = \text{constant} \cdot z$$

なので, (4.1.10) は次のごとくなる,

$$\mathcal{A}(y_1, y_2) = \text{constant} \cdot (1/z). \quad (4.1.11)$$

一方, 円筒波の場合は, (4.1.6) と (4.1.7) とを考慮すると, ハンケル関数 $H_v^{(1)}(z)$ と $H_v^{(2)}(z)$ とを互いに独立な $L(\psi) = 0$ の解と考えることができる。ゆえに, (4.1.11) により

$$\mathcal{A}(H_v^{(1)}, H_v^{(2)}) = H_v^{(1)} \frac{dH_v^{(2)}}{dz} - H_v^{(2)} \frac{dH_v^{(1)}}{dz} = \text{constant} \cdot \frac{1}{z}. \quad (4.1.12)$$

11) MORSE, P. M. and H. FESHACH; Methods of Theoretical Physics, MCGRAW-HILL, (1953), 524-525.

しかるに、 z が大きい場合は¹²⁾

$$\begin{aligned} H_y^{(1)}(z) &\longrightarrow (2/\pi z)^{1/2} e^{\ell z - \ell\pi(\nu+1/2)/2}, \\ H_y^{(2)}(z) &\longrightarrow (2/\pi z)^{1/2} e^{-\ell z + \ell\pi(\nu+1/2)/2}. \end{aligned}$$

ゆえに、 z が極めて大きければ、

$$A(H_y^{(1)}, H_y^{(2)}) \longrightarrow 4/(\pi i z). \quad (4.1.13)$$

そこで、(4.1.12) と (4.1.13) とを比較すると、(4.1.12) の constant は $4/(\pi i)$ でなければならぬことがわかる¹³⁾。

4.2 線状振源から発射される波を考えるには、円筒座標 (r, θ, z) を採用すると都合である。この際に、第2種の S 波の変位を $s_2 = \psi \exp(i\omega t)$ とすると、 ψ の方程式は (4.1.5) になる。 z 方向へは変化のない現象を扱う場合には

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (4.2.1)$$

なので、 $\psi = \psi_1(r) \psi_2(\theta)$ とおくと、(4.1.5) は次のごとき連立方程式に分離される、

$$\frac{r^2}{\psi_1} \frac{d^2 \psi_1}{dr^2} + \frac{r}{\psi_1} \frac{d\psi_1}{dr} + r^2 k^2 = - \frac{1}{\psi_2} \frac{d^2 \psi_2}{d\theta^2} \equiv \nu^2.$$

ゆえに、

$$\psi_2 = e^{\pm i\nu\theta}, \quad \frac{d^2 \psi_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi_1}{dr} + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{r^2}\right) \psi_1 = 0. \quad (4.2.2)$$

ここで、 $z = kr$ とおくと、(4.2.2) の第2式はベッセルの微分方程式

$$\frac{d^2 \psi_1}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d\psi_1}{dz} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) \psi_1 = 0 \quad (4.2.3)$$

になる。ベッセルの微分方程式に対しては種々な形の特解が研究されているが、波動を扱うにはハンケル関数 $H_y^{(1)}(z)$, $H_y^{(2)}(z)$ を選ぶと具合がよい。 z が大きいと、(4.1.12) の下で見たごとく、

$$H_y^{(1)}(kr) e^{i\omega t} \propto e^{\ell(\omega t + kr)}, \quad H_y^{(2)}(kr) e^{i\omega t} \propto e^{\ell(\omega t - kr)}$$

はそれぞれ r 方向への後退波および進行波を表わすからである。

線状振源から発射される波は r 方向への進行波であるべきなので、この際には (4.2.3) の特解として $\psi_1 = \pi H_y^{(2)}(z)$ を採用する。すると、

$$s_2 = e^{i\omega t} \pi H_y^{(2)}(kr) e^{\pm i\nu\theta}. \quad (4.2.4)$$

変位 s_2 が z 方向のみならず、 θ 方向へも変化せぬ場合は $\nu=0$ であるべきなので、(4.2.4) はさらに次のごとくなる、

12) MORSE and FESHBACH; 前出, 623-624.

13) MORSE and FESHBACH; 前出, 624.

$$s_2 = e^{i\omega t} \pi H_0^{(2)}(kr). \quad (4.2.5)$$

さて、(4.2.5)のごとき円筒波が平面の境界面にぶつかる場合を扱うためには、ハンケル関数 $H_0^{(1)}(kr)$ または $H_0^{(2)}(kr)$ を平面波から合成する手段が必要になる。この手段は LAMB¹⁴⁾ によって始めて行なわれたが、後になって中野¹⁵⁾ は

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2}, \quad \beta = (k^2 - \xi^2)^{1/2}$$

に対し

$$H_0^{(1)}(kr) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\xi(x + \beta y)} \frac{d\xi}{\beta}, \quad H_0^{(2)}(kr) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi(x + \beta y)} \frac{d\xi}{\beta} \quad (4.2.6)$$

なる関係を LAMB よりも一層数学的に証明した。この関係式は、これなくしては平面の境界を持つ媒質内の波動現象を扱えぬほど重要であるにもかかわらず、中野の論文以外にはその証明は余り見られない。しかも、中野の証明はかなり長い複素積分の経過を辿らねばならぬ。ここでは、STRATTON¹⁶⁾ と同様な方法により、多くの書物に見られるハンケル関数の積分表示¹⁷⁾

$$H_0^{(1)}(z) = \frac{1}{\pi} \int_B e^{iz \cos \phi + i\nu(\phi - \pi/2)} d\phi: \quad -\frac{\pi}{2} < \phi < \pi, \\ H_0^{(2)}(z) = \frac{1}{\pi} \int_C e^{iz \cos \phi + i\nu(\phi - \pi/2)} d\phi: \quad \frac{\pi}{2} < \phi < 2\pi, \quad (4.2.7)$$

から出発して、(4.2.6)に到着することを試みよう。(4.2.7)の積分路 B および C は第 4.1 図に示されている。

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\xi(x + \beta y)} \frac{d\xi}{\beta}$$

において、 (ξ, β) 空間では

$$\xi = k \sin \gamma, \quad \beta = k \cos \gamma \quad (4.2.8)$$

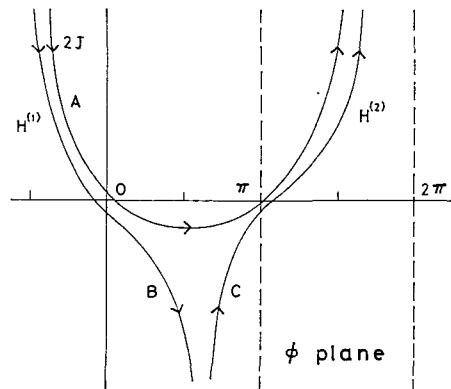
とおき、 (x, y) 空間では

$$x = r \sin \theta, \quad y = r \cos \theta \quad (4.2.9)$$

とおくと、

$$\xi x + \beta y = kr \cos(\gamma - \theta).$$

また、 $\gamma = \bar{\gamma} + i\hat{\gamma}$ ($\bar{\gamma}$ も $\hat{\gamma}$ も実数) とおくと、



第 4.1 図 ハンケル関数 $H_0^{(1)}(z)$, $H_0^{(2)}(z)$ およびベッセル関数 $J(z)$ の積分路

Fig. 4.1. The path of integration for Bessel functions.

14) LAMB, H.; On the Propagation of Tremors over the Surface of an Elastic Solid, Phil. Trans. Ser. A, 203 (1904), 1-42.

15) NAKANO, H.; On Rayleigh Wave, Jap. Journ. Astro. and Geophysics, 2 (1925), 1-94.

16) STRATTON, J. A.; Electromagnetic Theory, MCGRAW-HILL (1941), 361-369.

17) MORSE and FESHBACH; 前出, 623-624.

WATSON, G. N.; Theory of Bessel Functions, CAMBRIDGE (1922), 178.

$$\sin \gamma = \sin \bar{\gamma} \cosh \hat{\gamma} + i \cos \bar{\gamma} \sinh \hat{\gamma}, \quad \cos \gamma = \cos \bar{\gamma} \cosh \hat{\gamma} - i \sin \bar{\gamma} \sinh \hat{\gamma}.$$

ゆえに, $\Im \beta > 0$ で

$$\xi = \infty \text{ の時は } \quad \bar{\gamma} = \pi/2, \quad \hat{\gamma} = -\infty,$$

$$\xi = -\infty \text{ の時は } \quad \bar{\gamma} = -\pi/2, \quad \hat{\gamma} = \infty.$$

$$\therefore I_1 = \int_{-\pi/2+i\infty}^{\pi/2-i\infty} e^{i k r \cos(\gamma-\theta)} d\gamma = \int_{-\pi/2+\theta+i\infty}^{\pi/2+\theta-i\infty} e^{i k r \cos \gamma} d\gamma = \int_B e^{i k r \cos \gamma} d\gamma.$$

ゆえに, (4.2.7) と比較すると,

$$I_1 = \pi H_0^{(1)}(kr).$$

次に

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\xi x + \beta y)} \frac{d\xi}{\beta}$$

の場合は, $y \rightarrow \infty$ に対し積分値が有限に確定するためには, $\Im \beta < 0$ でなければならぬ。ゆえに,

$$\xi = \infty \text{ の時は } \quad \gamma = \pi/2 + i\infty,$$

$$\xi = -\infty \text{ の時は } \quad \gamma = -\pi/2 - i\infty.$$

$$\therefore I_2 = \int_{-\pi/2+\theta-i\infty}^{\pi/2+\theta+i\infty} e^{-i k r \cos \gamma} d\gamma = \int_{\pi/2+\theta-i\infty}^{3\pi/2+\theta+i\infty} e^{i k r \cos \gamma} d\gamma = \int_C e^{i k r \cos \gamma} d\gamma.$$

ゆえに, (4.2.7) と比較すると,

$$I_2 = \pi H_0^{(2)}(kr).$$

4.3 SH 波の変位の成分を $s = \psi \exp(i\omega t)$ とすると, ψ は (4.1.5) を満足する。SH 波の場合は $\nabla \cdot \mathbf{s} = 0$ なので, 応力テンソルは

$$\Psi = 2\mu\Phi = \mu(\nabla \mathbf{s} + \mathbf{s}\nabla)$$

になる。ゆえに, 閉曲面から外へ出るエネルギー流量密度は, (1.1.6) の右辺の符号を変えて

$$\mathbf{f} = -\Psi \cdot (\partial \mathbf{s} / \partial t) = -\mu(\nabla \mathbf{s} + \mathbf{s}\nabla) \cdot (\partial \mathbf{s} / \partial t).$$

