北海道大学地球物理学研究報告
Geophysical Bulletin of Hokkaido University, Sapporo, Japan
Vol. 36, March, 1977, p. 97～105.

粒径パラメーターの誤差の検討に用いる数学的な分布モデルの提唱

太 井 子 宏 和
北海道大学理学部地球物理学教室
（昭和51年12月20日受理）

Proposition of Mathematical Distribution Model to evaluate Error of Grain size Parameter

By Hirokazu TAISHI
Department of Geophysics, Faculty of Science, Hokkaido University
(Received December 20, 1976)

A mathematical distribution model conformable to any grain size distribution is proposed in oder to evaluate the error of grain size parameter computed from size analysis data. After several normal sub-populations are separated from the grain size distribution of a sample, the distribution model is composed as the superimposition of their normal sub-populations.

From the examination of the models apllied to various samples, the results as the following are obtained;

1)If degree of comformity (c) of model is under 0.1, the model may be used for above purpose, where c is decided as the conformity of model with sample about grain size distribution plotted on log-normal probability paper.

2) Model is well conformable to most of polymodal distributions as well as all of unimodal ones, then the degree of conformity of the model is under 0.1.

I. は じ め に

筆者等は，粒径分析結果から得られる粒径パラメーターの誤差を検討するために，いくつかの正規分布集団を重ね合わしてできる分布モデルを用いた（太井子・藤木，1975）．この分布モデルでは，粒径パラメーターの真の値を理論的に得ることができる．従ってこの値を基準値として，分布モデルに適用された粒径パラメーターを見積る種々の方法に含まれる誤差を，量的に検討することが可能になった．しかしこの方法において，モデル化された粒径分布は，ある種の試料の平均的なものを考えていたので，それが試料の粒径分布をどの程度まで反映しているかという問題は，必ずしも十分に考慮されているとは言えなかった．

そこでこの点をより鮮明にするため，試料の粒径分布によく適合させることができる数学的な分布モデルを考案したので，それについて報告する．この分布モデルは，これまでのものと同様正規分布集団の重ね合わせからなっているために，その粒径パラメーターの真の値が得られるという利点を保持している．また，この分布モデルを用いた粒径パラメーターの誤差の検討法は，これまでのものよりも，その適用範囲をより幅広い試料に拡張させることができる．さらに将来の問題として，個々の試料の粒径パラメーターの妥当な値を見積るために，この分布モデルが用いられることも期待される．

II．分布モデルをつくる手順

分布モデルは，まず試料の粒径分布を数個の正規分布集団に分離した後，それらを重ね合わせることによって作られる．ところで，粒径分布からいくつかの正規集団を分離する試みは，すでに数人の研究者によって行なわれている．筆者は，これらのうち井口・目崎（1974）の方法を改変して，試料の粒径分布をいくつかの正規集団に分離した．

ここでは，海浜砂の試料（試料番号X―7）を用いて，それの分布モデルを作る手順を示そう．なお，この試料は0.25ϕ間隔でふるい分けされている．

試料の粒径分布を正規確率紙へプロットすると，Fig. 1の黒丸のようになる．両端部の累加頻度が0.1%以下，及び99.9%以上の点をそれぞれ1個だけ含め，それらの外側の点を用いないことにする．すなわち，ここではFig. 1に示したA点からB点までの17個の点を使うことにする．以上の17個の点で示される粒径分布を，A点から2点ずつを1組にして分けていく（点の総数が奇数の場合には最後の組に3点を入れる）．そして，分割点P_1，P_2，‥を両隣の2つの点の中点として与える．この分割点の累加頻度値は，Table 1によると，試料の累加頻度の百分率値F_sに対応する正規確率変数値*T_sの，隣り合う2点の値の平均

