北海道大学地球物理学研究報告
Geophysical Bulletin of Hokkaido University, Sapporo, Japan
Vol. 45. March, 1985, p.43－50.

超関数のテンソル積および合成積の物理学的意義

田治米鏡二*

(昭和 59 年 12 月 7 日受理)

A Physical Meaning of the Tensor Product and the Convolution of the Distribution

Kyozi TAZIME

(Received December 7, 1984)

Dirac's δ is used widely in mathematical physics. But it is difficult to use it properly in the mathematical sense.

Apart from the general topological space, the tensor product and the convolution of δ have been understood on the two dimentional geometrical space. By the rotation of the coordinates (x, y), δ_x is transformed to δ_{y+x} or δ_{y-x}. This means the particle velocity of a string at the initial time must be conserved later.

Tensor product $\delta_{x,y}$ has been found equal to convolution $(\delta * \delta)_{y\pm x}$. Therefore $\delta_{x,y}$ must be transformed to $\delta_{y\pm x}$ on xy-plane.

When $\delta_{x,y}$ is an external force on a string and it is taken as an input to the wave equation, a sort of the black box, the output corresponds to $\delta_{y\pm x}$, the partcle velocity of the string. These phenomena are physically understood as the conservation of the momentum.

ま え が き

一般の位相空間においては理解しにくいので，主として 2 次元ユークリド空間を対象として，岩村ら (1971) および吉田ら (1966) が邦訳した SCHWARTZ の分布理論を理解できるように努める．

1. 基 本 事 項

超関数 (distribution) の定義

X 空間上の超関数 T は収束関数 φ を用いて次のように定義される：

---

* 北海道大学名誉教授
* Emeritus Professor of Hokkaido University

$$T[\varphi(x)] = T\cdot\varphi(x) = \int_X T_x\varphi(x)dx. \tag{1.1}$$

ただし，x は X 空間の要素すなわち点であり，φ はある有界閉集合の外では 0 で，かつ無限回可微分 (積分記号下において直接に微分できる) 関数である．(1.1) の右辺の T は関数ではないので $T(x)$ と記さず，X 空間の量であることを示すために T_x と書いてある．

1 次元ユークリド空間においては (1.1) は次のように表わされる：

$$T[\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} T_x\varphi(x)dx. \tag{1.2}$$

もし $\varphi(x)$ を用いず，T_x が無限遠点において不正則であると，(1.2) の右辺の積分は収束しない．ゆえに，T_x が無限遠点において不正則な場合にも積分を収束させるために収束関数 φ が導入されたのである．

たとえば，Fig. 1 の点線のような T_x の区間 $[-\infty, \infty]$ における積分は収束しないが，実線の

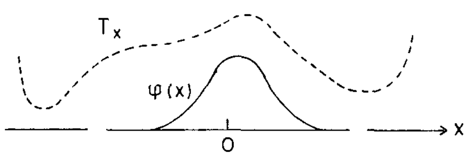

Fig. 1. A relation between T_x and $\varphi(x)$.

$\varphi(x)$ を用いると，$T_x\varphi(x)$ の積分は区間 $[-\infty, \infty]$ においても収束する．

台 (support)

それの外では φ が 0 になる閉集合 (閉じた空間) の最小なものを φ の**台**と言う．

同様に，それの外では T が 0 になる閉集合の最小なものを T の**台**と言う．

式 (1.1) や (1.2) に用いられた $\varphi(x)$ は有界なので，無限遠点において 0 であり正則である．ゆえに φ はコンパクトな台を持つとも言われる．

T の台は一般には有界でないが，特にこれも有界とすると，T の台 A と φ の台 K との位置関係は Fig. 2 のようになる．

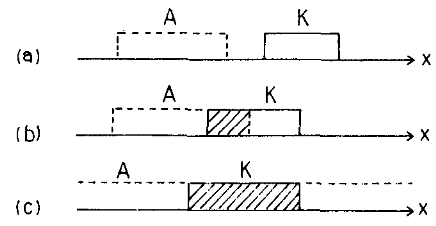

Fig. 2. Several relations between supports of T and φ on the x-axis.

(a) の場合は $T[\varphi]=0$ であり，(b) の場合は A と K の共通部分においてのみ $T[\varphi]\neq 0$ である．T の台 A が有界でない場合は (c) のようになり，A と K の共通部分は K と一致する．式 (1.2) の右辺の積分は多くの場合に Fig. 2 (c) のような情況にある．

2 次元ユークリド空間の x, y 一平面上における $T_{x,y}$ の台 A と $\varphi(x, y)$ の台 K との関係は Fig. 3 のようになる．Fig. 2 の時と同様に，A と φ とが共通部分を持つ場合 (b), (c) にのみ $T[\varphi]$

$\neq 0$ である．この時 (1.1) は次のように表わされる：

$$T[\varphi(x,y)]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}T_{x,y}\varphi(x,y)dx\,dy. \qquad (1.3)$$

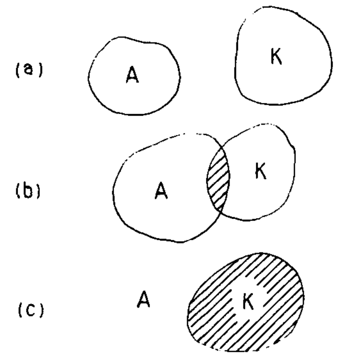

Fig. 3. The supports of $T_{x,y}$ and $\varphi(x,y)$ on x,y-plane.