次に, 円筒座標系の半径 r 方向の単位ベクトルを \mathbf{a}_1 , 軸方向の単位ベクトルを \mathbf{a}_3 とし, 変位 $\mathbf{s} = \mathbf{a}_3 s$ は r 方向にのみ変化するものとする, 定義により

$$\nabla \mathbf{s} = \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_3 \partial s / \partial r, \quad \mathbf{s}\nabla = \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_1 \partial s / \partial r.$$

ゆえに,

$$\mathbf{f} = -\mu(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_3 \partial s / \partial r + \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_1 \partial s / \partial r) \cdot \mathbf{a}_3 \partial s / \partial t = -\mathbf{a}_1 \mu (\partial s / \partial r) (\partial s / \partial t). \quad (4.3.1)$$

しかるに, (1.4.11) で述べたのと同じ理由により, s の共軛複素数を s^* とすると,

$$s(r, t) = \psi(r) e^{i\omega t} = |\psi(r)| e^{i f(r)} e^{i\omega t}, \quad s^*(r, t) = \psi^*(r) e^{-i\omega t} = |\psi(r)| e^{-i f(r)} e^{-i\omega t}$$

なので,

$$\begin{aligned}\Re s &= (1/2) |\psi(r)| (e^{if(r)+i\omega t} + e^{-if(r)-i\omega t}) = (1/2)(s+s^*), \\ \partial \Re s / \partial t &= (i\omega/2) |\psi(r)| (e^{if(r)+i\omega t} - e^{-if(r)-i\omega t}) = (i\omega/2)(s-s^*).\end{aligned}$$

これらの結果により,

$$(\partial \Re s / \partial r) \cdot (\partial \Re s / \partial t) = (i\omega/4) (\partial s / \partial r + \partial s^* / \partial r) (s - s^*).$$

ゆえに, 1 周期 $2\pi/\omega$ の間の平均値を採用すると, (4.3.1) は次のごとくなる,

$$\bar{f} = \alpha_1 (i\omega\mu/4) (\psi^* \partial \psi / \partial r - \psi \partial \psi^* / \partial r). \quad (4.3.2)$$

(4.3.1) に用いたとき円筒座標系で, 変位 \mathbf{s} が軸方向にも方位角にも無関係な場合は, (4.2.5) により, ψ は次のごとく表わされる,

$$\psi = \pi H_0^{(2)}(kr).$$

しかるに, ノイマン関数 $Y_\nu(z)$ を用いると,

$$H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + iY_\nu(z), \quad H_\nu^{(2)}(z) = J_\nu(z) - iY_\nu(z)$$

であるから¹⁸⁾,

$$\psi^* = \pi \{H_0^{(2)}(kr)\}^* = \pi H_0^{(1)}(kr).$$

ゆえに, $z=kr$ とおくと, (4.3.2) は次のごとく書き換えられる,

$$\bar{f}_r = \bar{f} \cdot \alpha_1 = (i\pi^2 \omega \mu / 4) k \{H_0^{(1)}(z) dH_0^{(2)} / dz - H_0^{(2)}(z) dH_0^{(1)} / dz\}.$$

しかるに, (4.1.12) と (4.1.13) とによれば,

$$\mathbf{A}(H_0^{(1)}, H_0^{(2)}) = H_0^{(1)} dH_0^{(2)} / dz - H_0^{(2)} dH_0^{(1)} / dz = 4 / (\pi iz)$$

なので,

$$\bar{f}_r = \pi \omega \mu / r. \quad (4.3.3)$$

ゆえに, 半径 r の半円周を通して外へ流れるエネルギー流量は

$$\bar{f}_r \times \pi r = \pi^2 \omega \mu \quad (4.3.4)$$

であって, この量は半径 r には無関係である。

次に, P 波および SV 波の変位ポテンシャルを ϕ および ψ とすると, 円筒座標 (r, θ, z) 系における変位 \mathbf{s} の r および θ 成分は

$$-s_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad -s_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (4.3.5)$$

であって, ϕ および ψ が

$$(\nabla^2 + h^2) \phi = 0, \quad (\nabla^2 + k^2) \psi = 0 \quad (4.3.6)$$

を満足すれば, 変位 \mathbf{s} は運動方程式 (4.1.3) を満足する。前と同様に, (4.3.6) の特解を

18) WATSON; 前出, 73.

$$\phi = \pi H_0^{(2)}(hr), \quad \psi = \pi H_0^{(2)}(kr)$$

とすると,

$$dH_0^{(1)}(z)/dz = -H_1^{(1)}(z), \quad dH_0^{(2)}(z)/dz = -H_1^{(2)}(z) \quad (4.3.7)$$

なので¹⁹⁾, (4.3.5) から

$$s_r = \pi h H_1^{(2)}(hr), \quad s_\theta = \pi k H_1^{(2)}(kr). \quad (4.3.8)$$

円筒座標の軸方向にも方位方向にも変化のない P 波だけが存在する場合は

$$\mathbf{s} = \mathbf{a}s_r, \quad \nabla = \mathbf{a}\partial/\partial r, \quad \nabla \mathbf{s} = \mathbf{s}\nabla = \mathbf{a}\mathbf{a}\partial s_r/\partial r$$

なので,

$$\mathbf{f} = -\mathbf{a}(\lambda + 2\mu)(\partial s_r/\partial r)(\partial s_r/\partial t).$$

しかるに, (4.3.1) から (4.3.2) に至ったのと同様な演算を行なうと,

$$(\partial \Re s_r/\partial t)(\partial \Re s_r/\partial r) = (i\omega/4)(s_r - s_r^*)(\partial s_r/\partial r + \partial s_r^*/\partial r).$$

ゆえに, s_r の 1 周期間の平均値を採用すると,

$$\left(\frac{\partial \Re s_r}{\partial t} \frac{\partial \Re s_r}{\partial r} \right)_{\text{mean}} = \frac{i\omega}{4} \left(s_r \frac{\partial s_r^*}{\partial r} - s_r^* \frac{\partial s_r}{\partial r} \right)$$

なので,

$$\bar{f}_r = (i\omega/4)(\lambda + 2\mu)(s_r^* \partial s_r/\partial r - s_r \partial s_r^*/\partial r).$$

これに (4.3.8) を代入し, ふたたび (4.1.12) の Wronskian を用いると, (4.3.4) と同様な結果

$$\bar{f}_r \times \pi r = \pi^2 \omega (\lambda + 2\mu) h^2 = \pi^2 \rho \omega^3 \quad (4.3.9)$$

に到着する。

4.4 軸方向の運動を無視すると, 半径 a の円柱の自由振動の特性は次式によって与えられる²⁰⁾:

$$\left\{ (k^2 - 2\xi^2) J_{\xi a}(ha) + \frac{2}{a} \frac{dJ_{\xi a}(ha)}{da} \right\} \left\{ (k^2 - 2\xi^2) J_{\xi a}(ka) + \frac{2}{a} \frac{dJ_{\xi a}(ka)}{da} \right\} - 4\xi^2 \left\{ \frac{dJ_{\xi a}(ha)}{da} - \frac{J_{\xi a}(ha)}{a} \right\} \left\{ \frac{dJ_{\xi a}(ka)}{da} - \frac{J_{\xi a}(ka)}{a} \right\} = 0. \quad (4.4.1)$$

ここで, $\nu = \xi a$, $z = ha$ または $z = ka$ とおくと, 上式の $J_{\xi a}$ は, (4.2.3) と同様なベッセルの微分方程式

$$\frac{d^2 J_\nu(z)}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dJ_\nu(z)}{dz} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2} \right) J_\nu(z) = 0 \quad (4.4.2)$$

19) WATSON; 前出, 74.

20) EWING, JARDETZKY and PRESS; Elastic Waves in Layered Media, MCGRAW-HILL (1957), 264.

この書物では (4.4.1) 式の左辺の第 2 項の係数 $4\xi^2$ が 4ξ になっている。この書物のままでは各項の次元が合わぬ。妹沢克惟の論文に始めて発表されて以来のミスプリントが続いている。

の特解の1つであって、ベッセル関数の諸性質の中には

$$J_\nu(\nu) < \Gamma(1/3) (2^{2/3} 3^{1/6} \pi \nu^{1/3})^{-1} \quad (4.4.3)$$

なる不等式も含まれている²¹⁾。ゆえに、 $a \rightarrow \infty$ すなわち $\nu \rightarrow \infty$ の場合は

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} J_\nu(\nu) = 0 \quad \text{および} \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} dJ_\nu(\nu)/d\nu = 0. \quad (4.4.4)$$

次に、(4.4.1)の左辺を書き変えた後に、 $a \rightarrow \infty$ とし、(4.4.4)を考慮すると、

$$\begin{aligned} & \left\{ (k^2 - 2\xi^2)^2 - 4\frac{\xi^2}{a^2} \right\} J_\nu(ha) J_\nu(ka) + \left\{ \left(\frac{2}{a} \right)^2 - 4\xi^2 \right\} \frac{dJ_\nu(ha)}{da} \frac{dJ_\nu(ka)}{da} \\ & + \frac{2k^2}{a} \frac{d}{da} \left\{ J_\nu(ha) J_\nu(ka) \right\} \xrightarrow{a \rightarrow \infty} (k^2 - 2\xi^2)^2 J_\nu(ha) J_\nu(ka) - 4\xi^2 \frac{dJ_\nu(ha)}{da} \frac{dJ_\nu(ka)}{da}. \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

一方、

$$\frac{d^2 J_\nu}{da^2} = \frac{d}{da} \left(\frac{dJ_\nu}{da} \right)^2 \left/ \left(2 \frac{dJ_\nu}{da} \right) \right.$$