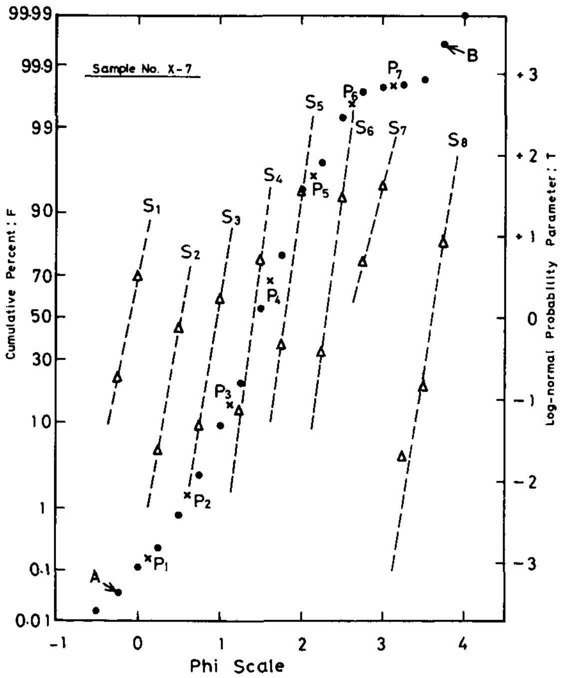

Fig. 1. Separation of normal sub-populations from the grain size distribution plotted on log-normal probability paper, for beach sample (X-7).

* この値をTとすれば，Tとこれに対応する百分率値Fとの間には，$F=100/\sqrt{2}\int_{-\infty}^{T}\exp(-x^2/2)\,dx$なる関係がある．なお正規確率紙では，Tはリニアスケールになっている．

値 p_1, p_2, ・・として計算される．この値は正規確率変数値であるから，これに対応する百分率値 p'_1, p'_2, ・・を用いて，分割した8組 S_1, S_2, ・・の混合割合 R_1, R_2, ・・が $R_i = p_i - p_{i-1}$, ($i = 1$, ・・, 8) として求められる．

次に，各組を正規集団として近似するために，まずある組の F_s から，その組より粗粒側のすべての組の混合割合の和を差し引いて，その組の累加頻度を分離する（分離された累加頻度を f_s とする）．続いて各組毎に，f_s に混合割合の逆数 $100/R_i$ を掛けて累加頻度を引き伸ばす（引き伸ばされた累加頻度ち f_e とする）．Fig. 1 の△印は，以上のようにして得られた f_e を正規確率紙にプロットしたものであり，これらの点を直線で結んだ破線が，S_1, S_2, ・・の正規集団を表わしている．この破線から，Table 1 に示した各正規集団の平均粒径 μ_i と標準偏差 σ_i ($i = 1$, ・・, 8) が得られる．

このようにして分離された8個の正規集団を重ね合わせることによって，最終的に試料X—7の分布モデルを得ることができる．Table 1 に示した，この分布モデルの累加頻度の百分率値 F_m 及び正規確率変数値 T_m と，試料の F_s, T_s とを，それぞれ比較してみると，それらはほとんど一致していることがわかる．

Table. 1. Procedure for composing the distribution model of beach sample (X-7).

Grain size	Distribution of sample		Devided point		Separated frequency	Enlarged frequency	Normal sub-population				Distribution of model	
	Fs	Ts	pi	pi'	fs	fe		μi	σi	Ri	Fm	Tm
ϕ	%	・・	・・	%	%	%		ϕ	ϕ	%	%	・・
−0.50	0.017	−3.58										
				0.0 (p_0')								
A −0.25	0.040	−3.35			0.040	23.456	S_1	−0.140	0.202	0.171	0.040	−3.35
0.00	0.119	−3.40			0.119	69.723					0.120	−3.03
			−2.93 (p_1)	0.171 (p_1')								
0.25	0.242	−2.82			0.071	5.329	S_2	0.517	0.165	1.342	0.236	−2.83
0.50	0.788	−2.41			0.617	45.934					0.814	−2.40
			−2.61 (p_2)	1.513 (p_2')								
0.75	2.752	−1.92			1.239	9.492	S_3	0.960	0.160	13.054	2.646	−1.94
1.00	9.334	−1.32			7.819	59.905					9.411	−1.32
			−1.06 (p_3)	14.567 (p_3')								
1.25	21.482	−0.79			6.915	13.122	S_4	1.402	0.135	52.688	21.026	−0.81
1.50	54.925	0.12			40.385	76.597					55.311	0.13
			0.45 (p_4)	67.255 (p_4')								
1.75	77.941	0.77			10.686	37.297	S_5	1.793	0.133	28.649	77.675	0.76
2.00	94.205	1.57			26.950	94.066					94.249	1.58
			1.74 (p_5)	95.904 (p_5')								
2.25	97.175	1.91			1.271	34.769	S_6	2.302	0.133	3.655	97.191	1.91
2.50	97.312	2.46			1.408	93.213					99.397	2.51
			2.62 (p_6)	99.559 (p_6')								
2.75	99.725	2.78			0.166	75.408	S_7	2.572	0.259	0.219	99.723	2.77
3.00	99.767	2.83			0.208	95.080					99.768	2.83
			2.84 (p_7)	99.778 (p_7')								
3.25	99.789	2.86			0.011	4.666					99.785	2.85
3.50	99.824	2.92			0.046	20.450	S_8	3.599	0.190	0.222	99.845	2.96
B 3.75	99.962	3.37			0.184	82.819					99.953	3.31
				100.0 (p_8')								
4.00	99.990	3.72										

