



Title	弾性波エネルギー流量
Author(s)	田治米, 鏡二; TAZIME, Kyozi
Citation	北海道大学地球物理学研究報告, 42, 51-99
Issue Date	1983-10-25
DOI	https://doi.org/10.14943/gbhu.42.51
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/14104
Type	departmental bulletin paper
File Information	42_p51-99.pdf



弾性波のエネルギー流量

田治米 鏡 二

北海道大学理学部地球物理学教室

(昭和58年2月21日受理)

Energy Flows of Elastic Waves

By Kyozi TAZIME

Department of Geophysics, Faculty of Science,
Hokkaido University

(Received February 21, 1983)

内 容

- I Hamiltonの変分原理
- II Lagrangeの積分関数 $\mathcal{L}(u_i)$ の性質
- III 等方体のエネルギーに関する不変量
- IV 等方体内の球面波のエネルギー
- V 単振子のエネルギーの収支
- VI 平面を通過する円筒SH波のエネルギー流量
- VII 弾性板内の円筒SH波のエネルギー流量

補 遺

- A $\delta(x)$ 関数の諸性質
- B 弦のエネルギーの収支

In order to discuss the energy partition of various waves, the energy flow is to be dealt with. At the first two sections in the present paper, fundamental matters for the kinematics are looked at again, starting from Hamilton's variation principle. As to the energy flow in the isotropic medium, then, the invariant of the energy is investigated. Removing the invariant, the expressions of the potential energy as well as of the energy flow become very simple. Thus at the fourth section the energy partition of spherical waves in the isotropic medium is discussed. The basic property of the motion of the elastic body is resemble to the motion of a simple pendulum. The energy partition of the simple pendulum is looked back at the fifth section. The energy flow must encounter with various boundaries. Energy flows passing through planes which enclose a line source are found at the sixth section to be equal to the original ones. As is well known, there exist only the normal modes in an elastic plate. This problem is discussed at the seventh section from a view point of the energy flow. The rate of the energy flow is originated from the seismic source and is equal to the rate of the energy

given by the force at the source. Taking no account of poles in the integrand, the displacement in the plate can be also obtained by the use of a result of Schwartz's distribution theory. His theory seems to be favourable to the modal solution.

Dirac's delta function is exhibited at Appendix A and energy partitions of a string are considered at Appendix B. The present paper will be followed by the discussions on energy partitions of elastic surface waves in general.

I. Hamilton の変分原理

弾性体の運動方程式は、力の釣合、熱力学第1法則および運動量の保存則など、種々な方面からみちびかれる。ここでは Hamilton の変分原理からみちびく道をたどる。

変位成分を u_i とし、AKI and RICHARDS (1980) にならってテンソル記号を用いると、strain テンソルの成分は次のように定義される

$$e_{ij} \equiv \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (1.1)$$

さらに strain と stress との関係を求めるために、弾性定数を C_{ijpq} とすると、一般化されたフックの法則により、stress テンソルの成分は次のように表わされる

$$\tau_{ij} = C_{ijpq} e_{pq} \quad (1.2)$$

ただし、

$$C_{ijpq} = C_{jipq} = C_{ijqp} = C_{pqij}. \quad (1.3)$$

これらの記号を用いると、運動エネルギー密度およびポテンシャル・エネルギー密度 (strain-energy 関数) はそれぞれ次のように表わされる。

$$w_{kin} \equiv \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i. \quad (1.4)$$

$$w_{pot} \equiv \frac{1}{2} \tau_{ij} e_{ij} = \frac{1}{2} \tau_{ij} u_{i,j}. \quad (1.5)$$

ただし、(1.4) の ρ は媒質の密度、ドットは時間 t に関する微分を意味する。一方、弾性定数の対称性 (1.3) により

$$C_{ijpq} e_{pq} u_{i,j} = C_{ijpq} e_{pq} u_{j,i}$$

なので、(1.5) の等号が成立する。

次に Lagrange 密度

$$L \equiv w_{kin} - w_{pot} \quad (1.6)$$

を用い、

$$\mathcal{L}[u_i] \equiv \int_{t_0}^{t_1} \iiint_{a_j}^{b_j} L(t, x_j; u_i, \dot{u}_i, u_{i,j}) dx_1 dx_2 dx_3 dt \quad (1.7)$$

とおく、上式の x_j は空間座標である。この式の \mathcal{L} に限らず、一般の関数に対し、 u_i の変分を δu_i とし、

$$\delta u_i(t_0) = \delta u_i(t_1) = \delta u_i(a_j) = \delta u_i(b_j) = 0 \quad (1.8)$$

の条件付きで

$$\delta \mathcal{L}[u_i] = 0 \quad (1.9)$$

を満たす $u_i(t, x_j)$ を求めるのが一般の変分法である。

Hamilton の主張によると：定積分 (1.7) の上下限の中間において考えられる無数に多い運動 u_i の中で、力学的に実現される運動は (1.6)~(1.9) を満たすものだけである。この主張は Hamilton の変分原理と呼ばれ、熱力学第 1 法則と同様な内容を持っている。

力学的に実現される運動を求めるために、(1.7) の変分を考えると、変分記号 δ は u_i に関する変分なので、媒介変数 (t, x_j) には無関係である。ゆえに、

$$\delta \mathcal{L}[u_i] = \int_{t_0}^{t_1} \iiint_{a_j}^{b_j} \delta L dx_1 dx_2 dx_3 dt \quad (1.10)$$

および、(1.1)~(1.5) により

$$\delta w_{kin} = \rho \dot{u}_i \partial(\delta u_i) / \partial t, \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} \delta w_{pot} &= \frac{1}{2} c_{ijpq} (e_{ij} \delta e_{pq} + e_{pq} \delta e_{ij}) \\ &= c_{ijpq} e_{pq} \delta e_{ij} = \tau_{ij} \partial(\delta u_i) / \partial x_j. \end{aligned} \quad (1.12)$$

次に、(1.11)、(1.12) についての定積分に対し部分積分を行うと

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta w_{kin} dt = [\rho \dot{u}_i \delta u_i]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \rho \ddot{u}_i \delta u_i dt, \quad (1.13)$$

$$\int_{a_j}^{b_j} \delta w_{pot} dx_j = [\tau_{ij} \delta u_i]_{a_j}^{b_j} - \int_{a_j}^{b_j} \tau_{ij,j} \delta u_i dx_j. \quad (1.14)$$

これらの演算結果を用い、(1.6) を (1.10) に代入すると、

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}[u_i] &= \iiint_V [\rho \dot{u}_i \delta u_i]_{t_0}^{t_1} dV - \int_{t_0}^{t_1} dt \iint_S [\tau_{ij} \delta u_i]_{a_j}^{b_j} dS \\ &\quad - \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint_V (\rho \ddot{u}_i - \tau_{ij,j}) \delta u_i dV. \end{aligned} \quad (1.15)$$

上式の V は弾性体の体積であり、 S はその表面積であって、各面に対する法線は x_j 方向に等しいとしている。ここで条件 (1.8) を採用すると上式右辺の第 1 項および第 2 項は 0 に

なる。しかるに、定積分の上下限の間においては δu_i は勝手な値を持つことができるので、(1.9) が成立するためには

$$\rho \ddot{u}_i = \tau_{ij,j} \quad (1.16)$$

でなければならない。逆に (1.16) と (1.8) とが与えられると、(1.9) を証明することができる。

式 (1.16) は外力 (body force) f_i が不在の場合の弾性体の運動方程式である。外力 f_i が作用する場合の運動方程式は (1.16) ではなくて、次のようになる

$$\rho \ddot{u}_i = \tau_{ij,j} + f_i. \quad (1.17)$$

運動方程式は力の釣合を意味している。式 (1.9) は変位 u_i がある値からわずかに変化しても $\mathcal{L}[u_i]$ は変化せず一定の値を持ち続けることを意味し、そのある値は (1.16) によって与えられる。

次に (1.17) の両辺に du_i を乗じ、0 から $u_i(t)$ まで積分すると、

$$\begin{aligned} \int_0^{u_i} \rho \ddot{u}_i du_i &= \int_0^t \rho \ddot{u}_i \dot{u}_i dt = \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} (\rho \dot{u}_i \dot{u}_i) dt = \frac{1}{2} [\rho \dot{u}_i \dot{u}_i]_0^t = [w_{kin}]_0^t, \\ \int_0^{u_i} \tau_{ij,j} du_i &= \int_0^t \tau_{ij,j} \dot{u}_i dt = \int_0^t (\tau_{ij} \dot{u}_i)_{,j} dt - \int_0^t \tau_{ij} \dot{u}_{i,j} dt, \quad \int_0^{u_i} f_i du_i = \int_0^t f_i \dot{u}_i dt. \end{aligned}$$

しかるに (1.2), (1.3) により

$$\begin{aligned} \tau_{ij} \dot{u}_{i,j} &= C_{ijpq} e_{pq} \dot{u}_{i,j} = C_{ijpq} e_{pq} \dot{u}_{j,i} = C_{ijpq} e_{pq} \dot{e}_{ij} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (C_{ijpq} e_{pq} e_{ij}) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \tau_{ij} e_{ij} \right) \\ &= \partial w_{pot} / \partial t. \end{aligned}$$

また、 n_j を面素 dS の法線方向に対する x_j の方向余弦とすると、Gauss の定理により

$$\iiint_V (\tau_{ij} \dot{u}_i)_{,j} dV = \iint_S n_j \tau_{ij} \dot{u}_i dS.$$

ゆえに、以上の計算結果をまとめると、

$$\left[\iiint_V (w_{kin} + w_{pot}) dV \right]_0^t = \int_0^t dt \iint_S \mathbf{T}(\mathbf{n}) \cdot \dot{\mathbf{u}} dS + \int_0^t dt \iiint_V \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{u}} dV \quad (1.18)$$

あるいは

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V (w_{kin} + w_{pot}) dV = \iint_S \mathbf{T}(\mathbf{n}) \cdot \dot{\mathbf{u}} dS + \iiint_V \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{u}} dV. \quad (1.19)$$

ただし、上式においては

$$\mathbf{T}(\mathbf{n}) \cdot \dot{\mathbf{u}} = n_j \tau_{ij} \dot{u}_i, \quad \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} = f_i u_i \tag{1.20}$$

によって、テンソル記号がベクトル記号に書き換えられている。

式 (1.19) は外力 \mathbf{f} と S 面上の traction $\mathbf{T}(\mathbf{n})$ とが作用している場合の熱力学第 1 法則に他ならない。

surface traction $\mathbf{T}(\mathbf{n})$ は弾性体の表面 S に作用する単位面積当りの力ベクトルであって、図 1.1 のように、 dS に立てた単位法線ベクトル \mathbf{n} の足を着力点とする。

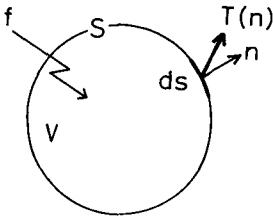


Fig.1.1 The relation between the body force and the surface traction.

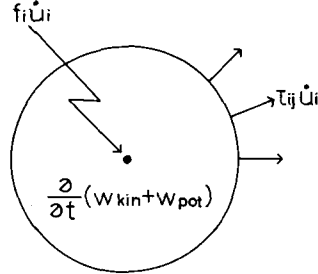


Fig.1.2 The first law of the thermodynamics, neglecting the heat energy.

弾性体に body force \mathbf{f} が作用すると、弾性体の体積 V 内に変位 \mathbf{u} を生じ、このために $t=0$ から t までの間に \mathbf{f} は (1.18) の右辺第 2 項の仕事をする。換言すると、 V 内にこれだけのエネルギーが与えられる。そのために弾性体の境界面 S が変形すると、体積 V の弾性体は $\mathbf{T}(\mathbf{n})$ により S 面を通して外部に (1.18) の右辺第 1 項の仕事をする。すなわち、 V 内から外部へエネルギーが流出する。body force \mathbf{f} が存在しない場合でも、体積 V に隣接する媒質側から $\mathbf{T}(\mathbf{n})$ が与えられ、境界面 S を通して V 内にエネルギーが流入することもできる。結局(1.18) の右辺の代数和が左辺の量を与えるものと解釈される。式 (1.19) を図示すると図 1.2 のようになる。

境界面 S を通り、体積 V の弾性体の内外に出入する弾性エネルギーの密度を w_{flow} とし、

$$p_j \equiv \tau_{ij} \dot{u}_i \tag{1.21}$$

とおくと、(1.19) の右辺第 1 項は次のように表わされる

$$\iint_S n_j p_j dS = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V w_{flow} dV. \tag{1.22}$$

しかるに $dV = n_j dx_j dS$ なので、

$$\iint_S \left\{ \int_{t_0}^{t_1} p_j dt - \int_{a_j}^{b_j} w_{flow} dx_j \right\} n_j dS = 0.$$

さらに、上式 { } 内の t および x_j に関する積分の被積分関数の積分区間内における平均

値をそれぞれ \bar{p}_j および \bar{w}_{flow} と記すと、

$$\iint_S \bar{p}_j n_j dS = \frac{n_j x_j}{t} \iint_S \bar{w}_{flow} dS. \quad (1.23)$$

上式の左辺は単位時間内に S 面を通るエネルギー量すなわちエネルギー流量であり、

$$U \equiv n_j x_j / t = |\mathbf{x}| / t \quad (1.24)$$

はエネルギーの伝播速度である。

式 (1.21) の p_j は rate of energy flow density (areal) ベクトル \mathbf{p} の成分であるが、 p_j は時間的平均値 \bar{p}_j としてしか (1.23) のような具体的表現に現われない。媒質内の波面の種類又は波形のいかんによっては、2媒質の境界面上において p_j は必ずしも連続ではない。

II. Lagrange の積分関数 $\mathcal{L}[u_i]$ の性質

式 (1.4), (1.5) と (1.11), (1.12) とを見くらべると、前者は後者に比し δ 記号が落ちている代りに 1/2 の係数が付いているだけである。ゆえに、(1.7) の右辺に部分積分を施すと、(1.15) の代りに次式が得られる

$$\begin{aligned} 2\mathcal{L}[u_i] = & \iiint_V [\rho \dot{u}_i u_i]_{t_0}^{t_1} dV - \int_{t_0}^{t_1} dt \iint_S [\tau_{ij} u_i]_{a_j}^{b_j} dS \\ & - \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint_V (\rho \ddot{u}_i - \tau_{i,j,j}) u_i dV. \end{aligned} \quad (2.1)$$

しかるに、(1.16) が満たされていると、上式右辺の最後の項は 0 である。その代り、(1.9) に対応する条件はないので、他の項は 0 とは限らない。

ただし、運動 u_i が $\exp(-i\omega t)$ に比例する場合に

$$t_1 = t_0 + 2\pi/\omega \quad (2.2)$$

のように選ぶと、(2.1) の右辺第 1 項は 0 になる。すると、(2.1) は次のようになる

$$2\mathcal{L}[u_i] = - \int_{t_0}^{t_0+2\pi/\omega} dt \iint_S [\tau_{ij} u_i]_{a_j}^{b_j} dS. \quad (2.3)$$

上式の $\tau_{ij} u_i$ は時間 t における S 面上のエネルギーの面密度である。 $x_j = a_j$ と $x_j = b_j$ との中間の $x_j = c_j$ 面において弾性媒質が不連続な場合にも、エネルギーの面密度は $x_j = c_j$ 面上において連続でなければならない。さもないと、 $x_j = c_j$ 面上においてエネルギーの生滅が起る。

$$\therefore [\tau_{ij} u_i]_{c_j-0}^{c_j+0} = 0. \quad (2.4)$$

しかるに、stress 成分 τ_{ij} と変位成分 u_i とは元来は互いに独立なので、上式が常に満たされるためには、stress と strain との関係のいかんによらず、次の 2 条件が成立しなければならない、

$$[u_i]_{c_j-0}^{c_j+0} = [\tau_{ij}]_{c_j-0}^{c_j+0} = 0. \quad (2.5)$$

これが弾性体の境界条件であって、不連続面の有無に関せず、弾性体の内部において条件(2.5)は常に満たされている。エネルギー保存の見地に立つと、弾性体の境界条件としては(2.5)以外の条件は考えられない。しかも、

$$[\tau_{ij} u_i]_{a_j}^{b_j} = [\tau_{ij} u_i]_{a_j}^{c_j-0} + [\tau_{ij} u_j]_{c_j+0}^{b_j} = [\tau_{ij} u_i]_{a_j}^{b_j} - [\tau_{ij} u_i]_{c_j-0}^{c_j+0}.$$

ゆえに、 a_j と b_j との間に不連続面 c_j があると否とに関せず(2.3)が成立する。

さて、弾性体の自由表面上においては $\tau_{ij} = 0$ 、剛体に接した面上においては $u_i = 0$ 。

ゆえに、弾性板のように、 $x_j = a_j$ および b_i がそれぞれ自由表面又は剛体に接する面であると、

$$[\tau_{ij} u_i]_{a_j}^{b_j} = 0. \quad (2.6)$$

上式は弾性板内を伝播する波の特性方程式と同等であって、その波は表面波の1種である。半径 a_j の弾性球が自由表面を持つか、剛体に接していると

$$(\tau_{ij} u_i)_{x_j=a_j} = 0. \quad (2.7)$$

これは弾性球の自由振動の方程式と同等である。

弾性板内には(2.6)の特性を持つ表面波しか存在せず、弾性球には(2.7)の特性を持つ自由振動しか存在しない。いずれの場合にも実体波が存在しないのは一見不都合のように思われる。しかし、有限な大きさを、その中の1部にでも、持つ弾性体内の実体波は境界面において反射を繰り返し、ついに定常波(2.6)又は定常振動(2.7)を形成する。