なので、これを(4.4.2)に代入すると、 $z=ha$ の場合は、 $\alpha^2 = h^2 - \xi^2$ なので

$$\frac{d}{da} \left(\frac{dJ_\nu}{da} \right)^2 + \frac{2}{a} \left(\frac{dJ_\nu}{da} \right)^2 + \alpha^2 \frac{dJ_\nu^2}{da} \xrightarrow{a \rightarrow \infty} \frac{d}{da} \left\{ \left(\frac{dJ_\nu}{da} \right)^2 + \alpha^2 J_\nu^2 \right\} = 0.$$

ゆえに、ふたたび(4.4.4)を考慮すると、

$$\left(\frac{dJ_\nu}{da} \right)^2 + (\alpha J_\nu)^2 = 0 \quad \text{すなわち} \quad \frac{dJ_\nu(ha)}{da} = \pm i \alpha J_\nu(ha). \quad (4.4.6)$$

同様にして、 $z=ka$ の場合は、 $\beta^2 = k^2 - \xi^2$ なので

$$\frac{dJ_\nu(ka)}{da} = \pm i \beta J_\nu(ka).$$

そこで、これと(4.4.6)とを(4.4.5)に代入すると(4.4.1)は $a \rightarrow \infty$ に対し次のごとくなる、

$$\left\{ (k^2 - 2\xi^2)^2 + 4\alpha\beta\xi^2 \right\} J_\nu(ha) J_\nu(ka) = 0. \quad (4.4.7)$$

上式のベッセル関数の係数はレーレー波の特性関数である。実は、(4.4.7)を得るにあたっては、(4.4.4)は厳密に成立しなくとも、右辺が有限でありさえすればよい。すると、(4.4.7)は半無限弾性体のレーレー波の特性方程式(速度方程式)に一致する。

5. 自由表面における円筒波の反射

5.1 第5.1図のごとく、振源Eから発射されたP波の波線 ϕ_i は自由表面 $z=0$ 上の1点Mに達すると、反射P波 ϕ_r と反射S波 ϕ_s とに分れる。この際に、P波およびS波の速度を v_p ,

21) WATSON; 前出, 259.

MORSE and FESHBACH; 前出, 631.

v_s とし、P 波および S 波の入射角または反射角を θ_p, θ_s とすれば、

$$\sin \theta_p / v_p = \sin \theta_s / v_s. \quad (5.1.1)$$

反射 P 波の波線 ϕ_i の反射角は入射 P 波の波線 ϕ_i の入射角 θ_p に等しいので、 ϕ_i は E の像 E' からあたかも発射された波線のごとくである。従って、反射 P 波の波面は E' を中心とし $\overline{EP'}$ を半径とする円弧になる。

一方、反射 S 波の方は、 \overline{PM} の延長上に

$$\overline{EM} / v_p = \overline{MQ} / v_s \quad (5.1.2)$$

なるごとき、反射 S 波の仮想的振源 $Q(x_0, z_0)$ を選び、Q から x 軸に下した垂線の足を G とすると、

$$\overline{EO} / (v_p \cos \theta_p) = \overline{QG} / (v_s \cos \theta_s), \quad \overline{GO} = \overline{EO} \tan \theta_p - \overline{QG} \tan \theta_s. \quad (5.1.3)$$

ゆえに、(5.1.1) と (5.1.3) とからまず θ_p を消去すると、

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta_s &= \left\{ \overline{QG}^2 - (\overline{EO} v_s / v_p)^2 \right\} / \left\{ (\overline{QG} v_p / v_s)^2 - (\overline{EO} v_s / v_p)^2 \right\}, \\ \overline{GO} &= (\overline{EO} v_p / v_s) \sin \theta_s \left\{ 1 - (v_p / v_s)^2 \sin^2 \theta_s \right\}^{-1/2} - \overline{QG} \sin \theta_s (1 - \sin^2 \theta_s)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

しかるに、(5.1.4) の第 1 式によれば、

$$\begin{aligned} 1 - (v_p / v_s)^2 \sin^2 \theta_s &= \overline{EO}^2 \left\{ 1 - (v_s / v_p)^2 \right\} / \left\{ (\overline{QG} v_p / v_s)^2 - (\overline{EO} v_s / v_p)^2 \right\}, \\ 1 - \sin^2 \theta_s &= \overline{QG}^2 \left\{ (v_p / v_s)^2 - 1 \right\} / \left\{ (\overline{QG} v_p / v_s)^2 - (\overline{EO} v_s / v_p)^2 \right\} \end{aligned}$$

なので、

$$x_0 = \overline{GO}, \quad z_0 = -\overline{QG}, \quad E = \overline{EO} \quad (5.1.5)$$

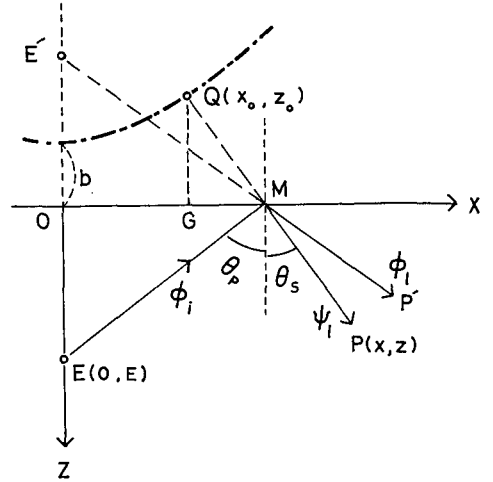
および

$$a^2 = \left\{ (v_p / v_s)^2 - 1 \right\} b^2, \quad b = E v_s / v_p \quad (5.1.6)$$

とおき、(5.1.4) から θ_s を消去すると、

$$-x_0^2 / a^2 + z_0^2 / b^2 = 1. \quad (5.1.7)$$

しかも、 $a^2 + b^2 = E^2$ なので、(5.1.2) で与えられた $Q(x_0, z_0)$ 点は E 点およびその像 E' を焦点とする双曲線上にある²²⁾。この双曲線の分枝の 1 つが第 5.1 図に 1 点鎖線で示されている。



第 5.1 図 自由表面における P 波および S 波の反射
Fig. 5.1. Reflections of P and S waves on the free surface.

22) CAGNIARD 著 DIX 訳; Reflection and Refraction of Progressive Seismic Waves, MCGRAW-HILL, 第 4 章~第 7 章 (1962).
田治米鏡二; 円筒波が 2 媒質の境界平面で反射または屈折を行なった後の波面, 震探グループ会報, 53, (1969), 1-6.

次に、(5.1.7)の双曲線上の1点Qにおける切線の傾斜は、(5.1.5)~(5.1.7)によれば

$$dz_0/dx_0 = (b/a)^2 x_0/z_0 = - \left\{ (v_p/v_s)^2 - 1 \right\} \overline{GO}/\overline{QG}. \quad (5.1.8)$$

しかるに、(5.1.3)によれば

$$\overline{GO}/\overline{QG} = \left\{ (v_p/v_s)^2 - 1 \right\} \tan \theta_s.$$

ゆえに、

$$dz_0/dx_0 = - \tan \theta_s. \quad (5.1.9)$$

ゆえに、Q点における法線と x 軸とのなす角は θ_s である。すなわち、第5.1図の線分 \overline{QM} はQ点の軌跡である双曲線の法線に一致している。ゆえに、反射S波の波面は(5.1.7)に求められた双曲線に平行な曲線である。

さらに、双曲線(5.1.7)の曲度の中心の座標 (X, Z) は次式によって与えられる²³⁾：

$$\begin{aligned} X &= x_0 - \left\{ 1 + (dz_0/dx_0)^2 \right\} (dz_0/dx_0) / (d^2z_0/dx_0^2), \\ Z &= z_0 + \left\{ 1 + (dz_0/dx_0)^2 \right\} / (d^2z_0/dx_0^2). \end{aligned} \quad (5.1.10)$$

しかるに、(5.1.7)と(5.1.8)とから

$$d^2z_0/dx_0^2 = (b^2/a^2)/z_0^3$$

なので、(5.1.9)を参照すると

$$X - x_0 = (a/b^2)^2 z_0^3 \sec^2 \theta_s \tan \theta_s, \quad Z - z_0 = (a/b^2)^2 z_0^3 \sec^2 \theta_s.$$

ゆえに、

$$(X - x_0) / (Z - z_0) = \tan \theta_s,$$

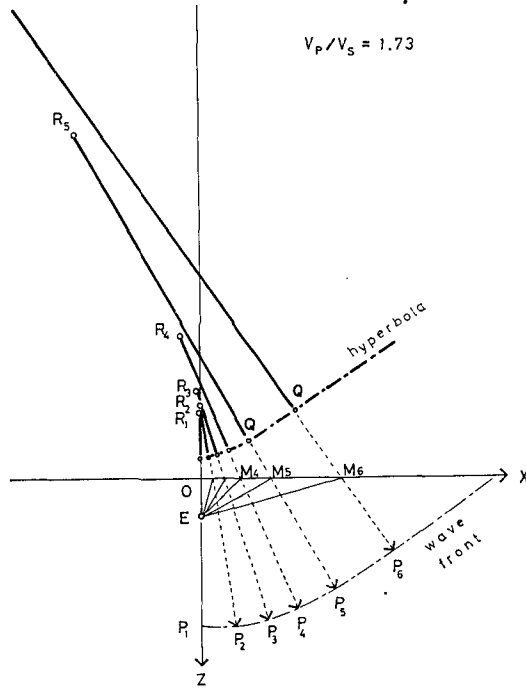
$$\theta \equiv \left\{ (X - x_0)^2 + (Z - z_0)^2 \right\}^{1/2} = (a/b^2)^2 |z_0|^3 \sec^3 \theta_s = (a/b)^2 b \sec^3 \theta_p.$$

$$\therefore |z_0| \sec \theta_s = \overline{QM} = (v_s/v_p) \overline{OE} \sec \theta_p = b \sec \theta_p. \quad (5.1.11)$$

上式の θ は双曲線(5.1.7)の法線に当たっていて、この双曲線のQ点における曲率半径である。ゆえに、第5.1図の \overline{PQ} の延長上に $\theta = \overline{QR}$ なるとき1点Rを選ぶと、双曲線の曲度の中心Rの軌跡すなわち縮閉線 (evolute) は第5.2図の曲線 $R_1 R_2 R_3 R_4 R_5 \dots$ のごとくなる。しかるに、反射S波の波面は双曲線(5.1.7)に平行なので、それは上記の縮閉線の伸開線 (involute) に当たっている。すると反射S波の波面は、全体としては円ではないが、部分的には円弧とみなされる。この円弧の中心はやはり R_1, R_2, R_3, \dots である。

以上に考察したごとく、入射P波に対しては、反射P波の波面は簡単な円であるのに反し、反射S波の波面の成り立ちは単純でない。

23) 竹内端三：高等微分学，裳華房 (1942), 233-234.