III. 試料に対する分布モデルの適合性

第II章で述べた方法による分布モデルが，試料の粒径分布にどの程度適合するかを検討してみる．そのために，適合性の目安として，次のような適合度 c を定義する．

$$c=\sqrt{1/n\sum_{i=1}^{n}(\Delta T_i-\overline{\Delta T})^2}$$

ただし，　$\Delta T_i = T_{mi} - T_{si}$,　$\overline{\Delta T} = 1/n\,\Sigma\Delta T_i$

ここで，nは試料の粒径分布データの個数（例えば第II章で述べた試料X—7の場合は 17 個），T_m, T_s はそれぞれ分布モデル及び試料の累加頻度の正規確率変数値を表わす.上式は，T_sに対するT_mの差を１つの頻度分布と見做した時の，その分布における標準偏差値を表わしており，cの値が小さい程適合性が良いと言える．

ここで用いる試料は，筆者がこれまでに得た粒径分析データーの中から任意に選んだ 20 個のものであり，正規確率へプロットしたそれらの粒径分布は Fig. 2 に示したとおりである．このうち，X—1～X—10 は海浜砂の試料であり，X—11～X—20 は風成砂の試料である．なお，これらの試料は 0.25 ϕ 間隔でふるい分けされている．

Table 2に，これらの試料に対する各分布モデルの適合度 c の値を示した．また Table 2には，以下のように２つに大別された試料の粒径密度分布の型も示されている．すなわち，A型は山が２つ以上現われる，一方B型は主たる山が１つしか現れない粒径密度分布を，それぞれ示している.Fig. 3には，このようなA型及びB型の例を示した．A型の例として示したX—1はm_1, m_2, m_3, m_4という比較的小さな山が現れている試料であり，X—13はm_1, m_2という卓越した２つの山が現れる試料である．X—12はm_1に比らべてm_2の山は小さいけれども，このような試料もA型に含めている．次にB型の例として示した X—10 とX—19 は，それぞれ淘汰度が大きい，小さいという特徴を持った，山が１つしか現れない試料である.X—5はm_1という大

Table. 2. Degree of conformity of distribution model and distribution type of sample.

Sample No.	Distribution type of sample	Degree of conformity ; c
X－ 1	A	0.068
X－ 2	A	0.10
X－ 3	A	0.043
X－ 4	A	0.17
X－ 5	B	0.019
X－ 6	B	0.016
X－ 7	B	0.018
X－ 8	A	0.037
X－ 9	B	0.035
X－ 10	B	0.026
X－ 11	A	0.042
X－ 12	A	0.050
X－ 13	A	0.036
X－ 14	A	0.022
X－ 15	B	0.028
X－ 16	B	0.027
X－ 17	B	0.044
X－ 18	A	0.086
X－ 19	B	0.028
X－ 20	B	0.0086