次に、直角座標 (x, y, z) の $z=0$ を自由表面とし、 $z=\infty$ まで等方均質な弾性媒質が存在する半無限弾性体を考える。式(2.7)の記号と対比すると、 $x_j \rightarrow z, i \rightarrow x, y, z$ である。すると、

$$(\tau_{iz} u_i)_{z=0} = 0. \quad (2.8)$$

一方、 $z=\infty$ 面に関しては次のような radiation condition が考えられる：

「 $z=\infty$ 面からの反射波は存在しない」

しかも、

「 $z=\infty$ 面上のエネルギー密度 $\tau_{ij} u_i$ は無限大にならない」。

$$(2.9)$$

ただし、条件(2.9)が満たされても、なお次の2つの場合がありえる。

$$\iint_S (\tau_{iz} u_i)_{z=\infty} dS \neq 0, \quad (2.10)$$

$$\iint_S (\tau_{iz} u_i)_{z=\infty} dS = 0. \quad (2.11)$$

しかるに、(2.8) と (2.11) とが満たされると、(2.6) が成立したことになるので、(2.3) の右辺は 0 である。すなわち、

$$\mathcal{L}[u_i]=0. \quad (2.12)$$

さらに (1.6) の 1 周期間の平均値 \bar{L} を用いると、(1.7) により

$$\iiint_V (\bar{w}_{kin} - \bar{w}_{pot}) dV = 0. \quad (2.13)$$

以上の考察結果によると、(2.5) と (2.6) とが連立する波の位相速度を c とすると、この波は次のような特性を持つ、

$$M(\omega, c) = 0. \quad (2.14)$$

しかも、(2.14) と (2.13) とは、(2.12) を仲介として、同じ内容を持つ。

一方、無限に広い弾性媒質内の平面波においては、たとえば AKI and RICHARDS (1980) により、

$$w_{kin}(t, \mathbf{x}) = w_{pot}(t, \mathbf{x}). \quad (2.15)$$

ゆえに、(2.13) は満たされるが、平面波の場合は (2.11) が成立しないので、(2.14) のような特性を持つことはできない。

条件 (2.11) を満たす波は z 方向に伝播しない inhomogeneous wave に限られる。

III. 等方体のエネルギーに関する不変量

等方体の stress テンソルの成分 (1.2) は、ラーメの定数を λ, μ とすると、次のように表わされる：

$$\tau_{ij} = \lambda \delta_{ij} e_{kk} + 2\mu e_{ij}. \quad (3.1)$$

すると、

$$\tau_{ij,j} = (\lambda + \mu) u_{i,jj} + \mu u_{i,jj} = (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_j} (e_{kk}) + \mu \nabla^2 u_i. \quad (3.2)$$

次に、

$$\Theta \equiv e_{kk} = \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad \Omega \equiv \nabla \times \mathbf{u} \quad (3.3)$$

とおき、直角座標 (x_1, x_2, x_3) の各座標軸方向の単位ベクトルを $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$ とすると、

$$\Omega = \hat{x}_1 \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) + \hat{x}_2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) + \hat{x}_3 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right),$$

$$\mathbf{x}_1 \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\Omega}) = \frac{\partial \Omega_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_3} = \frac{\partial \Theta}{\partial x_1} - \nabla^2 u_1.$$

すなわち,

$$(\nabla \times \boldsymbol{\Omega})_i = u_{j,ji} - u_{i,jj} = \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} - \nabla^2 u_i. \quad (3.4)$$

ゆえに, (3.2) と (3.4) とから $\nabla^2 u_i$ を消去すると,

$$\tau_{ij,j} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} - \mu (\nabla \times \boldsymbol{\Omega})_i. \quad (3.5)$$

これを (1.16) に代入すると, 等方体の運動方程式は次のように表わされる:

$$\rho \ddot{u}_i = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} - \mu (\nabla \times \boldsymbol{\Omega})_i$$

あるいは

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = (\lambda + 2\mu) \nabla \Theta - \mu \nabla \times \boldsymbol{\Omega}. \quad (3.6)$$

上式の両辺に $\dot{\mathbf{u}}$ をスカラー乗積すると,

$$\rho \dot{\mathbf{u}} \cdot \ddot{\mathbf{u}} = (\lambda + 2\mu) \dot{\mathbf{u}} \cdot (\nabla \Theta) - \mu \dot{\mathbf{u}} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\Omega}).$$

しかるに, ベクトル演算の公式 (伊藤, 1948) によると,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}} \cdot (\nabla \Theta) &= \nabla \cdot (\dot{\mathbf{u}} \Theta) - \Theta \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} = \nabla \cdot (\dot{\mathbf{u}} \Theta) - \Theta \dot{\Theta}, \\ -\dot{\mathbf{u}} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\Omega}) &= \nabla \cdot (\dot{\mathbf{u}} \times \boldsymbol{\Omega}) - \boldsymbol{\Omega} \cdot (\nabla \times \dot{\mathbf{u}}) = \nabla \cdot (\dot{\mathbf{u}} \times \boldsymbol{\Omega}) - \boldsymbol{\Omega} \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}}. \end{aligned}$$

ゆえに,

$$\begin{aligned} \rho \dot{\mathbf{u}} \cdot \ddot{\mathbf{u}} &= (\lambda + 2\mu) \{ \nabla \cdot (\dot{\mathbf{u}} \Theta) - \Theta \dot{\Theta} \} + \mu \{ \nabla \cdot (\dot{\mathbf{u}} \times \boldsymbol{\Omega}) - \boldsymbol{\Omega} \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} \}. \\ \therefore \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \{ \rho \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}} + (\lambda + 2\mu) \Theta^2 + \mu \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega} \} \\ &= \nabla \cdot \{ (\lambda + 2\mu) (\dot{\mathbf{u}} \Theta) + \mu (\dot{\mathbf{u}} \times \boldsymbol{\Omega}) \}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

しかるに, 一般のベクトルを \mathbf{K} とすると, Gauss の定理により

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{K} dV = \iint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{K} dS$$

なので, (3.7) の両辺を体積 V について積分し,

$$w_{\text{pot}}^{(iso)} \equiv \frac{1}{2} \{ (\lambda + 2\mu) \Theta^2 + \mu \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega} \}, \quad (3.8)$$

$$\mathbf{p}^{(iso)} \equiv (\lambda + 2\mu) \dot{\mathbf{u}} \Theta + \mu \dot{\mathbf{u}} \times \boldsymbol{\Omega} \quad (3.9)$$

とおくと,

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \{w_{kin} + w_{pot}^{(iso)}\} dV = \iint \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}^{(iso)} dS. \quad (3.10)$$

上式は $\mathbf{f}=0$ の場合の (1.19) に対応する.

一方, (1.5) に (3.1) を代入し, (3.3) を用いて整理すると,

$$\begin{aligned} w_{pot} &= \frac{\lambda}{2} (e_{11} + e_{22} + e_{33})^2 + \mu (e_{11}^2 + e_{22}^2 + e_{33}^2) + 2\mu (e_{23}^2 + e_{31}^2 + e_{12}^2) \\ &= w_{pot}^{(iso)} + w_{inv}; \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} w_{inv}/(2\mu) &\equiv \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \\ &\quad + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right). \end{aligned} \quad (3.12)$$

しかも, (3.12) の右辺は直角座標変換に対する不変量である.

一方, (1.19) に戻ってこれに (3.11) を代入し, (3.10) と比較すると, (1.21) により

$$\mathbf{T}(\mathbf{n}) \cdot \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{p} \quad (3.13)$$

なので,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V w_{kin} dV - \iiint_V \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{u}} dV &= \iiint \tau_{i3,j} \dot{u}_i dV \\ &= \iint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{p} dS - \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V w_{pot} dV \\ &= \iint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}^{(iso)} dS - \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V w_{pot}^{(iso)} dV. \end{aligned} \quad (3.14)$$

すなわち, 等方体の同じ運動方程式から $(w_{pot}, \mathbf{n} \cdot \mathbf{p})$ 又は $(w_{pot}^{(iso)}, \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}^{(iso)})$ のいずれかの組合せが得られる. 後者の方が w_{inv} を含まないので単純であるが, 前者の方が従来の定義 (3.11) に合っている.

LOVE (1934) によると, 変位 u_i に関する変分記号 δ を用いると,

$$\begin{aligned} \delta \iiint_V \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) dV &= 0. \\ \therefore \delta \iiint_V w_{inv} dV &= 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

ゆえに, (1.9) において (3.11) の w_{pot} の代りに $w_{pot}^{(iso)}$ を用いても (1.16) 又は (1.17) と同じ結果が得られる. 表面条件の違いに従って, w_{pot} と $w_{pot}^{(iso)}$ とを使い分けるべきである, と LOVE は述べている. しかし, 使い分けの具体例は乏しい.

なお, (3.11) と (3.14) とから,

$$\iint_S \mathbf{n} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{p}^{(iso)}) dS = \iiint_V \nabla \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{p}^{(iso)}) dV = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V w_{inv} dV.$$

ゆえに、(3.11) に対応する次の関係が得られる：

$$\nabla \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{p}^{(iso)}) = \frac{\partial}{\partial t} w_{inv}. \quad (3.16)$$

次に、(3.12) の不変量を球座標 (r, θ, φ) で表わすと、

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} - \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right), \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \frac{\partial u_r}{\partial r} \right), \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{\partial u_r}{\partial r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (3.17)$$

等方体なので、

$$\partial/\partial\theta=0 \quad (3.18)$$

の現象に着目すると、(3.17) の第 2 式の右辺以外は 0 になる。しかも、球面 P 波の場合は $u_\varphi=0$ 、球面 S 波の場合は $u_r=0$ なので、結局いずれの球面波に対しても不変量は 0 である。

不変量を円筒座標 (r, θ, z) で表わすと、

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_z}{\partial \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial z} - \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} &= \frac{\partial u_r}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial r} - \frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{\partial u_r}{\partial r}, \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{\partial u_r}{\partial r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (3.19)$$

line source の場合は

$$\partial/\partial z=0 \quad (3.20)$$

である。しかも P 波の場合は $u_\theta=0$ 、S 波の場合は $u_r=0$ なので、結局いずれの円筒波に対しても不変量は 0 である。

直角座標においても

$$\partial/\partial x_2=0 \quad (3.21)$$

とすると、SH 波に対しては $u_1=u_3=0$ なので、SH 波に関する不変量は 0 である。一方、P 波、SV 波の変位ポテンシャルを ϕ, ψ とすると、

$$u_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi}{\partial x_3}, \quad u_3 = \frac{\partial \phi}{\partial x_3} - \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \quad (3.22)$$

と表わされる。ゆえに、

$$u_1(P) = \partial \phi / \partial x_1, \quad u_3(P) = \partial \phi / \partial x_3, \quad \phi = e^{i(k_1 x_1 + k_3 x_3)}$$

とおくと、

$$\frac{\partial u_1(P)}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3(P)}{\partial x_1} - \frac{\partial u_3(P)}{\partial x_3} + \frac{\partial u_1(P)}{\partial x_1} = 0.$$

ゆえに、平面 P 波の不変量は 0 である。平面 SV 波の不変量も、P 波と同様に、0 である。不変量 (3.12) が 0 であると、 w_{pot} と $w_{pot}^{(iso)}$ および \mathbf{p} と $\mathbf{p}^{(iso)}$ の区別をする必要はない。

IV. 等方体内の球面波のエネルギー

媒質内の P 波の速度を

$$v_p \equiv \{(\lambda + 2\mu) / \rho\}^{\frac{1}{2}} \quad (4.1)$$

とおき、Dirac のデルタ関数 $\delta(\mathbf{x})$ を用い、外力を

$$\mathbf{f} = \nabla \Phi, \quad \Phi = 4\pi A \rho v_p^2 \delta(\mathbf{x}) e^{-i\omega t} \quad (4.2)$$

とすると、(1.17) の解は次式によって与えられる (AKI and RICHARDS, 1980),

$$\mathbf{u} = \nabla \phi, \quad \phi = A \frac{1}{|\mathbf{x}|} e^{i\omega \left(\frac{|\mathbf{x}|}{v_p} - t \right)}. \quad (4.3)$$

すなわち、(4.2) によって S 波は発生しない。

換言すると、(4.2) は P 波の点振源である。この場合は、(3.3) の記号を用いると、

$$\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{u} = 0. \quad (4.4)$$

これを (3.6) に代入し、外力を考慮に入れると、

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = (\lambda + 2\mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{f}. \quad (4.5)$$

運動方程式 (4.5) の解は (4.3) に他ならない。

極座標 (r, θ, φ) を採用し、座標軸方向の単位ベクトルを $(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\varphi}})$ と記すと、

$$\nabla = \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\boldsymbol{\varphi}} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi},$$

$$e_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad e_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r},$$

$$\begin{aligned}
e_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_{\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{u_{\theta}}{r} \cot \theta + \frac{u_r}{r}, \\
e_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_{\varphi}}{\partial \theta} - u_{\varphi} \cot \theta \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_{\theta}}{\partial \varphi} \right\}, \\
e_{\varphi r} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_{\varphi}}{\partial r} - \frac{u_{\varphi}}{r} \right), \quad e_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{\theta}}{\partial r} - \frac{u_{\theta}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right). \quad (4.6)
\end{aligned}$$

しかるに (4.3) の ϕ は $r=|\mathbf{x}|$ のみの関数なので、

$$\begin{aligned}
u_r &= A \frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r} e^{i\omega(r/a-t)} \right\}, \quad u_{\theta} = u_{\varphi} = 0, \\
e_{rr} &= \frac{du_r}{dr}, \quad e_{\theta\theta} = e_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r}, \quad e_{r\theta} = e_{\theta\varphi} = e_{\varphi r} = 0. \quad (4.7)
\end{aligned}$$

$$\therefore \Theta = \frac{du_r}{dr} + 2 \frac{u_r}{r}. \quad (4.8)$$

式 (4.7) によると, (3.17) の右辺はいずれも 0 である. ゆえに不変量 (3.12) は 0 である. ゆえに, (3.13), (3.9), (4.4) により,

$$\iint_S \mathbf{T}(\mathbf{n}) \cdot \dot{\mathbf{u}} dS = \iint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}^{(iso)} dS = \rho v_p^2 \iint_S \dot{u}_r \Theta dS. \quad (4.9)$$

しかるに, 上式の \dot{u}_r , Θ はこれらの実数部のみを用いるべきなので、

$$h = \omega/v_p \quad (4.10)$$

とおき, (4.7) の実数部を求めると、

$$\begin{aligned}
Re u_r &= -A \left\{ \frac{1}{r^2} \cos(hr - \omega t) + \frac{h}{r} \sin(hr - \omega t) \right\}, \\
Re \dot{u}_r &= -\omega A \left\{ -\frac{1}{r^2} \sin(hr - \omega t) - \frac{h}{r} \cos(hr - \omega t) \right\}, \\
Re \Theta &= -A \frac{h^2}{r} \cos(hr - \omega t). \quad (4.11)
\end{aligned}$$

これらを (4.9) に代入し, 半径 r_0 の球面上の積分を行うと, (1.22) と (4.9) により

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V w_{flow} dV = 4\pi A^2 \rho \omega^3 \left\{ \frac{1}{2r_0} \sin 2(hr_0 - \omega t) - h \cos^2(hr_0 - \omega t) \right\}.$$

$$\therefore \left[\iiint_V w_{flow} dV \right]_0^{2\pi/\omega} = -4\pi^2 A^2 \rho \omega^3 / v_p. \quad (4.12)$$

これが 1 周期間に球面を通過して流入するエネルギーの総量であって, これは球面の半径 r_0 に無関係である. (4.12) の右辺の負号は実は球面外への流出を意味する.