第 5.2 図 双曲線の縮閉線と反射 S 波の波面との関係

Fig. 5.2. The relation between the evolute of the hyperbola and the wave front of reflected S wave.

5.2 第 5.1 図の E 点から発射される円筒波を考え、(2.1.3) と (4.2.6) を参照して

$$\phi_i(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\xi x + \alpha|E-z|)} \frac{d\xi}{\alpha} \tag{5.2.1}$$

とおく。これは入射 P 波の変位ポテンシャルである。さらに、(2.1.1) を参照すると、反射 P 波および反射 S 波の変位ポテンシャルは次のごとく表わされる：

$$\phi_l(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\xi) e^{-i(\xi x + \alpha E + \alpha z)} \frac{d\xi}{\alpha}, \quad \phi_r(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} B(\xi) e^{-i(\xi x + \alpha E + \beta z)} \frac{d\xi}{\alpha}. \tag{5.2.2}$$

式(5.2.1)の右辺は(4.2.6)と同様に $\pi H_0^{(2)}(hr)$ なので、 ϕ_i は方向性のない円筒波である。これに反し、 ϕ_l や ϕ_r は単純な同筒波ではない。

まず、 ϕ_l の評価を最峻降下法によって行なうことにする。そのために、

$$Q(\xi) = -i(\xi x + \alpha E + \alpha z), \quad R = \{x^2 + (E+z)^2\}^{1/2} \tag{5.2.3}$$

とおくと、

$$dQ/d\xi = -i\{x - \xi(E+z)/\alpha\} = 0$$

なる条件から、サドル・ポイント ξ_s は次のごとく求められる、

$$\xi_s = hx/R. \quad (5.2.4)$$

ゆえに、サドル・ポイントでは

$$\alpha_s \equiv \alpha(\xi_s) = h(E+z)/R, \quad Q(\xi_s) = -ihR. \quad (5.2.5)$$

さらに、サドル・ポイントを通る最峻降下路は $\Im Q(\xi) = \Im Q(\xi_s)$ によって与えられるので、(5.2.3)と(5.2.5)により

$$\Im \left\{ -i(\xi x + \alpha E + \alpha z) \right\} = -hR. \quad (5.2.6)$$

次に、この曲線と ξ の実軸との交点は

$$\alpha \text{ が実数の時は } \xi = \xi_s = hx/R, \quad \alpha \text{ が虚数の時は } \xi = \xi_q = hR/\alpha. \quad (5.2.7)$$

これらの結果によれば、 x が 0 から ∞ に近づくにつれて、 ξ_s は 0 から h に近づくに反し、 ξ_q は ∞ から h に近づく。

さて、(5.2.3)と(5.2.5)によれば、

$$d^2 Q(\xi_s)/d\xi_s^2 = i(E+z)h^2/\alpha_s^3 = ihR/\alpha_s^2$$

なので、 $Q(\xi)$ をサドル・ポイント ξ_s 近傍でテーラー展開し、 $(\xi - \xi_s)$ の 3 乗以上の項を無視すると、

$$Q(\xi) = Q(\xi_s) + \left\{ (\Re \xi - \xi_s)^2 - (\Im \xi)^2 + 2i(\Im \xi)(\Re \xi - \xi_s) \right\} \cdot ihR/(2\alpha_s^2).$$

ゆえに、サドル・ポイント付近の最峻降下路は、 $\Im \{Q(\xi) - Q(\xi_s)\} = 0$ により

$$\Re \xi - \xi_s = \pm \Im \xi \quad (5.2.8)$$

であって、この路上では

$$\Re Q(\xi) = -(\Im \xi)(\Re \xi - \xi_s) hR/\alpha_s^2. \quad (5.2.9)$$

ところで、(5.2.2)の積分を評価しやすくするためには、(5.2.9)で $\Re Q(\xi) < 0$ であることが望ましいので、(5.2.8)の正負両記号の中で正の方だけを選ばねばならぬ。

一方、(5.2.7)の第2の点 $\xi = \xi_q$ では $dQ/d\xi \neq 0$ なので、この点付近の最峻降下路

$$\Im \{Q(\xi) - Q(\xi_q)\} = 0 \quad \text{すなわち} \quad \Im \xi / (\Re \xi - \xi_q) = -R/x \quad (5.2.10)$$

に沿った積分値は(5.2.2)の積分に対しほとんど貢献しない。

(5.2.8)と(5.2.10)とをくらべると、 ξ_s 点付近の積分路の傾斜は $\pi/4$ であるのに対し、 ξ_q 点付近の積分路の傾斜は負であって、その絶対値は $\pi/4$ よりも大きい。

以上の考察結果を基にして積分路を作図すると、震央距離 x が小さい間は第5.3図に矢印で示されている曲線のごとくなる。この場合には積分路に囲まれている平面内には特異点は存在しない。ゆえに、サドル・ポイントを通る最峻降下の積分路を LS と記すと、コーシイの積分

定理により, (5.2.2) の第 1 式は次のごとく書き変えられる,

$$\phi_l(x, z) \rightarrow \phi_{ls}(x, z) = \int_{LS} A(\xi) e^{-i(\xi x + \alpha E + \alpha z)} \frac{d\xi}{\alpha} \tag{5.2.11}$$

この際に, 上式の右辺の被積分関数は分母に α を持っているお蔭で, 第 5.3 図の半径 $|\xi| = \infty$ の下半円周上では上式の右辺の積分値は 0 になる²⁴⁾. その結果, (5.2.11) に (5.2.5), (5.2.8) を代入すると, サドル・ポイント付近で $A(\xi)/\alpha$ の変化が激しくなければ

$$\phi_{ls}(x, z) \approx (1+i) e^{-ihR} \left\{ A(\xi_s)/\alpha_s \right\} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\lambda R/\alpha_s^2)(\Im \pi \xi)^2} d(\Im \pi \xi) \tag{5.2.12}$$

しかるに,

$$1+i = 2^{1/2} e^{i\pi/4}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 \xi^2} d\xi = \pi^{1/2}/a$$

なので²⁵⁾, 上式は結局次のごとく評価される,

$$\phi_{ls}(x, z) \approx (2\pi)^{1/2} A(\xi_s) (hR)^{-1/2} e^{-i(hR - \pi/4)}$$

さらに, (4.1.12) の下に示されているハンケル関数の近似式と上式とを比較すると,

$$\phi_{ls}(x, z) \approx \pi A(\xi_s) H_0^{(2)}(hR) \tag{5.2.13}$$

と表わされることがわかる。 ξ_s は (5.2.7) の第 1 式に示されているごとく, 入射角 $\sin^{-1}(x/R)$ の関数である。

(5.2.13) を (4.3.6) の第 1 式の左辺に代入すると, 円筒座標系 (R, θ) においては

$$(\nabla^2 + h^2) \phi_{ls}(R, \theta) = \pi \left\{ H_0^{(2)}(hR)/R^2 \right\} \left\{ d^2 A(\theta)/d\theta^2 \right\} \tag{5.2.14}$$

(5.2.13) の ϕ_{ls} は PP 反射波線であって, その波面は円筒であるが, 厳密には, 波動方程式 $(\nabla^2 + h^2)\phi = 0$ の解にはならぬ。ただし,

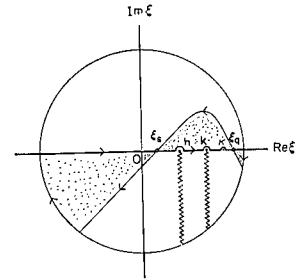
$$A(\theta)(hR)^2 \gg d^2 A/d\theta^2 \tag{5.2.15}$$

であれば, ϕ_{ls} は波動方程式を近似的に満すことができる。

一方, 反射 P 波の円筒座標系による特解は $H_\nu^{(2)}(hR) \exp(i\nu\theta)$ なので, 一般解は

$$\phi_{ls}(R, \theta) = \sum_{\nu} a(\nu) H_\nu^{(2)}(hR) e^{i\nu\theta} \tag{5.2.16}$$

かくのごとく, 厳密には, ϕ_{ls} は種々の次数の円筒関数の重ね合わせによって組み立てられるべきである。しかし, ここでは厳密解には立ち入らない。



第 5.3 図 最峻降下法の積分路
Fig. 5.3. The path of the steepest descent.

24) 高木貞治; 解析概論, 岩波書店, (1943), 255-257.

25) PEIRCE, B. O.; A Short Table of Integrals, Ginn and Company, 63.