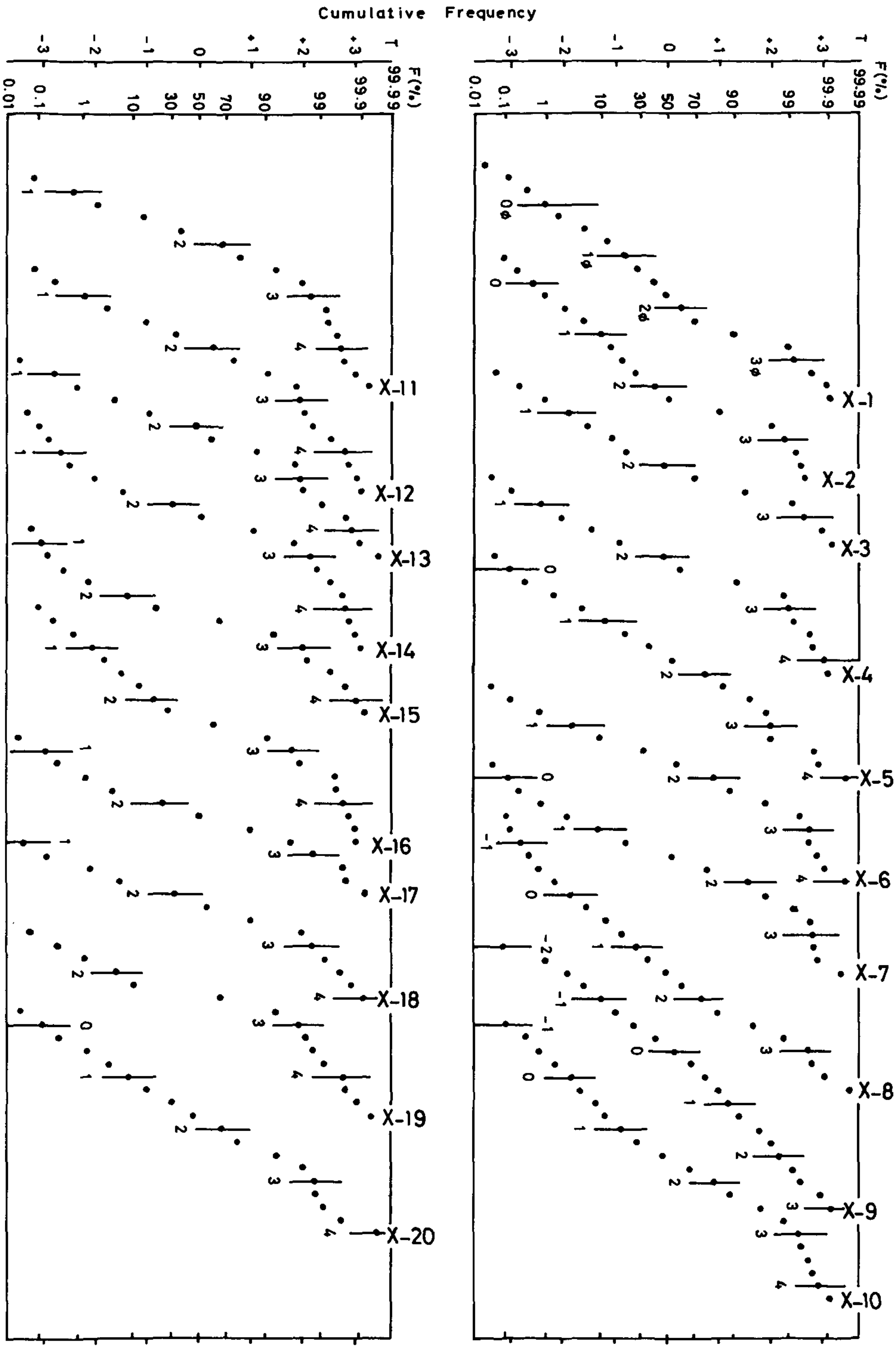

Fig. 2. Grain size distributions plotted on log-normal prpbability paper, for beach (X-1～X-10) and aeolian (X-11～X-20) samples.