一方, (1.19) の右辺第 2 項に (4.2) を代入し, ふたたび (3.6) の下の公式を用いると、

$$\begin{aligned}\iint_V \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{f} dV &= \iint_V \nabla \cdot (\Phi \dot{\mathbf{u}}) dV - \iint_V \Phi \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} dV \\ &= 4\pi A \rho v_p^2 e^{-i\omega t} \left\{ \iint_S \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{u}} \delta(\mathbf{x}) dS - \iint_V \dot{\Theta} \delta(\mathbf{x}) dV \right\}.\end{aligned}\quad (4.13)$$

しかるに、 S 面上においては $\mathbf{x} \neq 0$ なので、(4.13) の右辺の面積積分項は 0 である。ゆえに、複素量の実数部のみを採用し、(4.13) に (4.11) を代入すると、

$$\begin{aligned}\iint_V \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{f} dV &= -4\pi A \rho v_p^2 \cos \omega t (\dot{\Theta})_{x=0} \\ &= 4\pi A^2 \rho \omega^3 \left\{ \frac{1}{r} \cos \omega t \sin(hr - \omega t) \right\}_{r=0}.\end{aligned}$$

しかも $r^{-1}[\cos 2\omega t]_0^{2\pi/\omega} = 0$ 。

$$\therefore \int_0^{2\pi/\omega} dt \iint_V \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{f} dV = 4\pi^2 A^2 \rho \omega^2 \left\{ \frac{\sin(hr)}{r} \right\}_{r=0} = 4\pi^2 A^2 \rho \omega^3 / v_p.\quad (4.14)$$

しかるに、

$$\int_0^{2\pi/\omega} dt \iint_S \mathbf{T}(\mathbf{n}) \cdot \dot{\mathbf{u}} dS = \left[\iint_V w_{flow} dV \right]_0^{2\pi/\omega}\quad (4.15)$$

なので、(4.12) と (4.14) とから、

$$\int_0^{2\pi/\omega} dt \iint_S \mathbf{T}(\mathbf{n}) \cdot \dot{\mathbf{u}} dS + \int_0^{2\pi/\omega} dt \iint_V \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{f} dV = 0.\quad (4.16)$$

すなわち、外力 \mathbf{f} が 1 周期間に体積 V の弾性体内に与えるエネルギー (4.14) はその期間に体積 V の表面 S を通って外部へ流出するエネルギーに等しい。すると、体積 V の弾性体内には何のエネルギーも残らない。

実際に、(3.8) や (4.11) を用いて運動エネルギーとポテンシャル・エネルギーとを計算してみると、

$$\begin{aligned}\iint_V w_{kin} dV &= \frac{\rho}{2} \int_0^{r_0} 4\pi r^2 \dot{u}_r^2 dr \\ &= 2\pi A^2 \rho \omega^2 \int_0^{r_0} \left\{ \frac{1}{r^2} \sin^2(hr - \omega t) - \frac{h}{r} \sin 2(hr - \omega t) + h^2 \cos^2(hr - \omega t) \right\} dr, \\ \iint_V w_{pot}^{(iso)} dV &= \frac{1}{2} \rho v_p^2 \int_0^{r_0} 4\pi r^2 \Theta^2 dr = 2\pi A^2 \rho \omega^2 h^2 \int_0^{r_0} \cos^2(hr - \omega t) dr. \\ \therefore \iint_V (w_{kin} + w_{pot}^{(iso)}) dV &= 2\pi A^2 \rho \omega^2 \left[h^2 \int_0^{r_0} \{1 + \cos 2(hr - \omega t)\} dr \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{r_0} \left\{ \frac{1}{2r^2} (1 - \cos 2(hr - \omega t)) - \frac{h}{r} \sin 2(hr - \omega t) \right\} dr \right] \\ &= 2\pi A^2 \rho \omega^2 \left\{ h^2 \left[r + \frac{\sin 2(hr - \omega t)}{2h} \right]_0^{r_0} - \left[\frac{1}{r} \sin^2(hr - \omega t) \right]_0^{r_0} \right\}.\end{aligned}$$

しかるに、

$$\left[\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \sin^2(hr - \omega t) \right]_0^{2\pi/\omega} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \{ \sin^2(hr) - \sin^2(hr) \} = 0.$$

$$\therefore \left[\iiint_V (w_{kin} + w_{pot}^{(iso)}) dV \right]_0^{2\pi/\omega} = 0. \quad (4.17)$$

今の場合には (1.18) は (4.16) と (4.17) とによって満たされる。すなわち、外力によって体積 V の弾性体に 1 周期間に与えられるエネルギーはすべて境界面 S を通って V 外に流出し、この期間内に V 内の総エネルギーの増減はない。

一方、 $\mathbf{f} = \mathbf{T}(\mathbf{n}) = 0$ の場合は (1.18) により、

$$\left[\iiint_V (w_{kin} + w_{pot}) dV \right]_0^t = 0. \quad (4.18)$$

これは自由表面 S に囲まれた体積 V の弾性体の自由振動におけるエネルギーの収支を表わしている。

外力のポテンシャルを、(4.2) の代りに、

$$\Phi = 4\pi A \rho v_p^2 \delta(\mathbf{x}) \delta(t). \quad (4.19)$$

と仮定すると、変位ポテンシャルは、(4.3) の代りに、次のようになる：

$$\phi = A \frac{1}{r} \delta(t - r/v_p); \quad r = |\mathbf{x}|. \quad (4.20)$$

すると、変位の r 方向の成分は、(A14) を用いると、次のように表わされる：

$$u_r = A \frac{1}{v_p r} \left(\frac{1}{t - r/v_p} - \frac{1}{r/v_p} \right) \delta(t - r/v_p). \quad (4.21)$$

上式の右辺は $t \neq r/v_p$ において 0、 $t = r/v_p$ において無限大である。仮定 (4.19) はエネルギー収支の考察に適さない。

V. 単振子のエネルギーの収支

単振子の質量を m 、流体抵抗を r 、復元力を s 、変位を u とすると、自由振動の方程式は次のように表わされる：

$$m\ddot{u} + r\dot{u} + su = 0. \quad (5.1)$$

上式を $u(t)$ について $t=0$ から t まで積分すると、

$$\begin{aligned} \int_{u(0)}^{u(t)} (m\ddot{u} + r\dot{u} + su) du &= 0, \\ \therefore - \int_{u(0)}^{u(t)} r\dot{u} du &= \int_{u(0)}^{u(t)} (m\ddot{u} + su) du \\ &= \left[\frac{1}{2} m\dot{u}^2 + \frac{1}{2} s u^2 \right]_{t=0}^{t=t}. \end{aligned}$$

しかるに、

$$w_{kin} \equiv \frac{1}{2} m \dot{u}^2, \quad w_{pot} \equiv \frac{1}{2} s u^2 \quad (5.2)$$

はそれぞれ運動エネルギーおよびポテンシャル・エネルギーなので、これらの記号を用いると、上式は次のように書き換えられる：

$$[w_{kin}(t) + w_{pot}(t)]_0^t = - \int_{u(0)}^{u(t)} r \dot{u} du \equiv Q(u). \quad (5.3)$$

式 (5.3) の Q は、 $Q > 0$ の場合は $t=0$ から t の間に外部から振子に与えられる熱エネルギー、 $Q < 0$ の場合は $-Q$ が振子から外部へ逃げる熱エネルギーである。

流体抵抗 r が 0 の場合は、(5.3) の右辺は 0 なので、

$$w_{kin}(t) + w_{pot}(t) = w_{kin}(0) + w_{pot}(0). \quad (5.4)$$

すなわち、振子の全エネルギーは時間 t に無関係に一定である。式 (5.4) は弾性体の場合の (4.18) に対応する。

外力 $f(t)$ が作用している場合の単振子の運動方程式は、(5.1) の代りに、次のように表わされる：

$$m\ddot{u} + r\dot{u} + su = f(t). \quad (5.5)$$

上式を $u(t)$ について $t=0$ から t まで積分すると、(5.3) の代りに、次式が得られる：

$$[w_{kin}(t) + w_{pot}(t)]_0^t = Q + W_1. \quad (5.6)$$

ただし、

$$W_1 \equiv \int_0^t f(t) \dot{u} dt \quad (5.7)$$

は外力により振子に与えられるエネルギーであって、(5.6) は (1.18) に似た内容を持つ。

さて、どのような外力が作用しても、かならず自由振動が誘起されるので、変位 u を自由振動項 u_0 と強制振動項 u_1 とに分けると、(5.5) の解は次のように表わされる：

$$u(t) = u_0(t) + u_1(t). \quad (5.8)$$

ただし、

$$2\varepsilon = r/m, \quad n^2 = s/m, \quad \gamma = (n^2 - \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} \quad (5.9)$$

とおき、 Γ_1, Γ_2 を t に無関係な定数とすると、

$$u_1(t) = e^{-\varepsilon t} (\Gamma_1 \cos \gamma t + \Gamma_2 \sin \gamma t). \quad (5.10)$$

次に、

$$f(t) = f \sin \omega t \quad (5.11)$$

と仮定し、

$$\tan \delta = 2\varepsilon\omega / (n^2 - \omega^2)$$

とおくと、

$$u_{\parallel}(t) = (f/m) \{n^2 - \omega^2\}^{-\frac{1}{2}} \sin(\omega t - \delta). \quad (5.12)$$

しかるに、(5.1)~(5.3) により

$$\begin{aligned} [w_{kin}(u_{\parallel}) + w_{pot}(u_{\parallel})]_0^t &= \frac{1}{2} [m\dot{u}_{\parallel}^2 + s u_{\parallel}^2]_0^t \\ &= - \int_0^t r \dot{u}_{\parallel}^2 dt \equiv Q(u_{\parallel}). \end{aligned} \quad (5.13)$$

一方、(5.12) を用いると、

$$[w_{kin}(u_{\parallel}) + w_{pot}(u_{\parallel})]_0^{2\pi/\omega} = \frac{1}{2} [m\dot{u}_{\parallel}^2 + s u_{\parallel}^2]_0^{2\pi/\omega} = 0 \quad (5.14)$$

及び

$$-Q(u_{\parallel}) \equiv \int_0^{2\pi/\omega} r \dot{u}_{\parallel}^2 dt = \frac{1}{m} \cdot \frac{2\pi\varepsilon\omega f^2}{(n^2 - \omega^2)^2 + 4\varepsilon^2\omega^2} = \int_0^{2\pi/\omega} f(t) \dot{u}_{\parallel} dt. \quad (5.15)$$

式 (5.13) は自由振動 u_{\parallel} のエネルギー収支であり、(5.14)、(5.15) は強制振動 u_{\parallel} のエネルギー収支として知られている (坪井, 1942)。

式 (5.15) は (4.16) に、(5.14) は (4.17) に対応し、(5.13) は $f=0$ の場合の (1.18) に対応するかのように見える。ただし、自由振動、強制振動に対応すべき自由波、強制波の意義は明瞭でない。

このことはさておき、(5.8) を (5.6)、(5.7) に代入し、(5.13)~(5.15) を用い、さらに

$$\begin{aligned} w_{kin}(u_{\parallel}, u_{\perp}) &\equiv \frac{m}{2} \dot{u}_{\parallel} \dot{u}_{\perp}, \quad w_{pot}(u_{\parallel}, u_{\perp}) \equiv \frac{s}{2} u_{\parallel} u_{\perp}, \\ Q(u_{\parallel}, u_{\perp}) &\equiv - \int_0^{2\pi/\omega} r \dot{u}_{\parallel} \dot{u}_{\perp} dt \end{aligned} \quad (5.16)$$

とおくと、

$$[w_{kin}(u_{\parallel}, u_{\perp}) + w_{pot}(u_{\parallel}, u_{\perp})]_0^{2\pi/\omega} = Q(u_{\parallel}, u_{\perp}) + \int_0^{2\pi/\omega} f(t) \dot{u}_{\parallel} dt. \quad (5.17)$$

上式は u_{\parallel} と u_{\perp} との coupling 運動のエネルギー収支を表わすと解釈され、やはり (1.18) の内容の1部であると思われるが、各項の物理学的内容は複雑である。coupling 運動が生じるのは (5.8) により、

$$u^2(t) = u_{\parallel}^2 + u_{\perp}^2 + 2u_{\parallel} u_{\perp}$$

なので、 $u_{\parallel} u_{\perp}$ の項を生じることに帰因する。純粋な自由振動及び強制振動のみに関心を持つ場合は、(1.18) からあらかじめ (5.17) を差し引いた残りの (5.13)~(5.15) のみを論じればよい。

次に (5.11) の代わりに、デルタ関数を用い、

$$f(t) = M\delta(t) \quad (5.18)$$

とおくと、 $t > 0$ の場合は (A3) により

$$\int_0^t \delta(t) dt = \lim_{A \rightarrow 0} \int_0^{A/2} \frac{1}{A} dt = 1/2$$

なので (MORSE and FESHBACH, 1953), (5.7), (A11) により

$$W_1 = M \int_0^t \dot{u}(\tau) \delta(\tau) d\tau = \frac{1}{2} M \dot{u}(0).$$

これが (5.18) により外部から振子に与えられるエネルギーである。しかるに M は運動量なので、運動量保存則によると、

$$m\dot{u}(0) = M. \quad (5.19)$$

$$\therefore W_1 = \frac{1}{2} m\dot{u}^2(0) = w_{kin}(0). \quad (5.20)$$

このように、(5.18) のような瞬間力が与えられると、運動量保存則によってエネルギーの授受が行われる。

$$t=0 \text{ において } u(t)=0$$

の場合は (5.6) は次のようになる：

$$w_{kin}(t) + w_{pot}(t) = Q + w_{kin}(0). \quad (5.21)$$

さて、

$$t \leq 0 \text{ において } u(t)=0 \quad (5.22)$$

とすると、 $t > 0$ の $u(t)$ のみが問題になる。しかるに、 $t > 0$ においては (5.18) により $f(t)=0$ なので、(5.10) と (5.22) とにより

$$u(t) = u_1(t) = \Gamma_2 e^{-\epsilon t} \sin \gamma t.$$

さらに (5.19) を用いて Γ_2 を決めると、次の結果が得られる：

$$u(t) = \frac{M}{m\gamma} e^{-\epsilon t} \sin \gamma t; t > 0. \quad (5.23)$$

この解は $t > 0$ の場合を基本にして求められたにもかかわらず、初期条件 (5.19), (5.22) を満たすので、(5.23) の不等号の他に等号を書き足すことができる。そこで、式 (A5) によって定義される unit step function $H(t)$ を用いると、解 (5.23) は次のように表わされる：

$$u(t) = \frac{M}{m\gamma} H(t) e^{-\epsilon t} \sin \gamma t. \quad (5.24)$$

この式は (5.22) の不等号をも満たす。(5.24) が (5.5) と (5.19) を満たすことを確かめるために、(5.24) を t について微分し、(A6) を参照すると、

$$\dot{u}(t) = \frac{M}{m\gamma} e^{-\epsilon t} \{H(t)(-\epsilon \sin \gamma t + \gamma \cos \gamma t) + \delta(t) \sin \gamma t\}. \quad (5.25)$$

ここで (A 8) を参照すると,

$$\dot{u}(0) = \frac{M}{m} [H(t) + t\delta(t)]_{t=0} = \frac{M}{m}.$$

ゆえに (5.24) は初期条件 $u(0)=0$ の他に (5.19) を満たしている.

さらに (5.25) を t について微分し, (A14) を参照すると,

$$\begin{aligned} \ddot{u}(t) &= \frac{M}{m\gamma} e^{-\epsilon t} [H(t)\{-2\gamma\epsilon \cos \gamma t - (\gamma^2 - \epsilon^2) \sin \gamma t\} \\ &\quad + \delta(t)\{2\gamma \cos \gamma t - 2\epsilon \sin \gamma t - \frac{\sin \gamma t}{t}\}]. \end{aligned} \quad (5.26)$$

そこで (5.24)~(5.26) を (5.5) の左辺に代入すると, $H(t)$ を係数に持つ項の和は 0 である. これに反し $\delta(t)$ を係数に持つ項の和は (5.18) により, 次のようになる:

$$\begin{aligned} M\delta(t)e^{-\epsilon t}(2\cos\gamma t - \frac{1}{\gamma t}\sin\gamma t) \\ = M\delta(t)[e^{-\epsilon t}(2\cos\gamma t - \frac{1}{\gamma t}\sin\gamma t)]_{t=0} \\ = M\delta(t) = f(t). \end{aligned}$$

ゆえに (5.24) は (5.5) の解である.

さて, 計算を簡単にするために, (5.24) の代りに $t \geq 0$ の条件付で解 (5.23) を用いると,

$$w_{pot}(t) \equiv \frac{s}{2} u^2(t) = \frac{M^2}{2m\gamma^2} e^{-2\epsilon t} \frac{n^2}{2} (1 - \cos 2\gamma t), \quad (5.27)$$

$$\dot{u}(t) = \frac{M}{m\gamma} e^{-\epsilon t} (-\epsilon \sin \gamma t + \gamma \cos \gamma t).$$

$$\therefore \dot{u}^2(t) = \frac{M^2}{m^2\gamma^2} e^{-2\epsilon t} \left\{ \frac{n^2}{2} + \frac{1}{2}(\gamma^2 - \epsilon^2) \cos 2\gamma t - \epsilon\gamma \sin 2\gamma t \right\}.$$

$$\therefore w_{kin}(t) \equiv \frac{m}{2} \dot{u}^2(t) = \frac{M^2}{2m\gamma^2} e^{-2\epsilon t} \left\{ \frac{n^2}{2} + \frac{1}{2}(\gamma^2 - \epsilon^2) \cos 2\gamma t - \epsilon\gamma \sin 2\gamma t \right\}. \quad (5.28)$$

$$\therefore w_{kin}(t) + w_{pot}(t) = \frac{M^2}{2m\gamma^2} e^{-2\epsilon t} \{n^2 - \epsilon(\epsilon \cos 2\gamma t + \gamma \sin 2\gamma t)\}.$$

一方,

$$\begin{aligned} -Q(t) &\equiv r \int_0^t \dot{u}^2(t) dt = 4\epsilon \int_0^t w_{kin}(t) dt \\ &= \frac{M^2}{2m} - \frac{M^2}{2m\gamma^2} e^{-2\epsilon t} \{n^2 - \epsilon(\epsilon \cos 2\gamma t + \gamma \sin 2\gamma t)\}. \end{aligned}$$

ゆえに, (5.19), (5.20) を参照することにより

$$w_{kin}(t) + w_{pot}(t) = w_{kin}(0) + Q(t); t \geq 0.$$

今は $w_{pot}(0) = 0$ なので, 上式は (5.3) と同じ内容である. ただし $W_1 \neq 0$ なので (5.6) とむじゅんするかのように思われるが, $\partial W_1 / \partial t = 0$ なので, W_1 は実は (5.6) の左辺の増減に関与していない. ゆえに (5.18) のような外力によっては (5.24) のように強制振動は生じない. $t=0$ において W_1 から $w_{kin}(0)$ へのエネルギーの変換が行われる, と解釈される. 強制振動が生じないことは次の計算によっても確かめられる.