5.3 PS 反射波 ψ_i については, (5.2.2) の第 2 式において

$$Q(\xi) = -i(\xi x + \alpha E + \beta z) \quad (5.3.1)$$

とおくと, サドル・ポイント ξ_s は次式によって与えられる;

$$dQ/d\xi = 0 \quad \text{すなわち} \quad x - E\xi_s/\alpha_s - z\xi_s/\beta_s = 0. \quad (5.3.2)$$

しかるに, (5.2.4) を参照して

$$\xi_s = h \sin \theta_p = k \sin \theta_s \quad (5.3.3)$$

とおくと, (5.1.5) により $E = \overline{EO}$ なので, 第 5.4 図で了解されるごとく, (5.3.2) の第 2 式が満される。ゆえに, (5.3.3) の ξ_s がサドル・ポイントに他ならぬ。ここで (4.2.8), (4.2.9) を振り返って見るならば, サドル・ポイントでは波数空間の角度と x, z 空間の角度とが一致することがわかる。

そこで, 第 5.4 図の O から \overline{PQ} に降した垂直の足を D とし, (5.3.3) を (5.3.1) に代入すると,

$$\xi_s x + \alpha_s E + \beta_s z = k(\overline{PD} + \overline{EO} \sin \theta_s \cot \theta_p).$$

しかるに, (5.1.2) によれば,

$$\overline{QD} = \overline{QM} - \overline{DM} = \overline{EM} v_s/v_p - \overline{EO} \tan \theta_p \sin \theta_s = \overline{EO} \sin \theta_s \cot \theta_p.$$

ゆえに, これらを (5.3.1) に代入すると,

$$Q(\xi_s) = -ik\overline{PQ}. \quad (5.3.4)$$

すると, サドル・ポイント ξ_s を通る最峻降下路は, (5.2.8) と同様にして,

$$\Im\{-i(\xi x + \alpha E + \beta z)\} = -k\overline{PQ}. \quad (5.3.5)$$

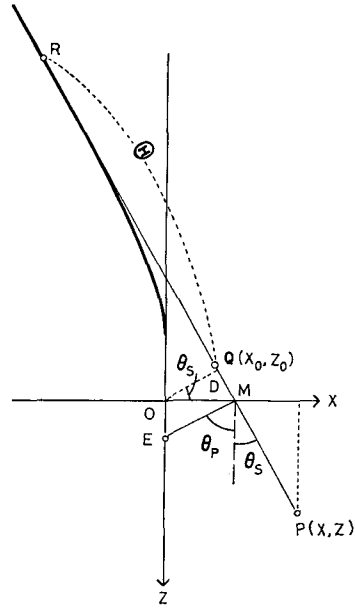
この曲線と ξ の実軸との交点は, α も β も実数ならば, (5.3.3) の ξ_s に他ならず, しかもこれは (5.2.4) の ξ_s とも一致する。

これに反し, α も β も虚数ならば, (5.3.5) は $\xi x = k\overline{PQ}$ となるので, この時の ξ を ξ_q と記すと,

$$\xi_q = k\overline{PQ}/x. \quad (5.3.6)$$

ゆえに, x が 0 から次第に大きくなると, ξ_q は ∞ から次第に小さくなり k に近づく。 x がさらに大きくなり, ξ_q が k よりも小さくなると, β はもはや虚数ではなく実数になる。 $z=0$ で $x \rightarrow \infty$ とすると, 入射角 θ_p は $\pi/2$ になる。この時は $\overline{PQ}/x \rightarrow \overline{QM}/\overline{OM} = (\overline{OE} v_s/v_p)/(\overline{OE} \tan \theta_p)$ なので, $\xi_q \rightarrow h$ 。

ゆえに, 震央距離が小さい間の ψ_i の積分路は, ψ_i の場合と同様に, 第 5.3 図の矢印の曲



第 5.4 図 反射波線 ψ_i の成り立ち

Fig. 5.4. Construction of the ray of reflected S wave ψ_i .

線のごとくなる。すると、(5.2.11)と同様に

$$\psi_l(x, z) \rightarrow \psi_{ls}(x, z) = \int_{LS} B(\xi) e^{-i(\xi x + \alpha E + \beta z)} \frac{d\xi}{\alpha}. \quad (5.3.7)$$

一方、(5.3.1), (5.3.3) および (5.1.2) から

$$d^2 Q(\xi_s)/d\xi_s^2 = i(\overline{EO} h^2/\alpha_s^3 + z k^2/\beta_s^3) = i(k/\beta_s^3) \left\{ \overline{QM} (v_p/v_s)^2 \cos^2 \theta_s \sec^2 \theta_p + \overline{PM} \right\}.$$

しかるに、(5.1.1), (5.1.6), (5.1.11)によれば

$$\begin{aligned} \theta/\overline{QM} &= \overline{QR}/\overline{QM} = (a/b)^2 \sec^2 \theta_p = (v_p/v_s)^2 \sec^2 \theta_p - \tan^2 \theta_p - 1 \\ &= (v_p/v_s)^2 \cos^2 \theta_s \sec^2 \theta_p - 1. \end{aligned}$$

ゆえに、

$$L = \overline{PQ} + \theta = \overline{PR} \quad (5.3.8)$$

とおけば、

$$d^2 Q(\xi_s)/d\xi_s^2 = ikL/\beta_s^3. \quad (5.3.9)$$

ゆえに、(5.3.1)の $Q(\xi)$ をふたたびサドル・ポイント ξ_s の近傍でテーラー展開し、 $(\xi - \xi_s)$ の3乗以上の項を無視すると、(5.2.9)に似た結果

$$\Re Q(\xi) = -(kL/\beta_s^3) (\Im \xi)^2 \quad (5.3.10)$$

が得られる。このようにして、サドル・ポイント付近で $B(\xi)/\alpha(\xi)$ の変化が激しくなければ、(5.3.7)は次のように評価される：

$$\begin{aligned} \psi_{ls}(x, z) &\approx (1+i) e^{-ik\overline{PQ}} \left\{ B(\xi_s)/\alpha_s \right\} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(kL/\beta_s^3)(\Im \xi)^2} d(\Im \xi) \\ &= -(2\pi)^{1/2} C(\xi_s) (kL)^{-1/2} e^{-i(k\overline{PQ} - \pi/4)}. \end{aligned} \quad (5.3.11)$$

さらに、(5.2.13)と同様に、ハンケル関数の近似式を利用すると、(5.3.11)は次のように表わされる：

$$\psi_{ls}(x, z) \approx \pi C(\xi_s) e^{i(k\theta - \pi)} H_0^{(2)}(kL). \quad (5.3.12)$$

上式の $C(\xi_s)$ および θ はいずれも θ_s のみの関数であって、第5.1節の終わりに述べたごとく、 θ_s の微小な変化に対しては、 L には無関係である。かくのごとき場合には、 ψ_{ls} の波面は半径 L の円筒であって、(5.2.13)の $\phi_{ls}(R, \theta_p)$ に対応させて、 $\psi_{ls}(x, z)$ を $\psi_{ls}(L, \theta_s)$ とみなすことができる。しかし、 θ_s を大きく変えると、実は L も変わるので、 ψ_l の波面は部分的にしき同一半径の円筒とみなせない。

6. 反射波のエネルギー流量

6.1 等方体においては、エネルギー流量の流出密度は、(1.4.1)により、次のごとく表わされる：

$$\mathbf{f} = -\Psi \cdot (\partial \mathbf{s} / \partial t) = -\left\{ \lambda (\partial \mathbf{s} / \partial t) \nabla \cdot \mathbf{s} + 2\mu \Phi \cdot (\partial \mathbf{s} / \partial t) \right\}. \quad (6.1.1)$$

ここで、円筒座標系 (r, θ) の単位ベクトルを \mathbf{a}_1 および \mathbf{a}_2 とすると²⁶⁾,

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 &= 0, & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1 &= \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2 = 1, & \partial \mathbf{a}_1 / \partial r &= \partial \mathbf{a}_2 / \partial r = 0, \\ \partial \mathbf{a}_1 / \partial \theta &= \mathbf{a}_2, & \partial \mathbf{a}_2 / \partial \theta &= -\mathbf{a}_1 \end{aligned} \quad (6.1.2)$$

であって、さらに

$$\mathbf{s} = \mathbf{a}_1 s_1 + \mathbf{a}_2 s_2, \quad \nabla = \mathbf{a}_1 \partial / \partial r + (\mathbf{a}_2 / r) \partial / \partial \theta. \quad (6.1.3)$$

ゆえに、 $\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \neq \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1$ に留意すると、

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{s} &= \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1 \frac{\partial s_1}{\partial r} + \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \frac{\partial s_2}{\partial r} + \frac{\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1}{r} \left(\frac{\partial s_1}{\partial \theta} - s_2 \right) + \frac{\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2}{r} \left(s_1 + \frac{\partial s_2}{\partial \theta} \right), \\ \mathbf{s} \nabla &= \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1 \frac{\partial s_1}{\partial r} + \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1 \frac{\partial s_2}{\partial r} + \frac{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2}{r} \left(\frac{\partial s_1}{\partial \theta} - s_2 \right) + \frac{\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2}{r} \left(s_1 + \frac{\partial s_2}{\partial \theta} \right), \\ \nabla \cdot \mathbf{s} &= \frac{\partial s_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(s_1 + \frac{\partial s_2}{\partial \theta} \right), \\ 2\Phi &= (\nabla \mathbf{s} + \mathbf{s} \nabla) = 2 \left\{ \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1 \frac{\partial s_1}{\partial r} + \frac{\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2}{r} \left(s_1 + \frac{\partial s_2}{\partial \theta} \right) \right\} + (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1) \left\{ \frac{\partial s_2}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial s_1}{\partial \theta} - s_2 \right) \right\}, \\ \Psi_{rr} &= \mathbf{a}_1 \cdot \Psi \cdot \mathbf{a}_1 = \lambda \nabla \cdot \mathbf{s} + 2\mu \partial s_1 / \partial r, \\ \Psi_{r\theta} &= \mathbf{a}_1 \cdot \Psi \cdot \mathbf{a}_2 = \mu (\partial s_2 / \partial r - s_2 / r + r^{-1} \partial s_1 / \partial \theta), \\ \Psi_{\theta\theta} &= \mathbf{a}_2 \cdot \Psi \cdot \mathbf{a}_2 = \lambda \nabla \cdot \mathbf{s} + 2\mu r^{-1} (s_1 + \partial s_2 / \partial \theta). \end{aligned}$$

これらの計算結果を (6.1.1) に代入すると、

$$\mathbf{f} = -\mathbf{a}_1 \left(\Psi_{rr} \frac{\partial s_1}{\partial t} + \Psi_{r\theta} \frac{\partial s_2}{\partial t} \right) - \mathbf{a}_2 \left(\Psi_{\theta r} \frac{\partial s_1}{\partial t} + \Psi_{\theta\theta} \frac{\partial s_2}{\partial t} \right). \quad (6.1.4)$$