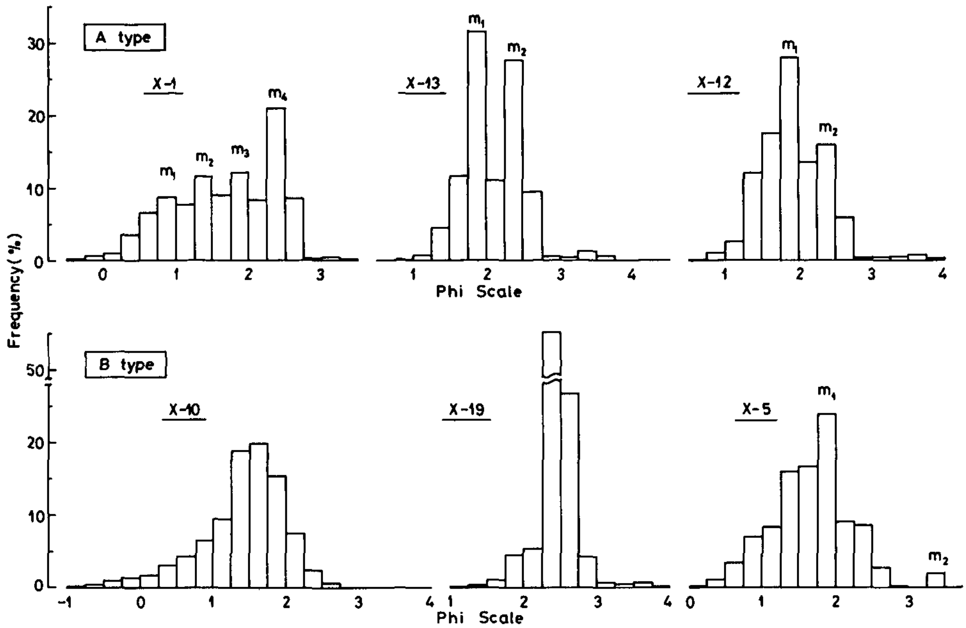

Fig. 3. Histogram of grain size distribution of sample.

きな山から離れて，小さな山m_2が孤立している．このような場合にはm_2を無視して山はm_1 1つだけと考え，B型とした．

さて，適合度cと試料の粒径密度分布型とを合わせてTable 2を見ると，A型よりもB型の方が，一般的にcの値が小さいという傾向があると言えよう．このことは，山の現れる数がなるべく少ない粒径密度分布を示す試料ほど，分布モデルの適合性が良くなっていることを示すものと考えられる．

Ⅳ．分布モデルの適用限界

分布モデルは，粒径パラメーターの誤差の検討に用いるものであるから，試料の粒径分布に分布モデルのそれがよく適合するということと同時に，分布モデルの粒径パラメーターの値も試料のそれに近いことが望ましい．このことを検討するために，積率法で求めた粒径パラメーターの打切り値による変化傾向を調べた．なお，用いた試料は第Ⅲ章のものと同じである．

Fig. 4は淘汰度の打切り値による変化傾向を表わした図である（白丸は試料について，点線は分布モデルについて）．Fig. 4によると，分布モデルの淘汰度と試料のそれとを打切り値別に比較してみると，X－7やX—19のように両者がほぼ一致している場合(a)と，X—18のように両者が異なっている場合(b)とがある．しかし後者の場合，分布モデルの淘汰度が打切り値によって変化する傾向は，試料のそれと類似しており，あたかも両者の変化傾向が平行関係にあるように見える．以上の考察から，(a)のような場合，その分布モデルを淘汰度の誤差の検討に用いることができる

と言える．また(b)のような場合でも，その分布モデルは同様に用いることができると考えられよう．

他の粒径パラメーターについても，淘汰度の場合と同様な検討を行なった結果，試料X—4の分布モデルが歪度に関して全く適合しなかった以外は，すべての分布モデルが上記の(a)あるいは(b)のような結果を示した．このことから，X—4の分布モデル以外の分布モデルは，粒径パラメーターの誤差の検討に用いられると考えられる．また，分布モデルの粒径パラメーターの値が試料のそれに近いほど，第III章で定義した分布モデルの適合度 c の値が小さくなるという傾向も同時に見い出された．このことから，試料に対する分布モデルの粒径パラメーターに関する適合性を表わす場合，c の値で代表させることができると思われる．

以上の結果から，分布モデルの適合度 c の値が0.1以下ならば，その分布モデルは試料の粒径パラメーターの誤差の検討に用いることができると言えよう（Table 2参照）．