一般に, (5.5) の解は (5.8) のように分けられ, その中の自由振動項 u_1 は (5.10) により, また強制振動項 u_n は次式によって表わされることが知られている (萩原, 1945):

$$u_n(t) = \frac{1}{m\gamma} e^{-\epsilon t} \left\{ -\cos \gamma t \int f(t) e^{\epsilon t} \sin \gamma t dt + \sin \gamma t \int f(t) e^{\epsilon t} \cos \gamma t dt \right\}. \quad (5.29)$$

しかるに (5.29) に (5.18) を代入し, c_1, c_2 を t に無関係な定数とすると, $t \geq 0$ の時は (A12) により,

$$\int \delta(t) e^{\epsilon t} \sin \gamma t dt = \int_0^t \delta(t) e^{\epsilon t} \sin \gamma t dt + c_1 = c_1,$$

$$\int \delta(t) e^{\epsilon t} \cos \gamma t dt = \frac{1}{2} + c_2.$$

$$\therefore u_n(t) = \frac{M}{m\gamma} e^{-\epsilon t} \left\{ -c_1 \cos \gamma t + \left(\frac{1}{2} + c_2 \right) \sin \gamma t \right\}.$$

これは (5.10) の自由振動 $u_1(t)$ と同じ内容である. すなわち, (5.18) に対しては (5.29) は何等の積極的意味を持たない.

今度は (A5) の unit step function を用い

$$f(t) = fH(t) \quad (5.30)$$

とおくと, この運動量は

$$\int_{-\infty}^t f(t) dt = f \int_0^t H(t) dt = f \left\{ [tH(t)]_0^t - \int_0^t t \delta(t) dt \right\} = ftH(t). \quad (5.31)$$

ゆえに $t=0$ における運動量は 0 である.

$$\therefore \dot{u}(0) = 0. \quad (5.32)$$

しかるに,

$$\int e^{\epsilon t} \sin \gamma t dt = n^{-2} e^{\epsilon t} (\epsilon \sin \gamma t - \gamma \cos \gamma t),$$

$$\int e^{\epsilon t} \cos \gamma t dt = n^{-2} e^{\epsilon t} (\epsilon \cos \gamma t + \gamma \sin \gamma t).$$

ゆえに (5.30) を (5.29) に代入し, (A13) を参照し, c_1, c_2 を定数とすると,

$$u_n(t) = \frac{f}{m\gamma} \left\{ \frac{\gamma H(t)}{n^2} + e^{-\epsilon t} (-c_1 \cos \gamma t + c_2 \sin \gamma t) \right\}.$$

上式右辺の $\exp(-\varepsilon t)$ を係数に持つ項は自由振動 $u_1(t)$ と同じ内容である。ゆえに (5.8) に (5.10) と上式とを代入した式を次のように表わしてもよい：

$$u(t) = \{f s^{-1} + e^{-\varepsilon t} (\Gamma_1 \cos \gamma t + \Gamma_2 \sin \gamma t)\} H(t).$$

まず $u(0) = 0$ とすると、 $H(0) \neq 0$ なので $\Gamma_1 = -f s^{-1}$ すると、

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) = & H(t) e^{-\varepsilon t} \{(\varepsilon f s^{-1} + \gamma \Gamma_2) \cos \gamma t + (\gamma f s^{-1} - \varepsilon \Gamma_2) \sin \gamma t\} \\ & + \delta(t) \{f s^{-1} + e^{-\varepsilon t} (-f s^{-1} \cos \gamma t + \Gamma_2 \sin \gamma t)\}. \end{aligned}$$

ここで (5.32) を用いると、 $\delta(t \neq 0) = 0$ および

$$\lim_{t \rightarrow 0} \delta(t) (1 - \cos \gamma t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \frac{\gamma^2 t^2}{2} = 0$$

なので、上式の $\delta(t)$ を係数に持つ項は常に 0 である。

$$\therefore \Gamma_2 = -\varepsilon f s^{-1} / \gamma.$$

$$\therefore u(t) = f s^{-1} H(t) \{1 - e^{-\varepsilon t} (\cos \gamma t + \varepsilon \gamma^{-1} \sin \gamma t)\},$$

$$\dot{u}(t) = f (m\gamma)^{-1} H(t) e^{-\varepsilon t} \sin \gamma t. \quad (5.33)$$

$$\therefore W_1 = \int_0^t f(t) \dot{u}(t) dt = f \int_0^t H(t) \dot{u}(t) dt$$

$$= f \{ [H(t) u(t)]_0^t - \int_0^t \delta(t) u(t) dt \} = f H(t) u(t). \quad (5.34)$$

これが (5.30) によって振子に与えられるエネルギーである。

式 (5.2), (5.3), (5.34) に (5.33) を代入すると次の結果が得られる：

$$w_{kin}(t) + w_{pot}(t) = Q + W_1.$$

仮定 (5.11) の代りに

$$f(t) = f H(t) \sin \omega t \quad (5.35)$$

とすると、この運動量は

$$\int_{-\infty}^t f(t) dt = f \left\{ -H(t) \frac{\cos \omega t}{\omega} + \int_{-\infty}^t \frac{\cos \omega t}{\omega} \delta(t) dt \right\}$$

$$= \begin{cases} 0; & t=0 \\ f \omega^{-1} \{1 - H(t) \cos \omega t\}; & t>0 \end{cases} = f \omega^{-1} (1 - \cos \omega t).$$

$$\therefore \dot{u}(0) = 0.$$

仮定 (5.11) の場合は

$$\int_{-\infty}^t f(t) dt = -f \omega^{-1} \cos \omega t + \text{constant}.$$

$$\therefore m\dot{u}(0) = -f \omega^{-1} + \text{constant}.$$

しかるに上式の constant は t に無関係な不定定数なので、 $\dot{u}(0)$ は任意な値を持つことができる。この点が (5.11) と他の (5.18), (5.30), (5.35) と異なる。

VI. 平面を通過する円筒 SH 波のエネルギー流量

SH 波の変位 v は波動方程式

$$\ddot{v} = v_s^2 \nabla^2 v \quad (6.1)$$

の解なので、円筒座標 (r, θ, y) を用い、 $\partial v / \partial \theta = 0$ とすると、座標の原点に置かれた線振源から発射される SH 波の変位は次のように表わされる：

$$v(t, r) = A\pi H_0^{(1)}(kr) e^{-i\omega t}; \quad k = \omega/v_s. \quad (6.2)$$

上式の $H_0^{(1)}(kr)$ はハンケルの第 1 種第 0 次関数で、(6.1) から導びかれるベッセルの微分方程式の解に他ならない。

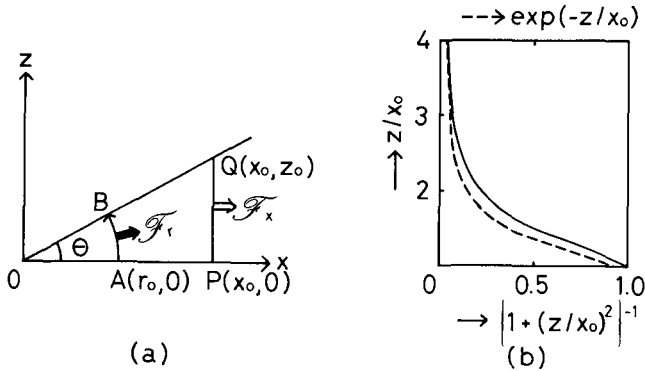


Fig. 6.1 Comparison of the energy flow passing through the arc to that through the straight line of a finite length.

さて (1.22) によると、図 6.1 (a) の境界面 OABO を通過するエネルギー流量 (rate of energy flow) は次のように表わされる：

$$\iint_S n_i \bar{p}_j dS = \int_0^{y_0} dy \left\{ \int_0^A \bar{p}_\theta dr + \int_A^B \bar{p}_r r d\theta + \int_B^O \bar{p}_\theta dr \right\};$$

$$p_j = \tau_{ij} \dot{u}_i. \quad (6.3)$$

しかるに、 $\partial v / \partial \theta = 0$ なので $p_\theta = 0$ 。ゆえに、

$$\mathcal{F}_r \equiv \iint_S n_j \bar{p}_j dS = y_0 \int_0^O \bar{p}_r d\theta;$$

$$\bar{p}_r = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} p_r dt, \quad p_r = \mu \frac{\partial v}{\partial r} \dot{v}. \quad (6.4)$$

次に、 v^* を v の共軛複素数とすると、

$$Re v = \frac{1}{2}(v + v^*).$$

しかも、

$$\{H_0^{(1)}(kr)\}^* = H_0^{(2)}(kr)$$

なので、 A を実数とすると、(6.2) の実数部は次のように表わされる：

$$Re v = \frac{1}{2} A \pi \{H_0^{(1)}(kr) e^{-i\omega t} + H_0^{(2)}(kr) e^{i\omega t}\}.$$

$$\therefore Re \dot{v} = -\frac{i}{2} A \pi \omega \{H_0^{(1)}(kr) e^{-i\omega t} - H_0^{(2)}(kr) e^{i\omega t}\},$$

$$Re \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{2} A \pi \left\{ \frac{dH_0^{(1)}}{dr} e^{-i\omega t} + \frac{dH_0^{(2)}}{dr} e^{i\omega t} \right\}.$$

これらを (6.4) の p_r に代入すると、

$$\bar{p}_r = -\frac{i}{4} A^2 \pi^2 \mu \omega \left\{ H_0^{(1)} \frac{dH_0^{(2)}}{dr} - H_0^{(2)} \frac{dH_0^{(1)}}{dr} \right\}.$$

しかるに Wronskian (MORSE and FESHBACH, 1953) を用いると、一般に

$$A(H_0^{(1)}(\zeta), H_0^{(2)}(\zeta)) \equiv H_0^{(1)} \frac{dH_0^{(2)}}{d\zeta} - H_0^{(2)} \frac{dH_0^{(1)}}{d\zeta} = \frac{4}{\pi i \zeta}. \quad (6.5)$$

$$\therefore \bar{p}_r = -A^2 \pi \mu \omega r^{-1} \quad (6.6)$$

$$\therefore \mathcal{F}_r = -\textcircled{f} \theta; \quad \textcircled{f} = y_0 A^2 \pi \mu \omega. \quad (6.7)$$

次に図 6.1 (a) の境界平面 \overline{PQ} を通過するエネルギー流量を考えると、この面に垂直なエネルギー流量密度は

$$p_x = \mu \frac{\partial v}{\partial x} \dot{v} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} \right) \dot{v} = p_r \frac{x}{r}; \quad r = (x^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \quad (6.8)$$

であり、 \overline{PQ} 面を通過するエネルギー流量は

$$\mathcal{F}_x \equiv \int_0^{y_0} dy \int_0^{z_0} [\bar{p}_x]_{x=x_0} dz. \quad (6.9)$$

ゆえに、(6.6)~(6.8) を (6.9) に代入すると、

$$\mathcal{F}_x = -\textcircled{f} \int_0^{z_0} \frac{x_0}{z^2 + x_0^2} dz.$$

しかるに積分公式によると、

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctan} \left(\frac{x}{a} \right) \quad (6.10)$$

なので、

$$\mathcal{F}_x = -\textcircled{f} \text{ argtan}(z_0/x_0) = -\textcircled{f} \theta. \quad (6.11)$$

ゆえに、(6.7) と (6.11) とを比較すると、

$$\mathcal{F}_x = \mathcal{F}_r.$$

すなわち図6.1(a)の円弧 AB を通過するエネルギー流量は x 軸に垂直な線分 PQ を通過するエネルギー流量に完全に保存される。

なお、(6.6)~(6.8) によると、 $x=x_0$ 平面上のエネルギー流量密度の1周期間の平均値は

$$[\bar{p}_x]_{x=x_0} = -(y_0 x_0)^{-1} \textcircled{f} \{1 + (z/x_0)^2\}^{-1}. \quad (6.12)$$

これは z/x_0 の増加と共に図6.1(b)の実線のように、 $z/x_0=1$ に変曲点を持ち、急激に減少する。この減少曲線は点線の $\exp(-z/x_0)$ に近い。

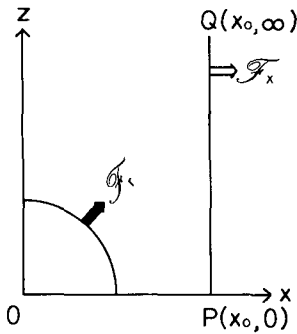


Fig. 6.2 The partition of all energy flows in the first quadrant.

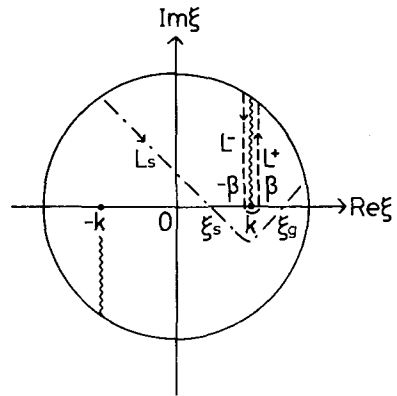


Fig. 6.3 One of the fundamental path of the line integration.

図6.2のように $\theta = \pi/2$ とすると、第1象限内の円筒波のエネルギー流量は全部 x 軸に垂直な半直線 PQ を通過するエネルギー流量に保存される。

次に、円筒波を平面波から合成する式

$$\pi H_0^{(1)}(kr) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\xi x + \beta |z|)} \frac{d\xi}{\beta}; \quad \beta = (k^2 - \xi^2)^{1/2} \quad (6.13)$$

を用いて、(6.2) を次のように表わす：

$$v(t, x, z) = A \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\xi x + \beta |z| - \omega t)} \frac{d\xi}{\beta}. \quad (6.14)$$

上式の被積分関数の中にさらに別な ξ の関数が含まれていると、一般には厳密な解析解は求められないので、 ξ の複素平面上において積分の近以評価を行うことになる。ゆえに、ここでもあえてその方法による近以評価を行ってみる。

式(6.14)の被積分関数は $\xi = \pm k$ に2個の分岐点を持つので、図6.3の波型線のように、ここ

から虚軸に平行な割目を入れてリーマン面を作る。線積分路は図の上半円によって閉じるように選ぶので、 $\xi = -k$ の方は無関係である。さらに、積分を収斂させるために、

$$\text{Im } \beta > 0 \quad (6.15)$$

のリーマン面上において積分の評価を行う。すると、図6.3の半径無限大の上半円周上の線積分値は0なので、コーシイの積分定理により、(6.14)の積分路は図の点線のように変更される：

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi = \int_{L^-} -d\xi + \int_{L^+} +d\xi. \quad (6.16)$$

しかも L^+ 路上と L^- 路上とでは β の符号を逆転させなければならない。ここでは L^- 路上の β の符号を負とする。さて、 $\xi \equiv \text{Im } \xi$ と略記すると、この積分路上においては

$$\xi = k + i\tilde{\xi} \quad (6.17)$$

なので、これを(6.16)に代入すると、

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\tilde{\xi}x + \beta|z|)} \frac{d\xi}{\beta} = 2ie^{ikhx} \int_0^{\infty} e^{-\tilde{\xi}x} \cos \beta z \frac{d\tilde{\xi}}{\beta}. \quad (6.18)$$

しかるに、この積分路上においては

$$\beta = \{k^2 - (k + i\tilde{\xi})^2\}^{\frac{1}{2}} \approx (-2ik\tilde{\xi})^{\frac{1}{2}}. \quad (6.19)$$

$$\therefore (6.18) \approx \frac{2ie^{ikhx}}{(-2ik)^{\frac{1}{2}}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\tilde{\xi}x}}{\tilde{\xi}^{\frac{1}{2}}} \cos \{(-2ik\tilde{\xi})^{\frac{1}{2}}z\} d\tilde{\xi}. \quad (6.20)$$

こうすると、積分公式

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax}}{x^{\frac{1}{2}}} \cos (bx^{\frac{1}{2}}) dx = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{b^2}{4a}}; a > 0 \quad (6.21)$$