次に、変位の実数部のみを採用するために、(4.3.9)を得た時と同様に、変位 \mathbf{s} の共軛複素数を \mathbf{s}^* とすると、(6.1.4)の右辺の各項の1周期 $2\pi/\omega$ の間の平均値は次のごとくなる：

$$\begin{aligned} \langle \operatorname{Re} \Psi_{rr} \rangle \left(\frac{\partial \operatorname{Re} s_1}{\partial t} \right) &= \frac{i\omega}{4} \left\{ (\lambda + 2\mu) \left(s_1 \frac{\partial s_1^*}{\partial r} - s_1^* \frac{\partial s_1}{\partial r} \right) + \frac{\lambda}{r} \left(s_1 \frac{\partial s_2^*}{\partial \theta} - s_1^* \frac{\partial s_2}{\partial \theta} \right) \right\}, \\ \langle \operatorname{Re} \Psi_{r\theta} \rangle \left(\frac{\partial \operatorname{Re} s_1}{\partial t} \right) &= \frac{i\omega}{4} \mu \left\{ \left(s_2 \frac{\partial s_2^*}{\partial r} - s_2^* \frac{\partial s_2}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \left(s_2 \frac{\partial s_1^*}{\partial \theta} - s_2^* \frac{\partial s_1}{\partial \theta} \right) \right\}, \\ \langle \operatorname{Re} \Psi_{\theta r} \rangle \left(\frac{\partial \operatorname{Re} s_1}{\partial t} \right) &= \frac{i\omega}{4} \mu \left\{ \left(s_1 \frac{\partial s_2^*}{\partial r} - s_1^* \frac{\partial s_2}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \left(s_1 \frac{\partial s_1^*}{\partial \theta} - s_1^* \frac{\partial s_1}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} (s_2 s_1^* - s_1 s_2^*) \right\}, \\ \langle \operatorname{Re} \Psi_{\theta\theta} \rangle \left(\frac{\partial \operatorname{Re} s_2}{\partial t} \right) &= \frac{i\omega}{4} \left\{ \frac{\lambda + 2\mu}{r} \left(s_2 s_1^* - s_2^* s_1 + s_2 \frac{\partial s_2^*}{\partial \theta} - s_2^* \frac{\partial s_2}{\partial \theta} \right) + \lambda \left(s_2 \frac{\partial s_1^*}{\partial r} - s_2^* \frac{\partial s_1}{\partial r} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (6.1.5)$$

上式の $\operatorname{Re} \Psi_{rr}$ などの本来の意味は Ψ_{rr} などを $\operatorname{Re} \mathbf{s}$ の関数として扱うことである。ただし、 $\operatorname{Re} (\partial \mathbf{s} / \partial t) = \partial \operatorname{Re} \mathbf{s} / \partial t$ であることから理解されるごとく、 $\operatorname{Re} \Psi_{rr}$ などを Ψ_{rr} などの実数部と解釈してもよい。

26) 伊藤徳之助；前出，217-221.

さて、

$$dH_1^{(1)}/dz = H_0^{(1)}(z) - H_1^{(1)}(z)/z = H_0^{(1)}(z) + (1/z) dH_0^{(1)}/dz$$

なので²⁷⁾, (5.2.13) を (4.3.5) に代入すると, $A(\theta)$ が実数の場合は

$$\begin{aligned} s_1 &= \pi h A(\theta) H_1^{(2)}(hr), & s_2 &= -\pi r^{-1} H_0^{(2)}(hr) dA/d\theta, \\ s_1^* &= \pi h A(\theta) H_1^{(1)}(hr), & s_2^* &= -\pi r^{-1} H_0^{(1)}(hr) dA/d\theta. \end{aligned} \quad (6.1.6)$$

ゆえに, ふたたび $z=hr$ とおき, (4.1.12) の Wronskian を用いると, (6.1.5) の各式の右辺の各量は次のごとく計算される:

$$\begin{aligned} & s_1 \frac{\partial s_1^*}{\partial \theta} - s_1^* \frac{\partial s_1}{\partial \theta} = s_2 \frac{\partial s_2^*}{\partial \theta} - s_2^* \frac{\partial s_2}{\partial \theta} = 0, \\ \textcircled{1} &= s_1 \frac{\partial s_1^*}{\partial r} - s_1^* \frac{\partial s_1}{\partial r} = -\pi^2 A^2 h^3 \mathbf{A}(H_1^{(1)}, H_1^{(2)}), \\ \textcircled{2} &= \frac{1}{r} \left(s_1 \frac{\partial s_2^*}{\partial \theta} - s_1^* \frac{\partial s_2}{\partial \theta} \right) = \pi^2 \left(A \frac{d^2 A}{d\theta^2} \right) \frac{h}{r^2} \mathbf{A}(H_0^{(1)}, H_0^{(2)}), \\ \textcircled{3} &= s_1 \frac{\partial s_2^*}{\partial r} - s_1^* \frac{\partial s_2}{\partial r} = \frac{1}{r} (s_2 s_1^* - s_2^* s_1) = - \left(s_2 \frac{\partial s_1^*}{\partial r} - s_2^* \frac{\partial s_1}{\partial r} \right) \\ &= -\pi^2 \left(A \frac{dA}{d\theta} \right) \frac{h}{r^2} \mathbf{A}(H_0^{(1)}, H_0^{(2)}), \\ \textcircled{4} &= s_2 \frac{\partial s_2^*}{\partial r} - s_2^* \frac{\partial s_2}{\partial r} = \frac{1}{r} \left(s_2 \frac{\partial s_1^*}{\partial \theta} - s_2^* \frac{\partial s_1}{\partial \theta} \right) = -\pi^2 \left(\frac{dA}{d\theta} \right)^2 \frac{h}{r^2} \mathbf{A}(H_0^{(1)}, H_0^{(2)}). \end{aligned} \quad (6.1.7)$$

しかるに, (4.1.13) によれば, ハンケル関数の Wronskian は次数によらず一定なので, (6.1.7) の 0 でない諸量と $s_1 \partial s_1^* / \partial r - s_1^* \partial s_1 / \partial r$ との比はいずれも $(hr)^{-2}$ に比例する。ゆえに,

$$(hr)^2 A^2 \gg Ad^2 A / d\theta^2, \quad AdA/d\theta, \quad (dA/d\theta)^2 \quad (6.1.8)$$

ならば, $s_1 \partial s_1^* / \partial r - s_1^* \partial s_1 / \partial r$ に比し (6.1.7) または (6.1.5) の他の諸量を無視することができる。(6.1.8) の条件は (5.2.15) の条件を含んでいる。

かくして, ふたたび (4.1.13) を参照すれば, (5.2.13) と同程度の近似で

$$\bar{f}_{1s} \approx \mathbf{a}_1 \pi \omega (\lambda + \mu) A^2(\theta) h^2 r^{-1} = \mathbf{a}_1 \pi \rho \omega^3 A^2 r^{-1}. \quad (6.1.9)$$

しかるに, 入射 P 波のエネルギー流量の流出密度は (4.3.9) の上に求められていて,

$$\bar{f}_{\text{inc}} = \mathbf{a}_1 \pi \omega (\lambda + \mu) h^2 r^{-1} = \mathbf{a}_1 \pi \rho \omega^3 r^{-1}.$$

ゆえに, 条件 (6.1.8) が満されれば,

$$\bar{f}(\text{reflected P}) / \bar{f}(\text{incident P}) = A^2(\theta) \quad (6.1.10)$$

であって, 反射 P 波のエネルギー流量も, 入射 P 波のエネルギー流量 (4.3.9) と同様に, 円筒座標の半径 r に無関係である。

6.2 (5.1.3)~(5.1.6)によれば,

27) WATSON; 前出, 74.

$$z_0/b = -\cos \theta_s / \cos \theta_p, \quad x_0/a = (\cos^2 \theta_s \sec^2 \theta_p - 1)^{1/2} \quad (6.2.1)$$

であって、しかも(5.1.1)の関係があるので、 E と v_s/v_p とが固定されていると、 x_0 も z_0 も θ_s のみの関数である。さらに、 $L' = \overline{PQ}$ とおくと、第5.4図から

$$x - x_0 = L' \sin \theta_s, \quad z - z_0 = L' \cos \theta_s. \quad (6.2.2)$$

ゆえに、 $P(x, z)$ 点の座標 x および z はいずれも L' と θ_s との関数であって、 L' と θ_s とが与えられれば、 x も z も同時に確定される。すなわち、 P 点を指定するためには、 (x, z) 座標系の代わりに、 (L', θ_s) 座標系を用いることができる。

以上の考察結果によれば、座標系に関する傾斜は

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial L'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial L'} + \frac{\partial \theta_s}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta_s}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial L'}{\partial z} \frac{\partial}{\partial L'} + \frac{\partial \theta_s}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \theta_s}$$

と変換される。しかるに、(6.2.2)の L' は (x, z) の陰関数なので、直接 $\partial L'/\partial x$ や $\partial L'/\partial z$ を求めることができぬ。ゆえに、上式の代わりに、

$$\frac{\partial}{\partial L'} = \frac{\partial x}{\partial L'} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial L'} \frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial \theta_s} = \frac{\partial x}{\partial \theta_s} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \theta_s} \frac{\partial}{\partial z}$$

から出発すると、

$$\frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial z}{\partial L'} \frac{\partial}{\partial \theta_s} - \frac{\partial z}{\partial \theta_s} \frac{\partial}{\partial L'} \right) \left/ \left(\frac{\partial x}{\partial \theta_s} \frac{\partial}{\partial L'} - \frac{\partial x}{\partial L'} \frac{\partial}{\partial \theta_s} \right) \right., \\ \frac{\partial}{\partial z} = \left(\frac{\partial x}{\partial \theta_s} \frac{\partial}{\partial L'} - \frac{\partial x}{\partial L'} \frac{\partial}{\partial \theta_s} \right) \left/ \left(\frac{\partial x}{\partial \theta_s} \frac{\partial}{\partial L'} - \frac{\partial x}{\partial L'} \frac{\partial}{\partial \theta_s} \right) \right.$$

ゆえに、 x および z 方向の単位ベクトルをそれぞれ \mathbf{i} および \mathbf{k} とすると、

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} = \left(\frac{\partial x}{\partial \theta_s} \frac{\partial z}{\partial L'} - \frac{\partial x}{\partial L'} \frac{\partial z}{\partial \theta_s} \right)^{-1} \left\{ \left(\mathbf{k} \frac{\partial x}{\partial \theta_s} - \mathbf{i} \frac{\partial z}{\partial \theta_s} \right) \frac{\partial}{\partial L'} + \left(\mathbf{i} \frac{\partial z}{\partial L'} - \mathbf{k} \frac{\partial x}{\partial L'} \right) \frac{\partial}{\partial \theta_s} \right\}. \quad (6.2.3)$$