また第III章で，山が2つ以上現れる粒径密度分布を示す試料（B型）の分布モデルは，山が1つのもの（A型）の分布モデルよりも適合性が相対

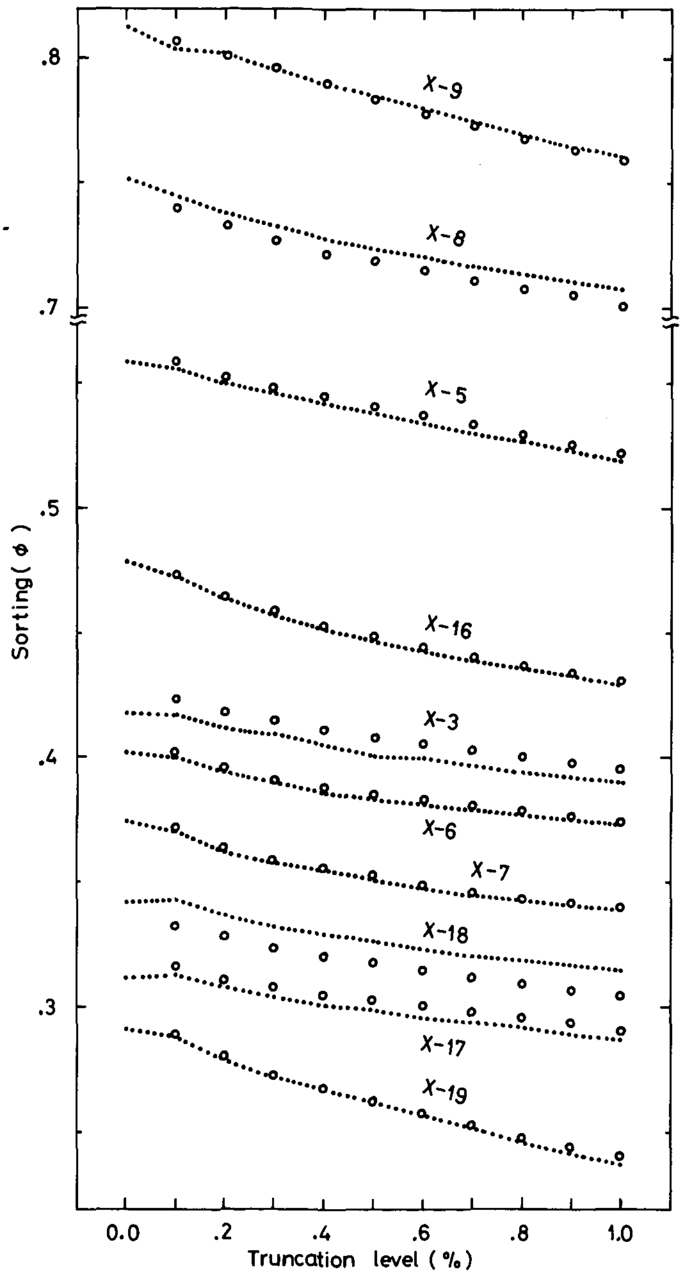

Fig. 4. Variation of moment sorting due to truncation level, for sample and distribution model

的に良くないと述べた．しかし Table 2に示したB型の試料の分布モデルの c の値は，その大部分が0.1以下である．かってJONES(1970)は，粒径パラメーターの誤差を検討し妥当な粒径パラメーターの値を見積るために，A型のような試料の粒径分布にほぼ完全に適合させることができる，ある数学的な分布モデルを提案した．だが彼の分布モデルは，B型のような試料の粒径分布には適用できないという限界性を持っていた．今回筆者が提案した分布モデルは，この限界性を克服するものと思われる．

V．ま と め

1)．任意の粒径分布に適合し得る数学的な分布モデルを提唱した．

2)．分布モデルを用いて粒径パラメーターの誤差を検討し得る，分布モデルの適合度 c の値は，0.1以下と考えられる．ただし c は，正規確率変数値で測った試料の累加頻度と分布モデルのそれとの差を1つの頻度分布と見做した場合の，その分布における標準偏差として定義される．

3)．粒径密度分布が1つの山を示す試料に対する分布モデルのほぼ全部，また同じく山が2つ以上ある試料の分布モデルの大部分は，c の値が0.1以下になり，分布モデルを用いて粒径パラメーターの誤差を検討しようとする場合，試料の粒径分布のモーダリティはあまり問題にならないと思われる．

謝辞 本小論を書くにあたり，有益な助言をしていただいた北海道大学理学部中尾欣四郎教授に感謝致します．

文 献

井口正男・目崎茂和，1974．沖積河川における河床砂れきの粒度組成について（II）．地理評，**47**，545—554．

JONES, T. A., 1970. Comparison of the descriptors of sediment grain-size distributions. *Jour. Sed. Petrology*, **40**, 1204—1215.

太井子宏和・藤木忠美，1975．砂の粒径分布型と諸統計量の見積りについて．地理予，**9**，122—123．