が使えるので、(6.20)の積分記号部は次のようになる：

$$\int_0^{\infty} d\tilde{\xi} = \left(\frac{\pi}{x}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}ikhz^2/x}.$$

ゆえに、これと(6.20)と(6.18)とを(6.14)に代入すると、

$$v(t, x, z) \approx A \sqrt{\frac{2\pi}{kx}} e^{i(kx(1+z^2/2x^2) - \pi/4 - \omega t)}. \quad (6.22)$$

近以(6.19)はかなり乱暴なので(6.22)の近似もあまりよくない。しかし、こうしないと(6.16)の積分路による解を求めることはむずかしい。

ゆえに今度は(6.14)を最しゅん降下法によって評価してみる。そのために

$$f(\xi) = i(\xi x + \beta|z|)$$

とおくと、

$$f'(\xi) = i(x - |z|\xi/\beta), \quad f''(\xi) = -i|z|k^2/\beta^3.$$

まずサドル・ポイント ξ_s を

$$f'(\xi_s) = 0$$

によって求めると、

$$\xi_s = \pm kx/r. \quad (6.23)$$

ただし図6.3において問題になるのは ξ_s の正の値だけである。 ξ_s が与えられると、

$$\beta(\xi_s) = k|z|/r, \quad f(\xi_s) = ikr, \quad f''(\xi_s) = -ir^3/(kz^2).$$

これらの諸量を用い、 $\bar{\xi} = \text{Re}\xi$, $\hat{\xi} = \text{Im}\xi$ と略記し、 $f(\xi)$ を ξ_s 近傍においてテーラー展開すると、

$$\begin{aligned} f(\xi) &\approx f(\xi_s) + \frac{1}{2}(\xi - \xi_s)^2 f''(\xi_s) + \dots \\ &= f(\xi_s) + \hat{\xi}(\bar{\xi} - \xi_s) \frac{r^3}{kz^2} - \frac{i}{2} \frac{r^3}{kz^2} \{(\bar{\xi} - \xi_s)^2 - \hat{\xi}^2\} + \dots \end{aligned}$$

しかるに ξ_s を通る最しゅん降下路は次式によって与えられる：

$$\text{Im}\{f(\xi) - f(\xi_s)\} = 0; \quad \text{Re}f(\xi) < 0. \quad (6.24)$$

ゆえに ξ_s 近傍の最しゅん降下路は

$$\bar{\xi} - \xi_s \approx -\hat{\xi}. \quad (6.25)$$

一方、(6.24) と ξ の実軸との ξ_s 以外の交点 ξ_q を求めると、 $\text{Im}\{f(\xi_q) - f(\xi_s)\} = 0$ により

$$\xi_q = kr/x. \quad (6.26)$$

今度は $f(\xi)$ を ξ_q 近傍においてテーラー展開すると、 ξ_q 近傍の最しゅん降下路は

$$(\bar{\xi} - \xi_q)/r \approx \hat{\xi}/x. \quad (6.27)$$

以上の考察によると、 x が 0 から大きくなるにつれて、 ξ_s は 0 から k に近づき、 ξ_q は実軸上を ∞ から k に近づく。そして、最しゅん降下の積分路のあらまはは図6.3の鎖線のようになる。

ふたたびサドル・ポイント ξ_s に着目すると、積分路 (6.25) 上においては

$$d\xi \approx -\sqrt{2} e^{-i\pi/4} d\hat{\xi}.$$

ゆえに (6.14) の右辺は次のようになる：

$$v(t, x, z) \approx A e^{-i\omega t} 2\sqrt{2} \frac{r}{k|z|} e^{i(kr - \pi/4)} \int_0^\infty e^{-\frac{r^3}{kz^2} \hat{\xi}^2} d\hat{\xi}.$$

ゆえに積分公式

$$\int_0^\infty e^{-a^2 x^2} dx = \sqrt{\pi}/(2a); \quad a > 0 \quad (6.27)$$

を用いると

$$v(t, x, z) \approx A \sqrt{\frac{2\pi}{kr}} e^{i(kr - \pi/4 - \omega t)}. \quad (6.28)$$

ここで (6.22) と (6.28) とを比較してみると,

$$r \approx x \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{x} \right)^2 \left\{ 1 - \left(\frac{z}{2x} \right) \right\}^2 \right], \quad r^{-\frac{1}{2}} \approx x^{-\frac{1}{2}} \left\{ 1 - \left(\frac{z}{2x} \right)^2 \right\}$$

なので, $\{z/(2x)\}^2 \ll 1$ であれば両者は一致する. さらに

$$H_0^{(1)}(\xi) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\xi}} e^{i(\xi - \pi/4)} \left\{ 1 - \frac{i}{8\xi} + O(\xi^{-2}) \right\} \quad (6.29)$$

なので, $kr \gg 1$ であれば (6.28) は厳密解 (6.2) と一致する. 図6.3から判るように, 本来は

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi = \int_{L^-} d\xi + \int_{L^+} d\xi = \int_{L_s} d\xi.$$

しかるに (6.22) と (6.28) とが一致しないのは近似の違いによる. 解 (6.28) は観測点 (x, z) の方位に無関係であるのに対し, 解 (6.22) は観測点の方位 $|z|/x$ によって変化する. この点において (6.22) の方が (6.28) よりも (6.2) との違いが大きい.

まず (6.28) を用いて (6.9) の \bar{p}_x を算出してみる.

すると,

$$\begin{aligned} Re v &\approx A \sqrt{\frac{2\pi}{kr}} \cos(kr - \pi/4 - \omega t), \\ Re \dot{v} &\approx A \omega \sqrt{\frac{2\pi}{kr}} \sin(kr - \pi/4 - \omega t), \\ Re \frac{\partial v}{\partial x} &\approx -A \sqrt{\frac{2\pi}{kr}} \frac{x}{r} \left\{ \frac{1}{2r} \cos(kr - \pi/4 - \omega t) + k \sin(kr - \pi/4 - \omega t) \right\}. \\ \therefore \bar{p}_x &\approx -A^2 \pi \mu \omega \frac{x}{r^2} = \bar{p}_r \frac{x}{r}. \end{aligned} \quad (6.30)$$

これは (6.8) の $\bar{p}_x = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} p_x dt$ に等しい.

ゆえに, 近似解 (6.28) を用いても厳密な答 (6.11) が得られることが判った.

次に近似解 (6.22) を用いてみると,

$$Re v \approx A \sqrt{\frac{2\pi}{kx}} \cos \left\{ kx \left(1 + \frac{z^2}{2x^2} \right) - \frac{\pi}{4} - \omega t \right\}$$

なので,

$$\begin{aligned} [\bar{p}_x]_{x=x_0} &\approx -A^2 \pi \mu \omega \frac{1}{x_0} \left(1 - \frac{z^2}{2x_0^2} \right) \\ \therefore \mathcal{F}_x &\approx -\textcircled{f} \tan \theta \left(1 - \frac{1}{6} \tan^2 \theta \right) \end{aligned} \quad (6.31)$$

ゆえに $\theta \approx 0$ の場合は (6.31) は (6.11) に一致するが, θ が大きくなるにつれて両者の違いが大きくなる. $\theta = \pi/2$ においては (6.31) は無限大になり, 図6.2の有限の \mathcal{F}_r から無限大の \mathcal{F}_x

を生じるムジエンが起きる。ゆえに近似解 (6.22) は広範囲のエネルギー流量の計算に適さない。
 図6.4(a) の \overline{PQ} 面をこれに垂直に通過するエネルギー流量は

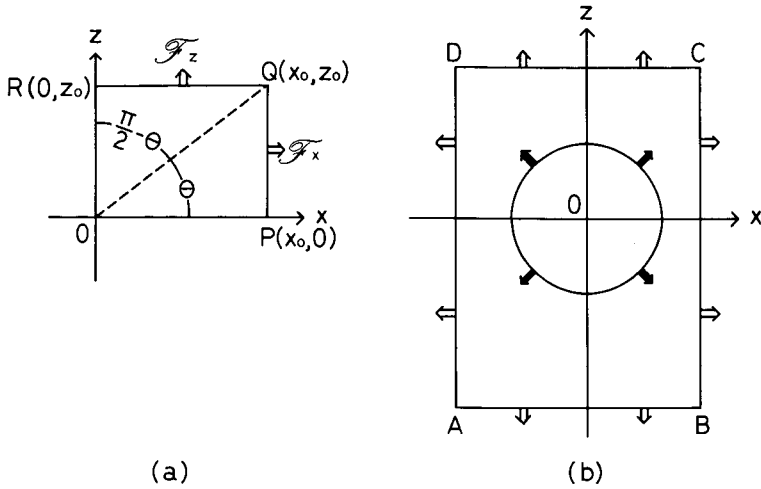


Fig. 6.4 Energy flows passing through planes which enclose a line source.

$$\mathcal{F}_x = -\textcircled{f}\theta. \tag{6.11again}$$

次に同図の \overline{RQ} 面をこれに垂直に通過するエネルギー流量は、上式の x_0 と z_0 とを交換すれば直ちに得られ、

$$\mathcal{F}_z = -\textcircled{f}\text{argtan}(x_0/z_0) = -\textcircled{f}(\pi/2 - \theta). \tag{6.32}$$

ゆえに図6.4(b)のように円筒が平面 \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} および \overline{PA} にかこまれていると、各平面を通過するエネルギー流量の和は

$$\iint_S n_i \bar{p}_j dS = \iint_{AB} \bar{p}_z dS + \iint_{BC} \bar{p}_x dS + \iint_{CD} \bar{p}_z dS + \iint_{DA} \bar{p}_x dS = -2\pi \textcircled{f}. \tag{6.33}$$

これは、(6.7) によると、

$$\mathcal{F}_r = \iint \bar{p}_r dS = -2\pi \textcircled{f}$$

に等しい。

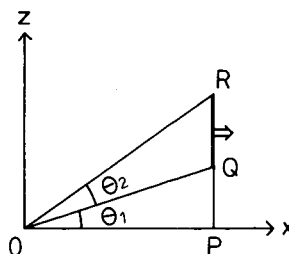


Fig. 6.5 The energy flow of cylindrical waves passing through an arbitrary plane,

さらに、図6.1と(6.11)によると、図6.5において

$$\begin{aligned} \iint_{PQ} \bar{p}_x dS &= -\theta_1 \textcircled{f}, \quad \iint_{PR} \bar{p}_x dS = -(\theta_1 + \theta_2) \textcircled{f}. \\ \therefore \iint_{QR} \bar{p}_x dS &= -\theta_2 \textcircled{f}. \end{aligned} \quad (6.34)$$

VII. 弾性板内のSH波のエネルギー流量

外力 $f(t, \mathbf{x})$ が作用する場合のSH波の運動方程式は次のように表わされる：

$$\ddot{v}(t, \mathbf{x}) = v_s^2 \nabla^2 v(t, \mathbf{x}) + \frac{1}{\rho} f(t, \mathbf{x}). \quad (7.1)$$

$$\text{点振源 } f(t, \mathbf{x}) = f(t) \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \quad (7.2)$$

に対する(7.1)の解は次のようになる：

$$v(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\rho v_s^2} \cdot \frac{1}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|} f\left(t - \frac{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|}{v_s}\right). \quad (7.3)$$

$x=0, z=E$ に y 軸方向の線振源がある場合は、(7.2)の代りに、

$$f(t, x, z) = f(t) \delta(x) \delta(z - E). \quad (7.4)$$

これに対する(7.1)の解は次のようになる (MORSE and FESHBACH, 1953; AKI and RICHARDS, 1980)：

$$\begin{aligned} v(t, x, z) &= \frac{1}{4\pi\rho v_s^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{R_3} f\left(t - \frac{R_3}{v_s}\right) dy : R_3 = (r^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}, \\ r^2 &= x^2 + (z - E)^2. \end{aligned} \quad (7.5)$$

ゆえに、(7.4)において

$$f(t) = f \exp(-i\omega t) \quad (7.6)$$

とすると、(7.5)は次のようになる：

$$v(t, x, z) = \frac{f}{2\pi\rho v_s^2} e^{-i\omega t} \int_r^{\infty} \frac{e^{ikR_3}}{(R_3^2 - r^2)^{\frac{1}{2}}} dR_3; \quad k = \frac{\omega}{v_s}.$$

さらに $R_3 = r\zeta$ と置き換えると、上式の積分記号部は次のようになる：

$$\int_r^{\infty} dR_3 = \int_1^{\infty} \frac{e^{ikr\zeta}}{(\zeta^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} d\zeta.$$

しかるにハンケル関数の積分表示を見ると (WATSON, 1922),

$$\left. \begin{aligned} H_0^{(1)}(a) \\ H_0^{(2)}(a) \end{aligned} \right\} = \pm \frac{2}{i\pi} \int_1^{\infty} \frac{e^{\pm ia\zeta}}{(\zeta^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} d\zeta. \quad (7.7)$$

$$\therefore v(t, x, z) = \frac{if}{4\rho v_s^2} H_0^{(1)}(kr) e^{-i\omega t}. \quad (7.8)$$

ゆえに

$$A\pi = if/(4\mu); v_s^2 = \mu/\rho \quad (7.9)$$

のように A を選ぶと, (7.8) と (6.2) とは一致する.

式 (7.7) において $\zeta = \cosh \phi$ とおくと,

$$2 \int_1^\infty \frac{e^{ikr\zeta}}{(\zeta^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} d\zeta = 2 \int_0^\infty e^{ikr \cosh \phi} d\phi = \int_{-\infty}^\infty e^{ikr \cosh \phi} d\phi.$$

さらに,

$$kr \cosh \phi = \xi x + \beta z; \beta^2 = k^2 - \xi^2, r^2 = x^2 + z^2$$

とおくと,

$$kr \sinh \phi d\phi = (\beta x - \xi z) d\xi / \beta.$$

しかるに

$$(kr \sinh \phi)^2 = -(\beta x - \xi z)^2 \quad \therefore d\phi = \pm i d\xi / \beta.$$

この正符号を選ぶと (7.7) と (6.13) とは完全に一致する.

さて, 直角座標の xz 面に垂直な線振源 (7.4), (7.6) によって発射される SH 波の変位は, (6.14) の $|z|$ を $|E-z|$ に書き変えることにより, 次のように表わされる:

$$\begin{aligned} v_{inc}(t, x, z) &= A\pi H_0^{(1)}(kr) e^{-i\omega t} \\ &= A \int_{-\infty}^\infty e^{i(\xi x \pm \beta(E-z) - \omega t)} \frac{d\xi}{\beta}; E-z \geq 0, r = \{x^2 + (E-z)^2\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (7.10)$$

しかるに $z=0$ および $z=H$ がいずれも自由表面の場合は, (7.10) によって, 弾性板の中に次のような反射波が生じる:

$$\begin{aligned} v_{ref}(t, x, z) &= A \int_{-\infty}^\infty e^{i(\xi x - \omega t)} \left\{ e^{i\beta(z+E)} + \frac{e^{2i\beta H}}{1 - e^{2i\beta H}} (e^{i\beta E} + e^{-i\beta E}) \right. \\ &\quad \left. \cdot (e^{i\beta z} + e^{-i\beta z}) \right\} \frac{d\xi}{\beta}. \end{aligned} \quad (7.11)$$

ゆえに板の中の SH 波の全変位は

$$v_{inc} + v_{ref} = iA \int_{-\infty}^\infty e^{i(\xi x - \omega t)} \operatorname{cosec} \beta H \{ \cos \beta(H - E - z) \}$$

$$+ \cos \beta(H - |E - z|) \frac{d\xi}{\beta}. \tag{7.12}$$

これらの積分を評価するための ξ の複素平面上には 2 価の分岐点 $\xi = \pm k$ の他に

$$M(\omega, \xi) \equiv 1 - e^{2i\beta H} = 0 \tag{7.13}$$

の根 $\xi = \pm x$ に極がある。特性方程式 (7.13) の根は、 n を整数とすると、 $\beta H = n\pi$ によって与えられるので、これを $\beta = (k^2 - \xi^2)^{\frac{1}{2}}$ に代入すると、

$$(kH)^2 - (xH)^2 = (n\pi)^2. \tag{7.14}$$

上式は図7.1のような等双曲線群によって表わされ、 $|x| \leq |k|$ である。ゆえに分岐点 k と極 x との ξ 平面上的位置関係は図7.2のようになる。

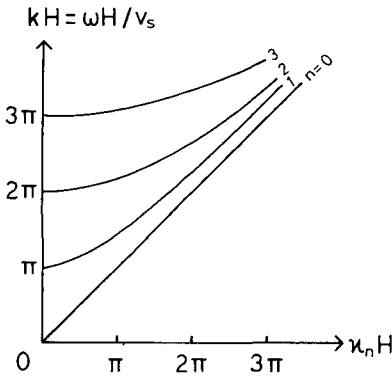


Fig. 7.1 The dispersion curves for SH waves within a plate.