さらに、(5.1.9)と(6.2.2)とから

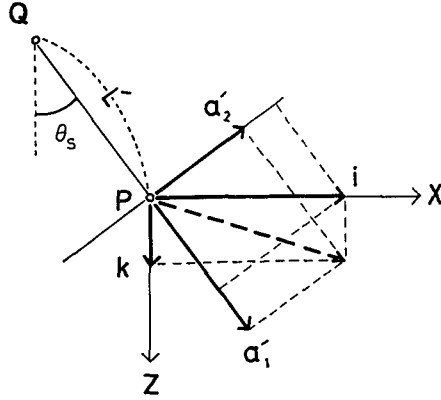
$$\frac{\partial x}{\partial L'} = \sin \theta_s, \quad \frac{\partial z}{\partial L'} = \cos \theta_s, \\ \frac{\partial x}{\partial \theta_s} = L' \cos \theta_s + dx_0/d\theta_s, \quad \frac{\partial z}{\partial \theta_s} = -\tan \theta_s \frac{\partial x}{\partial \theta_s}. \quad (6.2.4)$$

ゆえに、

$$\frac{\partial x}{\partial \theta_s} \frac{\partial z}{\partial L'} - \frac{\partial x}{\partial L'} \frac{\partial z}{\partial \theta_s} = \sec \theta_s \frac{\partial x}{\partial \theta_s}, \quad \mathbf{k} \frac{\partial x}{\partial \theta_s} - \mathbf{i} \frac{\partial z}{\partial \theta_s} = (\mathbf{i} \sin \theta_s + \mathbf{k} \cos \theta_s) \sec \theta_s \frac{\partial x}{\partial \theta_s}, \\ \mathbf{i} \frac{\partial z}{\partial L'} - \mathbf{k} \frac{\partial x}{\partial L'} = \mathbf{i} \cos \theta_s - \mathbf{k} \sin \theta_s. \quad (6.2.5)$$

しかるに、第5.4図の1部が拡大された第6.1図に示されているごとく、 L' および θ_s 方向の単位ベクトルをそれぞれ \mathbf{a}'_1 および \mathbf{a}'_2 とすると、

$$\mathbf{a}'_1 = \mathbf{i} \sin \theta_s + \mathbf{k} \cos \theta_s, \quad \mathbf{a}'_2 = \mathbf{i} \cos \theta_s - \mathbf{k} \sin \theta_s. \quad (6.2.6)$$



第 6.1 図 単位ベクトルの座標変換

Fig. 6.1. Co-ordinates transformation of unit vectors.

なので, (6.2.5) と (6.2.6) とを (6.2.3) に代入すると, (L', θ_s) 座標系における傾斜ベクトルは次のごとく表わされる,

$$\nabla = \mathbf{a}'_1 \frac{\partial}{\partial L'} + \mathbf{a}'_2 \frac{1}{\sec \theta_s \partial x / \partial \theta_s} \frac{\partial}{\partial \theta_s}. \quad (6.2.7)$$

一方, 双曲線 (5.1.7) の上の 1 点 $Q(x_0, z_0)$ では, (5.1.1) と (6.2.1) とから

$$\begin{aligned} d\theta_p/d\theta_s &= \tan \theta_p / \tan \theta_s, & dz_0/d\theta_s &= -\tan \theta_s dx_0/d\theta_s, \\ dx_0/d\theta_s &= E(v_p/v_s - v_s/v_p) \sec^3 \theta_p \cos \theta_s \end{aligned} \quad (6.2.8)$$

しかるに, (6.2.2) の第 1 式から

$$\sec \theta_s \partial x / \partial \theta_s = \overline{PQ} + \sec \theta_s dx_0/d\theta_s.$$

ゆえに, (5.3.8) と (6.2.8) とから

$$\sec \theta_s \partial x / \partial \theta_s = \overline{PQ} + \theta = L. \quad (6.2.9)$$

ゆえに, (6.2.9) を (6.2.7) に代入すると,

$$\nabla = \mathbf{a}'_1 \frac{\partial}{\partial L} + \frac{\mathbf{a}'_2}{L} \frac{\partial}{\partial \theta_s}. \quad (6.2.10)$$

L の原点, すなわち第 5.2 図の R_1, R_2, \dots 点, が固定されている場合は, (6.2.10) は軸方向に変化のない円筒座標系 (L, θ_s) の傾斜ベクトルに他ならぬ。

6.3 (5.3.9) と (4.2.10) とを (5.2.13) と (6.1.3) と見くらべ, この節に限り臨時に, $L \rightarrow r$ および $\theta_s \rightarrow \theta$ のおき代えを行なうと, (5.3.12) は次のごとく書かれる,

$$\psi_{1s}(r, \theta) \approx \pi e^{i(k\theta - \pi)} C(\theta) H_0^{(2)}(kr). \quad (6.3.1)$$

ここで, $C(\theta)$, $\Theta(\theta)$ を実数とし,

$$\Gamma(\theta) = \pi C e^{ik\theta}, \quad \Gamma^*(\theta) = \pi C e^{-ik\theta} \quad (6.3.2)$$

とおくと, $(d\Gamma/d\theta)^* = d\Gamma^*/d\theta$ なので, (6.3.1) を (4.3.5) に代入すれば,

$$\begin{aligned} -s_1 &= (d\Gamma/d\theta) r^{-1} H_0^{(2)}(kr), & -s_2 &= \Gamma k H_1^{(2)}(kr), \\ -s_1^* &= (d\Gamma^*/d\theta) r^{-1} H_0^{(1)}(kr), & -s_2^* &= \Gamma^* k H_1^{(1)}(kr). \end{aligned} \quad (6.3.3)$$

この際に,

$$\nabla \cdot \mathbf{s} = \nabla \cdot \mathbf{s}^* = 0$$

なので, (6.1.5) の 1 部は次のごとく簡単になる:

$$\begin{aligned} (\Re \Psi_{rr}) \left(\frac{\partial \Re s_1}{\partial t} \right) &= \frac{i\omega\mu}{2} \left(s_1 \frac{\partial s_1^*}{\partial r} - s_1^* \frac{\partial s_1}{\partial r} \right), \\ (\Re \Psi_{\theta\theta}) \left(\frac{\partial \Re s_2}{\partial t} \right) &= \frac{i\omega\mu}{2r} \left(s_2 s_1^* - s_2^* s_1 + s_2 \frac{\partial s_2^*}{\partial \theta} - s_2^* \frac{\partial s_2}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (6.3.4)$$

次に, (6.1.5) および (6.3.4) の各式の右辺の各項に (6.3.3) を代入すると, (6.1.4) は次のごとくなる:

$$\bar{f} = -\frac{i\omega\mu}{4} \alpha_1' (2\textcircled{1}' + \textcircled{2}' + \textcircled{3}') - \frac{i\omega\mu}{4} \alpha_2' \left\{ \textcircled{4}' + \textcircled{5}' + \textcircled{6}' + 2(\textcircled{6}' + \textcircled{7}') \right\}; \quad (6.3.5)$$

$$\textcircled{1}' = s_1 \frac{\partial s_1^*}{\partial r} - s_1^* \frac{\partial s_1}{\partial r} = -\frac{d\Gamma}{d\theta} \frac{d\Gamma^*}{d\theta} \frac{k}{r^2} \mathbf{A}(H_0^{(1)}, H_0^{(2)}),$$

$$\textcircled{2}' = s_2 \frac{\partial s_2^*}{\partial r} - s_2^* \frac{\partial s_2}{\partial r} = -\Gamma \Gamma^* k^3 \mathbf{A}(H_1^{(1)}, H_1^{(2)}),$$

$$\textcircled{3}' = \frac{1}{r} \left(s_2 \frac{\partial s_1^*}{\partial \theta} - s_2^* \frac{\partial s_1}{\partial \theta} \right) = \frac{k}{r^2} \left(\Gamma \frac{d^2 \Gamma^*}{d\theta^2} H_0^{(1)} H_1^{(2)} - \Gamma^* \frac{d^2 \Gamma}{d\theta^2} H_0^{(2)} H_1^{(1)} \right),$$

$$\textcircled{4}' = s_1 \frac{\partial s_2^*}{\partial r} - s_1^* \frac{\partial s_2}{\partial r} = \frac{k^2}{r} \left\{ \Gamma^* \frac{d\Gamma}{d\theta} H_0^{(2)} \frac{dH_1^{(1)}}{d(kr)} - \Gamma \frac{d\Gamma^*}{d\theta} H_0^{(1)} \frac{dH_1^{(2)}}{d(kr)} \right\},$$

$$\textcircled{5}' = \frac{1}{r} \left(s_1 \frac{\partial s_1^*}{\partial \theta} - s_1^* \frac{\partial s_1}{\partial \theta} \right) = \left(\frac{d\Gamma}{d\theta} \frac{d^2 \Gamma^*}{d\theta^2} - \frac{d\Gamma^*}{d\theta} \frac{d^2 \Gamma}{d\theta^2} \right) \frac{H_0^{(1)} H_0^{(2)}}{r^3},$$

$$\textcircled{6}' = \frac{1}{r} (s_2 s_1^* - s_2^* s_1) = \frac{k}{r^2} \left(\Gamma \frac{d\Gamma^*}{d\theta} H_0^{(1)} H_1^{(2)} - \Gamma^* \frac{d\Gamma}{d\theta} H_0^{(2)} H_1^{(1)} \right),$$

$$\textcircled{7}' = \frac{1}{r} \left(s_2 \frac{\partial s_2^*}{\partial \theta} - s_2^* \frac{\partial s_2}{\partial \theta} \right) = \left(\Gamma \frac{d\Gamma^*}{d\theta} - \Gamma^* \frac{d\Gamma}{d\theta} \right) \frac{k^2}{r} H_1^{(2)} H_1^{(1)}.$$

しかるに, (6.3.2) から

$$\left. \frac{d\Gamma/d\theta}{d\Gamma^*/d\theta} \right\} = \pi \left(\frac{dC}{d\theta} \pm iC \frac{dk\theta}{d\theta} \right) e^{\pm i k \theta},$$

$$\left. \frac{d^2 \Gamma/d\theta^2}{d^2 \Gamma^*/d\theta^2} \right\} = \pi \left\{ \frac{d^2 C}{d\theta^2} - C \left(\frac{dk\theta}{d\theta} \right)^2 \pm i \left(2 \frac{dC}{d\theta} \frac{dk\theta}{d\theta} + C \frac{d^2 k\theta}{d\theta^2} \right) \right\} e^{\pm i k \theta},$$

$$\Gamma d\Gamma^*/d\theta - \Gamma^* d\Gamma/d\theta = -2i(\pi C)^2 k d\theta/d\theta,$$