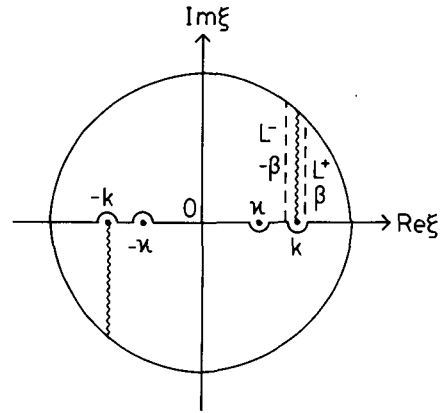


Fig. 7.2 Singular points and a path of integration on a Riemann sheet.

しかるに (7.12) の被積分関数は β に関して偶関数なので、図7.2の分岐線 L 沿いの線積分は 0 である。

$$\int_{L^-} d\xi + \int_{L^+} d\xi = 0. \tag{7.15}$$

$$\therefore v_{inc} + v_{ref} = iA \times 2\pi i \times \sum_n \text{residues}$$

$$= 4A\pi \sum_n \frac{1}{\chi_n H} e^{i(\kappa_n x - \omega t)} \cos\left(n\pi \frac{E}{H}\right) \cos\left(n\pi \frac{z}{H}\right);$$

$$\chi_n H = \{(kH)^2 - (n\pi)^2\}^{\frac{1}{2}}. \tag{7.16}$$

この解は、途中に近似計算を含んでいないので、厳密解である。ゆえに $x=0$ においても通用する。

さて、

$$v_i(t, x, z) \equiv v_{inc} + v_{ref}$$

と略記し, (7.16) の A の代りに (7.9) の f を用いると,

$$\operatorname{Re} v_i(t, x, z) = -\frac{f}{\mu} \sum_n \frac{1}{\chi_n H} \sin(\chi_n x - \omega t) \cos\left(n\pi \frac{E}{H}\right) \cos\left(n\pi \frac{z}{H}\right). \quad (7.17)$$

ゆえに, m, n を正の整数とすると, $x > 0$ 方向のエネルギー流量密度は次のように表わされる:

$$\begin{aligned} \bar{p}_x = & -\frac{f^2 \omega}{\mu H} \sum_m \frac{1}{\chi_m H} \cos(\chi_m x - \omega t) \cos\left(m\pi \frac{E}{H}\right) \cos\left(m\pi \frac{z}{H}\right) \\ & \cdot \sum_n \cos(\chi_n x - \omega t) \cos\left(n\pi \frac{E}{H}\right) \cos\left(n\pi \frac{z}{H}\right). \end{aligned}$$

しかるに,

$$\int_0^H \cos\left(m\pi \frac{z}{H}\right) \cos\left(n\pi \frac{z}{H}\right) dz = \begin{cases} 0; & m \neq n \\ H/2; & m = n, \end{cases}$$

$$\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \cos^2(\chi_n x - \omega t) dt = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore \mathcal{F}_x = y_0 \int_0^H \bar{p}_x dz = -y_0 \frac{f^2 \omega}{4\mu} \sum_n \frac{1}{\chi_n H} \cos^2\left(n\pi \frac{E}{H}\right). \quad (7.18)$$

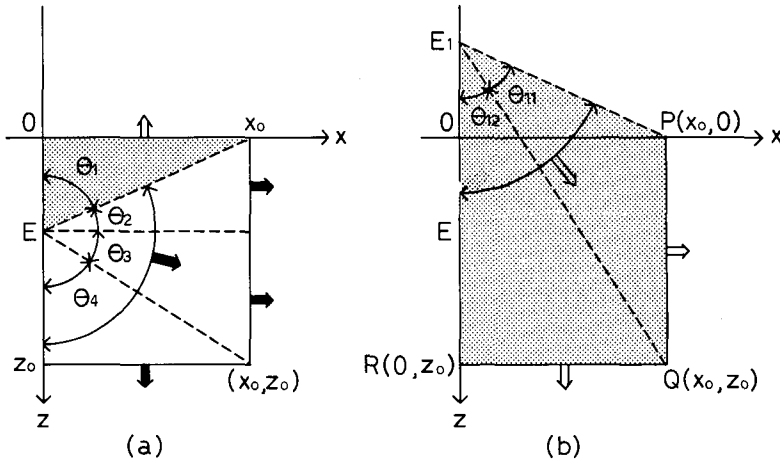


Fig. 7.3 Reflection of the energy flow of cylindrical SH waves on the free surface of a half space.

一方, 図7.3(a) の $x > 0$ 側の半円周を通過するエネルギー流量を, (6.7) の θ を π に, (f) を (f) に変えて,

次のようにおく:

$$\iint_S n_j \bar{p}_j dS = y_0 \int_0^\pi \bar{p}_r r d\theta = -\pi (f). \quad (7.19)$$

次に上式の左辺を $x = x_0, z = 0$ および $z = z_0$ 面を通過するエネルギー流量に分解すると,

$$\iint_S n_j \bar{p}_j dS = y_0 \left\{ \int_0^{z_0} [\bar{p}_x]_{x=x_0} dz + \int_0^{x_0} ([\bar{p}_z]_{z=0} + [\bar{p}_z]_{z=z_0}) dx \right\}. \quad (7.20)$$

しかるに、(6.11)、(6.32) を図7.3(a) にあてはめると、

$$y_0 \int_0^E [\bar{p}_x(\text{direct})]_{x=x_0} dz = -\theta_2 \textcircled{f}, \quad y_0 \int_0^{x_0} [\bar{p}_z(\text{direct})]_{z=0} dx = -\theta_1 \textcircled{f}; \quad E > z. \quad (7.21)$$

および

$$y_0 \int_E^{z_0} [\bar{p}_x]_{x=x_0} dz = -\theta_3 \textcircled{f}, \quad y_0 \int_0^{x_0} [\bar{p}_z]_{z=z_0} dx = -\theta_4 \textcircled{f}; \quad E < z. \quad (7.22)$$

ゆえに、(7.21)、(7.22) を (7.20) に代入すると、(7.20) の右辺は (7.19) の右辺に厳密に等しいことがわかる。

さらに、 $z=0$ を自由表面とすると、この面を通過するエネルギー流量

$$y_0 \int_0^{x_0} [\bar{p}_z]_{z=0} dx$$

は 0 になるべきである。このために $z=0$ 面からの反射波が生じるが、これは点 E の鏡像である図7.3(b)の点 E₁ を線振源とする無限媒質内の円筒波とみなされる。ゆえに、同図の \overline{PQ} および \overline{RQ} 面を通るエネルギー流量はそれぞれ

$$\begin{aligned} y_0 \int_0^{z_0} [\bar{p}_x(\text{ref})]_{x=x_0} dz &= -\theta_{11} \textcircled{f}, \\ y_0 \int_0^{x_0} [\bar{p}_z(\text{ref})]_{z=z_0} dx &= -\theta_{12} \textcircled{f}; \quad \theta_1 = \theta_{11} + \theta_{12}. \end{aligned} \quad (7.23)$$

すなわち、(7.21) の $-\theta_1 \textcircled{f}$ が自由表面 $z=0$ において反射され、(7.23) に変換されると解釈される。図7.3の黒矢印は直接波のエネルギー流量、白矢印は反射波のエネルギー流量を意味する。半無限媒質内には直接波と反射波とが共存するが、これらの波のエネルギー流量の総和は振源から発射された SH 波の全エネルギー流量に等しい。

今度は図7.4(a)のような厚さ H の弾性板内の点 E に xz 面に垂直な SH 波線振源があるとし、 $x=x_0$ 面を通過するエネルギー流量を算出しよう。まず点 E から $z=0$ 面へ向って発射された円筒 SH 波の振源の点 E に対する鏡像を、図7.4(a)のように、順次に $E_1, E_{12}, E_{122}, \dots$ とすると、これらの鏡像から発射され、 $x=x_0$ 面をこれに垂直に通過するエネルギー流量は、(7.23) の繰り返しにより、次のようになる：

$$[\mathcal{F}_x(\text{ref})]_{x=x_0} = -(\theta_{11} + \theta_{121} + \theta_{1221} + \dots) \textcircled{f} \longrightarrow -\theta_1 \textcircled{f}. \quad (7.24)$$

同様にして、点 E から $z=H$ 面へ向って発射された円筒 SH 波の振源の点 E に対する鏡像を、図7.4(b)のように、 $E_4, E_{42}, E_{422}, \dots$ とすると、

$$[\mathcal{F}_x(\text{ref})]_{x=x_0} = -(\theta_{41} + \theta_{421} + \theta_{4221} + \dots) \textcircled{f} \longrightarrow -\theta_4 \textcircled{f}. \quad (7.25)$$

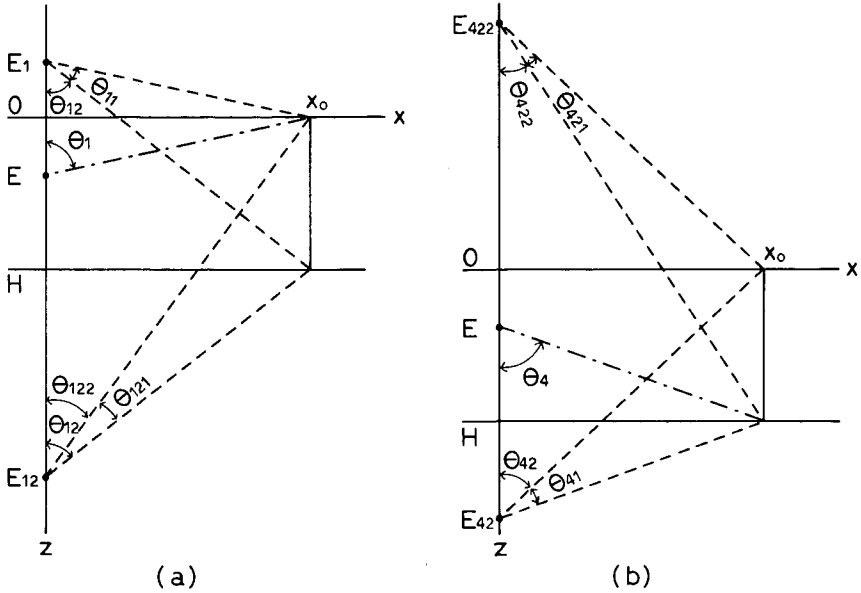


Fig. 7.4 Energy flows of SH waves within a plate.

しかるに、図7.3(a)に戻ると、

$$[\mathcal{F}_x(\text{direct})]_{x=x_0} = -(\pi - \theta_1 - \theta_4) \mathcal{E} \quad (7.24)$$

なので、(7.24)、(7.25)を参照すると

$$[\mathcal{F}_x(\text{direct}) + \mathcal{F}_x(\text{ref})]_{x=x_0} = -\pi \mathcal{E}. \quad (7.26)$$

これは(7.18)に他ならないが、同時にこれは線振源から $x > 0$ 側に発射されたエネルギー流量(7.19)に等しい。さらに、(4.16)と同様な関係が今の場合にも成立すべきなので、(7.18)は外力が板に与えるエネルギーの1周期間の平均値に等しいはずである。これを確かめるために、(7.4)、(7.6)をまとめて次のように表わす：

$$Re f(t, x, z) = f \cos \omega t \cdot \delta(x) \delta(z - E).$$

これと(7.17)とを用いると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_1(t)}{\partial t} &\equiv \iiint_V f(t, x, z) \dot{v}_t(t, x, z) dV = y_0 f \cos \omega t \cdot Re \dot{v}_t(t, 0, E) \\ &= y_0 \frac{f^2 \omega}{\mu} \cos^2 \omega t \sum_n \frac{1}{x_n H} \cos^2 \left(n\pi \frac{E}{H} \right). \\ \therefore \overline{W_1} &= y_0 \frac{f^2 \omega}{2\mu} \sum_n \frac{1}{x_n H} \cos^2 \left(n\pi \frac{E}{H} \right). \end{aligned} \quad (7.27)$$

ゆえに、 $x < 0$ 方向へのエネルギー流量をも考慮すると、(7.18)と(7.27)とから(4.16)と同様な関係が得られる：

$$2\mathcal{F}_x = \mathcal{F}_x + \mathcal{F}_{-x} = -\overline{W}_1. \tag{7.28}$$

式 (7.16) に戻り、留数の貢献を $2\pi i \times$ でなくて $\pi i \times$ にすると、(7.18) は f^2 の代りに $(f/2)^2$ に変わるのに反し、(7.27) は f^2 の代りに $f^2/2$ に変わる。すると (7.28) は成立しない。(7.28) には、(7.9) を介して、このような意義が含まれている。

図7.1においても見られるように、 $kH = n\pi$ の cutoff frequency において、 $x_n H = 0$ なので、(7.16) の右辺は単振子の変位 (B 8) と同じ意味の無限大になる。図7.1の各分散曲線上の任意の点と原点とを結ぶ直線の傾斜は v_s を単位とする位相速度 c であり、各曲線上の任意の点における切線の傾斜は v_s を単位とする群速度 U であって、

$$Uc = v_s^2. \tag{7.29}$$

ゆえに、 $n \neq 0$ で $x_n H = 0$ を与える cutoff frequency においては $c = \infty$, $U = 0$ 。又特性方程式 (7.14) は虚根を持つこともできる。しかし虚根を (7.16) に代入すると、変位波形は z 方向のみならず x 方向へも伝播しなくなる。いずれにせよ、 $U = 0$ であるとエネルギーは伝播しない。

超関数の利用

式 (7.11) の分母を展開すると、

$$(1 - e^{2i\beta H})^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} e^{2im\beta H}. \tag{7.30}$$

すると (7.12) の代りに次式が得られる：

$$v_{inc} + v_{ref} = A \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\xi x - \omega t)} [e^{i\beta(E+z)} + e^{i\beta(E-z)} + \{e^{-i\beta(E+z)} + e^{-i\beta(E-z)}\} e^{2i\beta H}] \sum_{m=0}^{\infty} e^{2im\beta H} \left(\frac{d\xi}{\beta}\right). \tag{7.31}$$

式 (7.30) の展開は $|\exp(2i\beta H)| < 1$ でないと一般には許されない。しかし振源 E のすべての鏡像からの波線を合成すると (7.31) になるので、(7.30) を経ずに (7.31) を得ることもできる。(7.30)の右辺は普通の意味では収斂しないが超関数の位相に関しては収斂する(森口, 1965)。

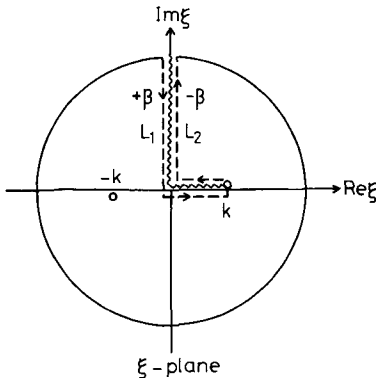


Fig. 7.5 The deformed path of integration.

さて (7.31) の ξ 平面上の積分路は図7.2から図7.5の L_1, L_2 に変更することができる. 分岐線を挟んだ両積分路上においては $\beta = (k^2 - \xi^2)^{\frac{1}{2}}$ の符号が逆転する.

しかるに (7.31) の $\left[\int_{m=0}^{\infty} e^{2im\beta H} \right]$ 部分の β の符号を変えると,

$$\left[\int_{m=0}^{\infty} e^{-2im\beta H} \right] = \left[\int_{m=-1}^{-\infty} e^{2im\beta H} \right].$$

$$\therefore v_{inc} + v_{ref} = A \int_{i\infty}^k e^{i(\xi x - \omega t)} \left[\int_{m=0}^{\infty} e^{2im\beta H} \left(\frac{d\xi}{\beta} \right) \right]$$

$$+ A \int_k^{i\infty} e^{i(\xi x - \omega t)} \left[\int_{m=-1}^{-\infty} e^{2im\beta H} \left(\frac{d\xi}{-\beta} \right) \right]$$

$$= -A \int_k^{i\infty} e^{i(\xi x - \omega t)} \left[e^{i\beta(E+z)} + e^{i\beta|E-z|} + \{ e^{-i\beta(E+z)} + e^{-i\beta|E-z|} \} e^{2i\beta H} \right] \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{2im\beta H} \left(\frac{d\xi}{\beta} \right).$$

しかるに

$$d\xi/\beta = -d\beta/\xi$$

なので, 上式は次のようになる:

$$v_{inc} + v_{ref} = 2A \int_0^{\infty} e^{i(\xi x - \omega t)} \{ \cos \beta(E+z-H) + \cos \beta(|E-z|-H) \} \cdot e^{i\beta H} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{2im\beta H} \frac{d\beta}{\xi}. \quad (7.32)$$

さて,

$$e^{i\beta H} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{2im\beta H} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{i(2m+1)\beta H} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{il\beta H}$$

は β に関して偶関数なので, (7.32) の被積分関数の全体が β に関して偶関数である. ゆえに (7.32) はさらに次のように書き換えられる:

$$v_{inc} + v_{ref} = A \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\xi x - \omega t)} \{ \cos \beta(E+z-H) + \cos \beta(|E-z|-H) \} \cdot e^{i\beta H} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{2im\beta H} \left(\frac{d\beta}{\xi} \right). \quad (7.33)$$

一方, 超関数の理論結果を BOUCHON and AKI (1977) と同様に利用すると,

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{2im\beta H} d\beta = 2\pi \delta(2\beta H - 2n\pi) d\beta = \frac{2\pi}{H} \delta(\beta H - n\pi) d(\beta H). \quad (7.34)$$

上式の δ は (A1) のようなデルタ関数である.

ゆえに (A2) を参照すると, (7.33) は次のようになる:

$$v_{inc} + v_{ref} = 4A\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\chi_n H} e^{i(\kappa_n x - \omega t)} \cos\left(n\pi \frac{E}{H}\right) \cos\left(n\pi \frac{z}{H}\right). \quad (7.35)$$

これは (7.16) と全く同じである。Schwartz の distributions (超関数) は難解である (岩村ら, 1971) が, (7.31) から出発し, (7.34) を経て (7.35) に達する計算路線は注目に値しよう。

補 遺

A $\delta(x)$ 関数の諸性質

Dirac の delta 関数の表現法は種々ある。ここでは MORSE and FESHBACH (1953) に従って次のように定義する：

$$\delta(x) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \begin{cases} 0 & ; x < -\Delta/2 \\ 1/\Delta & ; -\Delta/2 < x < \Delta/2 \\ 0 & ; x > \Delta/2 \end{cases} \quad (\text{A } 1)$$

すると,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} dx = 1 \quad (\text{A } 2)$$

および

$$\int_0^{\infty} \delta(x) dx = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \int_0^{\Delta/2} dx = \frac{1}{2}. \quad (\text{A } 3)$$

式 (A 2) の左辺の x の符号を変えると,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = - \int_{\infty}^{-\infty} \delta(-x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(-x) dx.$$

$$\therefore \delta(-x) = \delta(x). \quad (\text{A } 4)$$

さらに, (A 1)~(A 3) を用いると, 次のような unit step function を導入することができる：

$$H(x) = \int_{-\infty}^x \delta(\xi) d\xi = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ 1/2 & ; x = 0 \\ 1 & ; x > 0 \end{cases} \quad (\text{A } 5)$$

上式の $H(0) = 1/2$ は (A 1) によって得られるのであって, $\delta(x)$ の定義の仕方によってはこの結果は得られない。実は (A 1) の x の範囲に等号が無いのは, (A 1) の定義自身にも微妙なむずかしさが含まれている。

次に,

$$\int \delta(\xi) d\xi = G(\xi) + \text{constant}$$

とすると,

$$dG(\xi)/d\xi = \delta(\xi)$$

および (A 5) により

$$H(x) = G(x) - G(-\infty).$$

$$\therefore dH(x)/dx = dG(x)/dx = \delta(x). \quad (\text{A } 6)$$

しかるに (A 5) によると

$$xH(x) = x; \quad x \geq 0 \quad (\text{A } 7)$$

なので, (A 6) により

$$\frac{d}{dx} \{xH(x)\} = H(x) + x\delta(x) = 1; \quad x \geq 0. \quad (\text{A } 8)$$

超関数の理論によると $x\delta(x) = 0$ なので, 上式によると $H(0) = 1/2$ である. さて (A 1) に戻り, $\eta = \xi - x$ とおくと,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\delta(\xi-x)d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+\eta)\delta(\eta)d\eta = f(x) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\eta)d\eta = f(x). \quad (\text{A } 9)$$

特に $x=0$ の場合は

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\delta(\xi)d\xi = f(0). \quad (\text{A } 10)$$

式 (A 9), (A 10) はすでによく知られている.

次に

$$I(x) = \int_0^{\infty} f(\xi)\delta(\xi-x)d\xi$$

とおく.

まず $x < 0$ とすると, ξ の積分区間内において $\xi - x \neq 0$.

$$\therefore I(x < 0) = 0.$$

次に $x \geq 0$ の場合は $\eta = \xi - x$ とおくと, (A 2) 又は (A 3) により

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_{-x}^{\infty} f(x+\eta)\delta(\eta)d\eta = f(x) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-x}^{\infty} \delta(\eta)d\eta \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} f(0); & x=0 \\ f(x) & ; x>0 \end{cases} \end{aligned}$$

以上の結果をまとめると,

$$\int_0^{\infty} f(\xi)\delta(\xi-x)d\xi = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ \frac{1}{2} f(0); & x = 0 \\ f(x) & ; x > 0. \end{cases} \quad (\text{A } 11)$$

さらに, $\delta(x)$ や $H(x)$ を含む不定積分については次のような扱い方が考えられる:

$$\begin{aligned}\int f(x)\delta(x)dx &= \int_0^x f(\xi)\delta(\xi)d\xi + [\int f(x)\delta(x)dx]_{x=0} \\ &= \frac{1}{2}f(0) + \text{constant} = \text{constant}.\end{aligned}\quad (\text{A12})$$

$$\int f(x)H(x)dx = \int_0^x f(\xi)H(\xi)d\xi + [\int f(x)H(x)dx]_{x=0}.$$

しかるに、

$$\begin{aligned}\int_0^x f(\xi)H(\xi)d\xi &= [H(\xi)\int f(\xi)d\xi]_0^x - \int_0^x \delta(\xi)\{\int f(\xi)d\xi\}d\xi \\ &= H(x)\int f(x)dx - H(0)[\int f(\xi)d\xi]_{\xi=0} - \frac{1}{2}[\int f(\xi)d\xi]_{\xi=0}.\end{aligned}$$

$$\therefore \int f(x)H(x)dx = H(x)\int f(x)dx + \text{constant}.\quad (\text{A13})$$

なお、次の関係もすでに知られている：

$$\delta'(x) \equiv d\delta(x)/dx = -\delta(x)/x.\quad (\text{A14})$$

式 (A4) によると、

$$\delta'(-x) = -\delta'(x).\quad (\text{A15})$$

今度は $a < x < b$ とし、 $\eta = \xi - x$ とおくと、

$$\begin{aligned}\int_a^b f(\xi)\delta'(\xi-x)d\xi &= \int_{a-x}^{b-x} f(x+\eta)\delta'(\eta)d\eta = [f(x+\eta)\delta(\eta)]_{a-x}^{b-x} \\ &\quad - \int_{a-x}^{b-x} f'(x+\eta)\delta(\eta)d\eta = -f'(x).\end{aligned}\quad (\text{A16})$$

特に $x=0$ の場合は

$$\int_a^b f(\xi)\delta'(\xi)d\xi = -f'(0).\quad (\text{A17})$$

上式と同様な計算を行うと、次の結果が得られる：

$$\int_0^\infty f(\xi)\delta'(\xi-x)d\xi = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ -f(0)\delta(0) - \frac{1}{2}f'(0) & ; x = 0 \\ -f'(x) & ; x > 0. \end{cases}\quad (\text{A18})$$

$$\int_0^\infty f(\xi)\delta'(\xi)d\xi = -f(0)\delta(0) - \frac{1}{2}f'(0),$$

$$\int_{-\infty}^0 f(\xi) \delta'(\xi) d\xi = f(0) \delta(0) - \frac{1}{2} f'(0). \quad (\text{A19})$$

1次元の式(A2)を3次元に拡張し、MORSE and FESHBACH(1953)のように scale factor h_n を用いて直角座標(\mathbf{x})から一般の直交曲線座標(ξ)への変換を行うと

$$\delta(x-x_0) \delta(y-y_0) \delta(z-z_0) = \frac{\delta(\xi_1-\xi_{10}) \delta(\xi_2-\xi_{20}) \delta(\xi_3-\xi_{30})}{h_1 h_2 h_3}. \quad (\text{A20})$$

しかるに

$$\begin{aligned} dx dy dz &= h_1 h_2 h_3 d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \\ \therefore \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) dx dy dz &= \delta(\xi-\xi_0) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3. \end{aligned} \quad (\text{A21})$$

円座標(r, φ)について考察すると、(A2)と(A21)とにより

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) dx dy = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \delta(r) \delta(\varphi-\varphi_0) d\varphi dr = 1. \quad (\text{A22})$$

しかるに(A3)により $\int_0^{\infty} \delta(r) dr = 1/2$ なので、

$$\int_0^{2\pi} \delta(\varphi-\varphi_0) d\varphi = 2 \quad (\text{A23})$$

でなければならない。

実は、 n を整数とすると

$$\varphi = \text{Tan}^{-1}\{(y-y_0)/(x-x_0)\} + n\pi$$

なので、方位角 φ に関しては次の表現が正しい:

$$\delta(\varphi-\varphi_0) \rightarrow \delta(\varphi-\varphi_0-n\pi). \quad (\text{A24})$$

ゆえに(A23)が成立する。一方において $\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$ なので、これと(A23)とを比較すると $\delta(\varphi-\varphi_0) = 1/\pi$ 。これを(A20)に当てはめると、

$$\delta(x-x_0) \delta(y-y_0) = \delta(r)/(\pi r). \quad (\text{A25})$$

AKI and RICHARDS(1980)は上式の右辺を $\delta(r)/(2\pi r)$ にしている。このことは(A23)の右辺が1であることを意味するので、(A22)が成立するためには半径 r に関してのみ $\int_0^{\infty} \delta(r) dr = 1$ と約束しなければならない。しかしこれは(A3)からはずれるので不自然である。

B 弦のエネルギーの収支

長さ l の弦が両端で固定されていて、その各部分に外力 $f(x, t)$ が加えられる場合の運動方程式は、弦の横変位を u 、密度を ρ 、張力を T とし、 $c^2 = T/\rho$ とおくと

$$\ddot{u} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho} f(x, t) \quad (\text{B1})$$

であり、境界条件は

$$u(0, t) = u(l, t) = 0. \quad (\text{B2})$$

さらに初期条件を

$$u(x, 0) = \dot{u}(x, 0) = 0 \quad (\text{B } 3)$$

とすると、(B 1)~(B 3) を満たす解は次式によって与えられる (坪井, 1942),

$$u(x, t) = \sum_m \frac{l}{m\pi c} \sin \frac{m\pi}{l} x \int_0^t \phi_m(\tau) \sin \frac{m\pi c}{l} (t-\tau) d\tau. \quad (\text{B } 4)$$

ただし、 m は整数で

$$\frac{1}{\rho} f(x, t) = \sum_m \phi_m(t) \sin \frac{m\pi}{l} x$$

すなわち

$$\phi_m(t) = \frac{2}{l} \int_0^l \frac{1}{\rho} f(\lambda, t) \sin \left(\frac{m\pi}{l} \lambda \right) d\lambda. \quad (\text{B } 5)$$

しかるに $f(x, t)$ が絃の 1 点 $x=b$ に集中する場合は delta 関数 (A 1) を用いて次のように表わすことができる.

$$f(x, t) = f(t) \delta(x-b). \quad (\text{B } 6)$$

すると (A 9) により (B 5) は次のようになる:

$$\phi_m(t) = \frac{2}{l} \frac{1}{\rho} f(t) \sin \frac{m\pi}{l} b.$$

これを (B 4) に代入すると,

$$u(x, t) = \sum_m \frac{2}{m\pi c \rho} \sin \frac{m\pi}{l} b \sin \frac{m\pi}{l} x \int_0^t f(\tau) \sin \frac{m\pi c}{l} (t-\tau) d\tau. \quad (\text{B } 7)$$

上式において

$$g(t) = \int_0^t f(\tau) \sin \frac{m\pi c}{l} (t-\tau) d\tau$$

とおくと,

$$\dot{g}(t) = \frac{m\pi c}{l} \int_0^t f(\tau) \cos \frac{m\pi c}{l} (t-\tau) d\tau.$$

$$\therefore g(0) = \dot{g}(0) = 0.$$

ゆえに解 (B 7) は $f(t)$ のいかんによらず初期条件 (B 3) を満たしている。
一般に

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{dy}{dt} + n^2 y = \phi(t)$$

に対する解を求めるには、まず $\phi(t)=0$ の場合の解

$$y = e^{-\varepsilon t} (c_1 \cos \gamma t + c_2 \sin \gamma t); \quad \gamma = (n^2 - \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}$$

を求める。次に $\phi(t) \neq 0$ の場合は上式の定数 c_1, c_2 をいずれも t の関数とし、これらの関数形を次式から求める：

$$\frac{dc_1}{dt} = -\frac{1}{\gamma} \phi(t) e^{\varepsilon t} \sin \gamma t, \quad \frac{dc_2}{dt} = \frac{1}{\gamma} \phi(t) e^{\varepsilon t} \cos \gamma t.$$

上式の第2式を t について積分し、積分定数を Γ_2 とすると、

$$\gamma c_2(t) = \int \phi(t) e^{\varepsilon t} \cos \gamma t dt + \gamma \Gamma_2.$$

しかるに、

$$\psi(t) = \int \phi(t) e^{\varepsilon t} \cos \gamma t dt$$

とおくと、

$$\int_0^t \phi(\tau) e^{\varepsilon \tau} \cos \gamma \tau d\tau = [\psi(\tau)]_0^t = \psi(t) - \psi(\tau=0).$$

$$\therefore \psi(t) = \int_0^t \phi(\tau) e^{\varepsilon \tau} \cos \gamma \tau d\tau + \psi(\tau=0)$$

$$\therefore \gamma c_2(t) = \int_0^t \phi(\tau) e^{\varepsilon \tau} \cos \gamma \tau d\tau + \psi(\tau=0) + \gamma \Gamma_2.$$

しかるに、 τ と t とは互いに独立ではないので、 $\psi(\tau=0)$ は τ に関して定数であると共に t に関しても定数である。しかも Γ_2 は任意定数なので $\psi(\tau=0) + \gamma \Gamma_2$ をあらためて $\gamma \Gamma_2$ と書き変えることができる。

$c_1(t)$ についても $c_2(t)$ の扱いかいと全く同じである。すると、原方程式の解は次のようになる：

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-\varepsilon t} (\Gamma_1 \cos \gamma t + \Gamma_2 \sin \gamma t) \\ &\quad + \frac{1}{\gamma} e^{-\varepsilon t} \{ -\cos \gamma t \int \phi(t) e^{\varepsilon t} \sin \gamma t dt + \sin \gamma t \int \phi(t) e^{\varepsilon t} \cos \gamma t dt \} \\ &= e^{-\varepsilon t} (\Gamma_1 \cos \gamma t + \Gamma_2 \sin \gamma t) \\ &\quad + \frac{1}{\gamma} e^{-\varepsilon t} \{ -\cos \gamma t \int_0^t \phi(\tau) e^{\varepsilon \tau} \sin \gamma \tau d\tau + \sin \gamma t \int_0^t \phi(\tau) e^{\varepsilon \tau} \cos \gamma \tau d\tau \}. \end{aligned}$$

上の第2式の表現による強制振動項を $y_n(t)$ とすると、 $y_n(0) = \dot{y}_n(0) = 0$ であるのがこの表現法の特徴になっている。

上式の τ に関する定積分の上限は、 t でなくても、 $T(0) = 0$ である t に関する関数 $T(t)$ であればよい。

式 (5.5) に戻って $r=0$ とし、

$$f(t) = f \sin \omega t \quad (5.11 \text{ again})$$

を用いると、(B 3) に対応する単振子の解は、

$$u(t) = \frac{f}{m} \frac{1}{|\omega^2 - n^2|} \left(-\frac{\omega}{n} \sin nt + \sin \omega t \right). \quad (B 8)$$

$$\therefore w_{kin}(t) = \frac{1}{2} m \dot{u}^2(t) = \frac{f^2}{2m} \frac{\omega^2}{|\omega^2 - n^2|^2} (-\cos nt + \cos \omega t)^2,$$

$$w_{pot}(t) = \frac{1}{2} s u^2(t) = \frac{f^2}{2m} \frac{n^2}{|\omega^2 - n^2|^2} \left(-\frac{\omega}{n} \sin nt + \sin \omega t \right)^2.$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial t} \{w_{kin}(t) + w_{pot}(t)\} = \frac{f^2}{m} \frac{\omega}{|\omega^2 - n^2|} \sin \omega t (-\cos nt + \cos \omega t).$$

一方外力 (5.11 again) が $t=0$ から t までの間になす仕事は (5.7) により

$$W_1(t) = \int_0^t f(t) \dot{u}(t) dt. \quad \therefore \frac{\partial W_1(t)}{\partial t} = f(t) \dot{u}(t).$$

これに (5.11 again) と (B 8) とを代入すると

$$\frac{\partial}{\partial t} \{w_{kin}(t) + w_{pot}(t)\} = f(t) \dot{u}(t) = \frac{\partial W_1(t)}{\partial t} \quad (B 9)$$

であることが単振子に対して確かめられる。

一方弦に対して、(B 6) においても (5.11 again) を用い、

$$n_m = m\pi c/l \quad (B10)$$

とおくと、(B 7) の積分記号部は次のように計算される：

$$\int_0^t d\tau = \frac{f n_m}{n_m^2 - \omega^2} \left(-\frac{\omega}{n_m} \sin n_m t + \sin \omega t \right).$$

$$\therefore u(x, t) = \sum_m \frac{2f}{\rho l} \frac{1}{n_m^2 - \omega^2} \sin \frac{n_m}{c} b \sin \frac{n_m}{c} x \left(-\frac{\omega}{n_m} \sin n_m t + \sin \omega t \right). \quad (B11)$$