なので,

$$\textcircled{1}' = -(\pi C)^2 \left\{ \left(\frac{1}{C} \frac{dC}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{dk\theta}{d\theta} \right)^2 \right\} \frac{k}{r^2} \mathbf{A}(H_0^{(1)}, H_0^{(2)}),$$

$$\begin{aligned}
\textcircled{2}' &= -(\pi C)^2 k^3 \mathbf{A}(H_1^{(1)}, H_1^{(2)}), \\
\textcircled{3}' &= -(\pi C)^2 \left\{ \frac{1}{C} \frac{d^2 C}{d\theta^2} - \left(\frac{dk\theta}{d\theta} \right)^2 \right\} \frac{k}{r^2} \mathbf{A}(H_0^{(1)}, H_0^{(2)}) \\
&\quad + i(\pi C)^2 \left(\frac{d^2 k\theta}{d\theta^2} + \frac{2}{C} \frac{dC}{d\theta} \frac{dk\theta}{d\theta} \right) \frac{k}{r^2} \frac{d(H_0^{(1)} H_0^{(2)})}{d(kr)}, \\
\textcircled{4}' &= \textcircled{6}' - \textcircled{7}' H_0^{(1)} H_0^{(2)} / (H_1^{(1)} H_1^{(2)}), \\
\textcircled{5}' &= 2i(\pi C)^2 \left[\left\{ \frac{1}{C} \frac{d^2 C}{d\theta^2} - \left(\frac{1}{C} \frac{dC}{d\theta} \right)^2 - \left(\frac{dk\theta}{d\theta} \right)^2 \right\} \frac{dk\theta}{d\theta} - \frac{1}{C} \frac{dC}{d\theta} \frac{d^2 k\theta}{d\theta^2} \right] \frac{H_0^{(1)} H_0^{(2)}}{r^3}, \\
\textcircled{6}' &= -(\pi C)^2 \frac{1}{C} \frac{dC}{d\theta} \frac{k}{r^2} \mathbf{A}(H_0^{(1)}, H_0^{(2)}) + i(\pi C)^2 \frac{dk\theta}{d\theta} \frac{k}{r^2} \frac{d(H_0^{(1)} H_0^{(2)})}{d(kr)}, \\
\textcircled{7}' &= -2i(\pi C)^2 \frac{dk\theta}{d\theta} \frac{k^2}{r} H_1^{(1)} H_1^{(2)}. \tag{6.3.6}
\end{aligned}$$

この節で求めたのは S 反射波の中でサドル・ポイントに帰因するエネルギー流量密度である。

次に、この節で臨時に用いた系の記号 (r, θ) を本来の記号 (L, θ_s) に戻し、エネルギー流量を \mathbf{a}'_1 方向と \mathbf{a}'_2 方向とに分けると、サドル・ポイント ξ_s に帰因する反射 S 波のエネルギー流量は (6.3.5) に対応させて次のごとく書かれる：

$$F_s(\text{refl S}) = F_s(\text{refl S}; \textcircled{1}' + \textcircled{2}' + \textcircled{3}') + F_s(\text{refl S}; \textcircled{4}' + \textcircled{5}' + 3\textcircled{6}' + 2\textcircled{7}'). \tag{6.3.7}$$

一方、

$$F(\text{inc P}) = \int \mathcal{F}(\text{incident P}) \cdot \mathbf{a}_1 r d\theta_p$$

とおくと、(6.1.9) のごとき近似では

$$F_s(\text{refl P}) \approx F_s(\text{refl P}; \textcircled{1}) = \int \mathcal{F}(\text{reflected P}; \textcircled{1}) \cdot \mathbf{a}_1 r d\theta_p.$$

ゆえに、(6.1.10) と (2.1.2) とから

$$F(\text{inc P}) - F_s(\text{refl P}; \textcircled{1}) = \pi^0 \omega^3 \int (-BC) d\theta_p. \tag{6.3.8}$$

しかるに、(4.1.13) と (6.3.6) とから

$$F_s(\text{refl S}; \textcircled{2}') = \int \mathcal{F}(\textcircled{2}') \cdot \mathbf{a}'_1 L d\theta_s = \pi^0 \omega^3 \int C^2(\theta) d\theta_s$$

なので、(6.1.9) の時と同様に、これは L に無関係である。しかも、 $d\theta_s = (\alpha/\beta) d\theta_p$ なので、(2.1.1) を用いると、上式は次のごとく書き変えられる：

$$F_s(\text{refl S}; \textcircled{2}') = \pi^0 \omega^3 \int (-BC) d\theta_p. \tag{6.3.9}$$

ゆえに、(6.3.8) と (6.3.9) とから

$$F(\text{inc P}) = F_s(\text{refl P}; \textcircled{1}) + F_s(\text{refl S}; \textcircled{2}'). \tag{6.3.10}$$

上式の右辺の各項は幾何光学的な P および S 反射波のエネルギー流量である。もし右辺の各項以外の項が無視されるならば、(6.3.10) のような状態ではレーレー波が発生する余地はない。

これに反し、幾何光学的な反射波以外の波のエネルギー流量 F_a が無視されぬ場合は、(6.3.10) の代わりに次に達する：

$$F(\text{inc P}) = F_s(\text{refl P}; \textcircled{1}) + F_s(\text{refl S}; \textcircled{2}') + F_a. \quad (6.3.11)$$

しかし、このままだと、(6.3.10) は依然として成立しているので、 $F_a=0$ なる矛盾を生じる。実は反射波に貢献するのはサドル・ポイント付近の線積分の他に極があり、後者はレーレー波を形成することが判っている。ゆえに、 F_a が無視されぬ場合は、(6.3.10) から (6.3.11) になるのではなくて、次のごとくなるものと察せられる：

$$F(\text{inc P}) = F_s(\text{refl P}; \textcircled{1}) + F_s(\text{refl S}; \textcircled{2}') + F_a + F_R. \quad (6.3.12)$$

この式の F_R はレーレー波のエネルギー流量を意味している。すると、(6.3.10) と (6.3.12) とから

$$F_a + F_R = 0. \quad (6.3.13)$$

先に用いた (6.1.10) のごとき近似では、(6.3.7) により

$$F_a = F_s(\text{refl S}; 2\textcircled{1}' + \textcircled{3}') + F_s(\text{refl S}; \textcircled{4}' + \textcircled{5}' + 3\textcircled{6}' + 2\textcircled{7}'). \quad (6.3.14)$$

しかも、上式の右辺の第 1 項は $F_s(\text{refl S}; \textcircled{2}')$ に比し無視されやすいので、 F_a の中でまず問題になるのは右辺の第 2 項であろう。

14. Energy Partition of Elastic Waves by Reflection on the Free Surface

By Kyozi TAZIME

(Department of Geophysics, Faculty of Science, Hokkaido University)

We are not so much familiar with treatments of energy as those of displacement and stress, though energy might be the most fundamental physical quantity. At first, the treatment of energy is reviewed.

As is well known, energy flow of incident plane wave is thoroughly conserved within P and S plane waves which were reflected from the free plane surface, being independent of incident angle.

Because no plane wave exists in practice, the beam has been taken up which may be considered more practical than plane wave. The present "beam" was composed by BREKHOVSKIKH from plane waves including all wave numbers from $-\infty$ to $+\infty$. The "beam" looks like, with respect to mathematical composition from plane waves, to cylindrical wave having no change in azimuth. Therefore the integral expression of each

displacement potential contains some contribution from the pole which results in Rayleigh wave. If the energy flow of the beam is roughly estimated in a similar manner to that of plane wave, the incident beam can again have no excessive energy to be given to Rayleigh wave. To tell the truth, it was assumed, in order to get rid of interferences of various waves, that the property of the beam was kept when the above estimation was made far deep from the free surface. However, the beam of BREKHOVSKIKH should lose its substance, due to diffraction, at a large distance from the plane where it was shaped. According to this effect, the above estimation has a considerable question. It is easy to evaluate the energy flow density of interfered waves. But the estimation of the energy flow of them is difficult, because the cross section through which they pass is hardly decided.

At last, incident cylindrical P wave is given. Several properties of Bessel function are reviewed. Wronskian of Hankel functions will play a grand *rôle* in the following calculations. If cylindrical wave incidents upon the free plane, it must always generate Rayleigh wave as well as reflected waves. The mathematical generation of displacement potentials of Rayleigh wave was fully discussed by NAKANO. But it may be not easy to discuss this problem from a view point of energy conservation. Dix has described that if the wave whose front has a finite curvature incidents upon the free plane, some energy may flow in parallel to the free plane besides geometrically reflected waves and it must compose Rayleigh wave. But his description is too abstract to be quantitatively understood.

The composition of cylindrical wave from plane ones is mathematically too skilful to be understood in practice. If incident P wave is expressed by Hankel function of the zeroth order and is a pure cylindrical wave which satisfies the wave equation, reflected P wave is by no means simple. Reflected P wave which is a solution of the wave equation cannot be expressed strictly with anyone of Hankel function. If it is approximated to only one Hankel function, it cannot strictly satisfy the wave equation. However, approximation to one Hankel function may be allowable and it will satisfy approximately the wave equation. At any rate, reflected P wave has not only the radial component of energy flow density which is reflected geometrically but also some azimuthal ones.

On the other hand, composition of reflected S wave is more complex than that of reflected P. The imagined source of reflected P wave was the mirror point of the original source of incident P. But the locus of the imagined source of reflected S is one branch of the hyperbola, as given by Cagniard. Since the front of reflected S wave is an involute of the evolute of the hyperbola, it may be taken as the convolution of successive arcs. Thus reflected S may be considered partly as a cylindrical wave whose co-ordinates should be different from the original ones. Therefore displacement potential of reflected wave is to be approximated partly, as in case of P waves, to Hankel function. Reflected S wave has considerable amounts of azimuthal component of energy flow, besides geometrically reflected radial one. Either reflected P or reflected S wave has azimuthal component of energy flow density which is dependent of azimuth. If these azimuthal components are neglected in comparison with radial ones, energy flow of incident P wave must be conserved within only geometrically reflected P and S waves. No energy can be also given to Rayleigh wave by the neglectation of azimuthal components of energy flow density.