式 (B 8) と (B11) との類似性から察せられるように、(B11) においても $\sin n_m t$ を係数に持つ項は自由振動項であり、 $\sin \omega t$ を係数に持つ項は強制振動項である。

さて、(B 1) の両辺に \dot{u} を乗じると、

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \dot{u} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\dot{u} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial \dot{u}}{\partial x}$$

なので、(B 1) は次のようになる：

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{2} \rho \dot{u}^2 + \frac{1}{2} \rho c^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right\} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho c^2 \frac{\partial u}{\partial x} \dot{u} \right) + f \dot{u}.$$

上式を x について 0 から l まで積分すると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{2} \rho \int_0^l \dot{u}^2 dx + \frac{1}{2} \rho c^2 \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \right\} = [\rho c^2 \frac{\partial u}{\partial x} \dot{u}]_0^l + \int_0^l f \dot{u} dx.$$

しかるに (B2) により $\dot{u}(0, t) = \dot{u}(l, t) = 0$.

$$\therefore \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{2} \rho \int_0^l \dot{u}^2 dx + \frac{1}{2} \rho c^2 \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \right\} = \int_0^l f \dot{u} dx. \quad (\text{B12})$$

そこで, (B6) と (5.11 again) とを (B12) の右辺に代入すると,

$$\partial W_1(t) / \partial t \equiv f(t) \dot{u}(b, t) = f \sin \omega t \cdot \dot{u}(b, t).$$

しかるに (B11) によると,

$$\dot{u}(x, t) = \sum_m \frac{2f}{\rho l} \frac{\omega}{n_m^2 - \omega^2} \sin \frac{n_m}{c} b \sin \frac{n_m}{c} x (-\cos n_m t + \cos \omega t). \quad (\text{B13})$$

$$\therefore \frac{\partial W_1(t)}{\partial t} = \frac{2f^2}{\rho l} \sin \omega t \sum_m \frac{\omega}{n_m^2 - \omega^2} \sin^2 \frac{n_m}{c} b (-\cos n_m t + \cos \omega t). \quad (\text{B14})$$

一方,

$$W_{kin}(t) \equiv \frac{1}{2} \rho \int_0^l \dot{u}^2 dx, \quad W_{pot}(t) \equiv \frac{1}{2} \rho c^2 \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \quad (\text{B15})$$

に関しては,

$$\int_0^l \sin \frac{n_m}{c} x \sin \frac{n'_m}{c} x dx = \int_0^l \cos \frac{n_m}{c} x \cos \frac{n'_m}{c} x dx = \begin{cases} 0; & n_m \neq n'_m \\ l/2; & n_m = n'_m \end{cases}$$

なので, (B15) に (B13) 又は (B11) を代入すると,

$$W_{kin}(t) = \frac{f^2}{\rho l} \sum_m \frac{\omega^2}{(\omega^2 - n_m^2)^2} \sin^2 \frac{n_m}{c} b (-\cos n_m t + \cos \omega t)^2,$$

$$W_{pot}(t) = \frac{f^2}{\rho l} \sum_m \frac{n_m^2}{(\omega^2 - n_m^2)^2} \sin^2 \frac{n_m}{c} b \left(-\frac{\omega}{n_m} \sin n_m t + \sin \omega t \right)^2.$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial t} \{W_{kin}(t) + W_{pot}(t)\} = \frac{2f}{\rho l} \sin \omega t \sum_m \frac{\omega}{n_m^2 - \omega^2} \sin^2 \frac{n_m}{c} b (-\cos n_m t + \cos \omega t).$$

(B16)

ゆえに, (B14) と (B16) とから次の関係が確かめられる:

$$\frac{\partial}{\partial t} \{W_{kin}(t) + W_{pot}(t)\} = \frac{\partial W_1(t)}{\partial t}. \quad (\text{B17})$$

上式は各モード (m) ごとに成立しなければならない.

次に外力 (B6) をさらに

$$f(x, t) = f \delta(t) \delta(x - b) \quad (\text{B18})$$

と限定し, これの時間関数部 $f(t) = f \delta(t)$ を (B7) に代入する. この際に (B7) の定積分

の上下限は必ずしも (B7) に示したものととられなくてもよいので、 $\int_{-\varepsilon_1}^{+\varepsilon_2}$ とし、その代りに $\dot{u}(x, 0)$ の条件を満たさせるために、 t_0 を任意の正数とし、 $H(t-t_0)$ を付ける。すると、(A3)により

$$u(x, t) = \frac{2f}{\pi c \rho} H(t-t_0) \sum_m \frac{1}{m} \sin \frac{m\pi}{l} b \sin \frac{m\pi}{l} x \sin \frac{m\pi c}{l} t. \quad (\text{B19})$$

しかるに、

$$\begin{aligned} \sin \frac{m\pi}{l} b \sin \frac{m\pi}{l} x \sin \frac{m\pi c}{l} t &= \frac{1}{4} \left\{ \sin \frac{m\pi c}{l} \left(t - \frac{x-b}{c} \right) + \sin \frac{m\pi c}{l} \left(t + \frac{x-b}{c} \right) \right. \\ &\quad \left. - \sin \frac{m\pi c}{l} \left(t - \frac{x+b}{c} \right) - \sin \frac{m\pi c}{l} \left(t + \frac{x+b}{c} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B20})$$

しかも森口ら (1965) によると、

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sin m\psi = \frac{1}{2} (\pi - \psi); \quad 0 < \psi < 2\pi. \quad (\text{B21})$$

上式は ψ の区間の両端において不連続の恐れがあるが、区間外は区間内の繰り返しなので、 ψ の区間の制限にとられないことにし、(B20)、(B21) を (B19) に代入すると、(B21) は

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m} \sin m\psi = \frac{1}{2} (\pi + \psi)$$

と書き変えられるので、

$$\begin{aligned} u(x, t) &= H(t-t_0) \frac{f}{4c\rho} \left[\left\{ 1 + \frac{c}{l} \left(t - \frac{x-b}{c} \right) \right\} + \left\{ 1 + \frac{c}{l} \left(t + \frac{x-b}{c} \right) \right\} \right. \\ &\quad \left. - \left\{ 1 + \frac{c}{l} \left(t - \frac{x+b}{c} \right) \right\} - \left\{ 1 + \frac{c}{l} \left(t + \frac{x+b}{c} \right) \right\} \right] = 0. \end{aligned} \quad (\text{B22})$$

すなわち、(B18) の外力によっては弦の振動は全然生じない。この場合の外力は弦に対して何らのエネルギーを与えることもできない。弦はあたかも剛体であるかのようである。

一方、境界条件 (B2) を与えずに (B1)、(B3) および (B18) を満たす解を求めると (MORSE and FESHBACH, 1953)、 t の代りに $t-\tau$ とおき変えて

$$u(x, t) = \frac{f}{2c\rho} H\left(t-\tau - \frac{|x-b|}{c}\right). \quad (\text{B23})$$

すなわち、 $|x-b| < c(t-\tau)$ の弦の部分に永久変位 $f/(2c\rho)$ が残る。このような運動を生じるためには $|x-b| = c(t-\tau)$ において無限大のエネルギーが費やされる。この消費エネルギーは外力によって与えられるエネルギーに等しい。

式 (B18) の両辺の次元をそろえるために、(5.18) の時のように、右辺の f の代りに弦の単位長さ当りの運動量 \mathcal{M} を用いると、外力 $f(x, t)$ が無限に長い弦に $t=0$ から t までの間になす仕事は次式によって与えられる：

$$\begin{aligned}
 W_1 &\equiv \int_0^t dt \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) \dot{u}(x, t) dx = M \int_0^t \delta(t) dt \int_{-\infty}^{\infty} \dot{u}(x, t) \delta(x-b) dx \\
 &= M \int_0^t \dot{u}(b, t) \delta(t) dt = \frac{1}{2} M \dot{u}(b, 0).
 \end{aligned} \tag{B24}$$

一方、(B23) は波動方程式の解になっているので、

$$\frac{1}{2} \rho \dot{u}^2 = \frac{1}{2} \rho c^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2$$

ゆえに時刻 t における絃の全エネルギーは次のように計算される：

$$\begin{aligned}
 W_{total}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \rho \dot{u}^2(x, t) dx = \frac{1}{2} M \int_{-\infty}^{\infty} \dot{u}(x, t) \delta\left(t - \frac{|x-b|}{c}\right) d\left(\frac{|x-b|}{c}\right) \\
 &= \frac{1}{2} M \dot{u}(|ct-b|, t).
 \end{aligned}$$

しかるに、(B3) により $\dot{u}(x, 0) = 0$ なので

$$[W_{total}(t)]_0^t = \frac{1}{2} M \dot{u}(|ct-b|, t). \tag{B25}$$

しかも $\dot{u}(x, t)$ は、(B23) によってもわかるように波動関数なので、

$$\dot{u}(|ct-b|, t) = \dot{u}(b, 0).$$

ゆえに、(B24) と (B25) とから

$$[W_{total}(t)]_0^t = W_1. \tag{B26}$$

ただし、(B23) の f を M に書き直すと

$$\dot{u}(b, 0) = \frac{M}{2c\rho} \delta(0) \longrightarrow \infty$$

なので、(B24) の右辺は、(B23) の下に述べられたように、無限大である。

すでに知られているように

$$\ddot{g}_1(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 g_1}{\partial x^2} + \frac{M}{\rho} \delta(t-\tau) \delta(x-b); \tag{B27}$$

$$g_1(x-b \neq 0, \tau) = \dot{g}_1(x-b \neq 0, \tau) = 0$$

の解は (B23) のように

$$g_1(x, t) = \frac{M}{2\rho c} H\left(t - \tau - \frac{|x-b|}{c}\right).$$

しかるに、(B27) の両辺に $f(\tau)$ を乗じて、 τ について積分すると、

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^\infty g_1(x, t) f(\tau) d\tau = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^\infty g_1 f(\tau) d\tau + \frac{M}{\rho} \delta(x-b) f(t).$$

ゆえに

$$\ddot{g}_2(x, t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} g_2(x, t) + \frac{M}{\rho} \delta(x-b) f(t) \quad (\text{B28})$$

の解は

$$g_2(x, t) = \int_0^\infty g_1(x, t) f(\tau) d\tau = \frac{M}{2\rho c} \int_0^\infty f(\tau) H(t-\tau - \frac{|x-b|}{c}) d\tau.$$

$$\text{ゆえに } F(\tau) = \int f(\tau) d\tau$$

とおくと,

$$g_2(x, t) = \frac{M}{2\rho c} \{ [H(t-\tau - \frac{|x-b|}{c}) F(\tau)]_0^\infty + \int_0^\infty F(\tau) \delta(t-\tau - \frac{|x-b|}{c}) d\tau \}.$$

しかるに,

$$\int_0^\infty F(\tau) \delta(t-\tau - \frac{|x-b|}{c}) d\tau = \begin{cases} F(t - \frac{|x-b|}{c}); & t - \frac{|x-b|}{c} > 0 \\ 0 & ; t - \frac{|x-b|}{c} < 0. \end{cases}$$

$$\therefore g_2(x, t) = \frac{M}{2\rho c} H(t - \frac{|x-b|}{c}) \int_0^{t-|x-b|/c} f(\tau) d\tau. \quad (\text{B29})$$

上式の両辺を t について微分すると,

$$\dot{g}_2(x, t) = \frac{M}{2\rho c} \{ H(t - \frac{|x-b|}{c}) f(t - \frac{|x-b|}{c}) + \delta(t - \frac{|x-b|}{c}) \int_0^{t-|x-b|/c} f(\tau) d\tau \}.$$

しかるに, $\tau = t$ において 0 である関数を $h(t, \tau)$ とし,

$$k(t, \tau) = h(t, \tau) \delta(t-\tau)$$

とおくと,

$$\int_0^t k(t, \tau) d\tau = h(t, t) = 0 \quad \therefore k(t, \tau) = 0.$$

$$\therefore \dot{g}_2(x, t) = \frac{M}{2\rho c} H(t - \frac{|x-b|}{c}) f(t - \frac{|x-b|}{c}). \quad (\text{B30})$$

さて, g_2 の次元を変位 $u(x, t)$ に戻し, f を単位長さ当りの力とすると, M を無次元に戻さなければならないので,

$$i\ddot{u}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho} f(x, t); \quad f(x, t) = f(t) \delta(x-b)$$

の解は次のように表わされる:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\rho c} H\left(t - \frac{|x-b|}{c}\right) \int_0^{t-|x-b|/c} f(\tau) d\tau.$$

さらに $f(t) = f \sin \omega t$ とすると,

$$u(x, t) = \frac{f}{2\rho c \omega} \left\{1 - \cos \omega\left(t - \frac{|x-b|}{c}\right)\right\} H\left(t - \frac{|x-b|}{c}\right). \quad (\text{B31})$$

振源 $x=b$ における (B11) と (B31) とを比較すると,

$$u(b, t; \text{B11}) = \frac{2f}{\rho l} \sum_m \frac{1}{n_m^2 - \omega^2} \sin^2 \frac{n_m}{c} b \left(-\frac{\omega}{n_m} \sin n_m t + \sin \omega t\right),$$

$$u(b, t; \text{B31}) = \frac{1}{2\rho c \omega} (1 - \cos \omega t) H(t).$$

$u(b, t; \text{B11})$ は境界条件 (B2) を承知しているのに反し, $u(b, t; \text{B31})$ はこれを知らない. (B22) と (B23) との違いもこれによる.

(B23) が (B2) を満たすためには

$$H\left(t - \frac{b}{c}\right) = H\left(t - \frac{l-b}{c}\right) = 0$$

でなければならない. すなわち t は b/c および $(l-b)/c$ のいずれよりも小さくなければならない. ゆえに (B23) は, (B22) と異なり, $x=0$ および l からの反射波を含まない.

一方 (B20) から反射波を落すと, (B22) の右辺第3 { } と第4 { } とが消える. すると (B22) は定常波でなくなるので $t > |x-b|/c$ の場合にしか存在しない. このことを考慮し, さらに $l = \infty$ を代入すると, (B22) すなわち (B19) は (B23) に一致する. この際には $t_0 = |x-b|/c$ と考えるべきである.

ふたたび

$$f(x, t) = f \sin \omega t \cdot \delta(x-b)$$

を考えると, (B30) から

$$\dot{u}(x, t) = \frac{f}{2\rho c} H\left(t - \frac{|x-b|}{c}\right) \sin \omega\left(t - \frac{|x-b|}{c}\right). \quad (\text{B32})$$

$$\therefore \frac{\partial W_1(t)}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) \dot{u}(x, t) dx = f \sin \omega t \int_{-\infty}^{\infty} \dot{u}(x, t) \delta(x-b) dx$$

$$= f \dot{u}(b, t) \sin \omega t = \frac{f^2}{2\rho c} H(t) \sin^2 \omega t. \quad (\text{B33})$$

一方

$$2W_{\text{kin}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho \{\dot{u}(x, t)\}^2 dx = f \int_0^{\infty} \dot{u}(\xi, t) \sin \omega\left(t - \frac{\xi}{c}\right) H\left(t - \frac{\xi}{c}\right) d\left(\frac{\xi}{c}\right)$$

$$\begin{aligned}
 &= f \int_0^t \dot{u}(\xi, t) \sin \omega(t - \frac{\xi}{c}) d(\frac{\xi}{c}) \\
 &= \frac{f^2}{2\rho c} \int_0^t \sin^2 \omega(t - \frac{\xi}{c}) H(t - \frac{\xi}{c}) d(\frac{\xi}{c}) = \frac{f^2}{2\rho c} \int_0^t H(\tau) \sin^2 \omega \tau d\tau.
 \end{aligned}$$

しかも $W_{pot}(t) = W_{kin}(t)$ なので,

$$\frac{\partial W_1(t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \{W_{kin}(t) + W_{pot}(t)\}.$$

これは長さ l の弦の場合の (B17) に対し、無弦に長い弦のエネルギーの収支を示している。ただし、 $\partial W_1(t; B14)/\partial t$ と $\partial W_1(t; B33)$ とは、同じ外力 $f(x, t)$ を与えたにもかかわらず、異なる。

文 献

- AKI, K. and P.G.RICHARDS, 1980, *Quantitative Seismology*, vol. 1, Freeman, San Francisco.
- BOUCHON, M. and K. AKI, 1977, Discrete Wave-number Representation of Seismic-source Wave Fields, *Bull. Seis. Soc. Am.*, **67**, 259-277.
- 伊藤徳之助, 1948, 応用ベクトル解析, 丸善.
- 岩村聯, 石垣春夫, 鈴木文夫, 訳, 1971, 超関数の理論, 東京岩波書店.
- 萩原尊礼, 1945, 振動測定, 東京宝文館.
- LOVE, A.E.H., 1934, *The Mathematical Theory of Elasticity*, Cambridge.
- 森口繁一, 宇田川銈久, 一松信, 1965, 数学公式II, 岩波全書.
- MORSE, P.M. and H. FESHBACH, 1953, *Methods of Theoretical Physics*, McGRAW-HILL.
- 坪井忠二, 1942, 振動論, 東京河出書房.
- WATSON, G.N., 1922, *Theory of Bessel Functions*, Cambridge.