パラメタに依存する積分

$\varphi(x;\lambda)$ を x とある位相空間 Λ の中を動くパラメタ λ との関数とすると，

$$T[\varphi(x;\lambda)]=\int_X T_x\varphi(x;\lambda)dx \qquad (1.4)$$

はパラメタ λ に依存する広義の積分である．

λ が λ_0 の近傍を動く時，$\varphi(x;\lambda)$ の台が $\varphi(x)$ の台と同様に R^n の一定なコンパクト集合に含まれ，かつ $\partial^p\varphi(x;\lambda)/\partial x^p$ および $\partial^q\varphi(x;\lambda)/\partial\lambda^q$ が連続であるならば，，$\lambda=\lambda_0$ 近傍において (1.4) は連続かつ無限回可微分である．このことは (1.1) の T_x と $\varphi(x)$ との関係を拡張したにすぎない．

しかし $\varphi(x;\lambda)$ を上述のような関数とすると，(1.4) の左辺は x に関しては超関数であるが，λ に関しては関数とみなされる．ゆえに (1.4) を次のように表わす：

$$I(\lambda)=T[\varphi(x;\lambda)]. \qquad (1.5)$$

たとえば T を δ とすると，(1.4) と (1.5) とから

$$I(\lambda)=\delta[\varphi(x;\lambda)]=\varphi(0;\lambda) \qquad (1.6)$$

なので，$I(\lambda)$ は確かに λ のみの関数 $\varphi(0;\lambda)$ であることがわかる．

2. テンソル積

（i） 収束関数 $\varphi(x,y)$ の台 K を Fig. 4 の閉曲線に囲まれた部分とする．

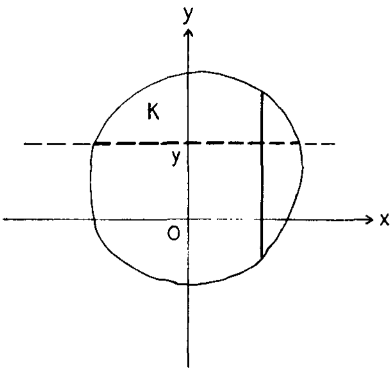

Fig. 4. The support K of $\varphi(x,y)$.

（ii）　次に $\varphi(x,y)$ をパラメタ $y\in Y$ に依存する X 空間上の関数と考える．すると $\varphi(x,y)$ は $\varphi(x\,;\lambda)$ と同様に x のみの関数とみなされ，その台は Fig. 4 の太い破線部分になるので，$y=$一定　の直線に沿う積分

$$I(y)=S_x[\varphi(x,y)]=\int_X S_x\varphi(x,y)dx \tag{2.1}$$

を (1.5) と同様に定義することができる．

$I(y)$ は，(1.6) の時と同様に，x に関しては超関数であるが，パラメタ y に関しては単なる y の関数とみなせる．

（iii）　$\varphi(x,y)$ は変数 x,y について無限回可微分であり，$\varphi(x,y)$ の台は y のいかんによらず Fig. 4 の K 内に含まれる．

（iv）　ゆえに $I(y)$ は y について無限回可微分であり，しかも Fig. 4 の太い実線部分のようなコンパクトな台を持つ．すなわち $I(y)$ は y 軸方向の積分に対して収束関数になる資格を有する．

（v）　すると $T_y[I(y)]$ を定義することができる．そこでこれに (2.1) を代入すると

$$T_y[I(y)]=T_y[S_x[\varphi(x,y)]]. \tag{2.2}$$

ゆえにこの式の右辺を $S_x\otimes T_y[\varphi(x,y)]$ と記し，テンソル積と呼ぶ．すなわち

定義　$$S_x\otimes T_y[\varphi(x,y)]\equiv T_y[S_x[\varphi(x,y)]]=\iint_{X\times Y}S_xT_y\varphi(x,y)dx\,dy. \tag{2.3}$$

このように，収束関数 $\varphi(x,y)$ を用いることにより，テンソル積はいつも定義される．

次に (2.1) の S が δ の時は

$$I(y)=\int_X\delta_x\varphi(x,y)dx=\varphi(0,y) \tag{2.4}$$

であって，この式の右辺は確かに関数である．ゆえにこの式の両辺に δ_y を乗じると

$$\delta_y\int_X\delta_x\varphi(x,y)dx=\delta_y\varphi(0,y). \tag{2.5}$$

一方，

$$\delta_{x,y}=\delta_x\otimes\delta_y=\delta_y\otimes\delta_x \tag{2.6}$$

なので，形式的には

$$\int_X\delta_{x,y}\varphi(x,y)dx=\delta_y\otimes\int_X\delta_x\varphi(x,y)dx. \tag{2.7}$$

しかるに右辺の積分値は (2.4) のような関数なので，右辺のテンソン積は (2.5) と同じ普通の乗法に他ならない．

$$\therefore \quad \int_X \delta_{x,y}\varphi(x,y)dx=\delta_y\varphi(0,y). \tag{2.8}$$

δ_x の回転

Fig. 5 のように直角座標 (x, y) を $\pi/4$ だけ回転させた座標を (ξ, η) とすると,

$$\xi=\frac{1}{\sqrt{2}}(y+x),\quad \eta=\frac{1}{\sqrt{2}}(y-x). \tag{2.9}$$

すると, Fig. 5 においても明らかなように, x 軸上の積分を ξ 軸上の積分に変換する際に

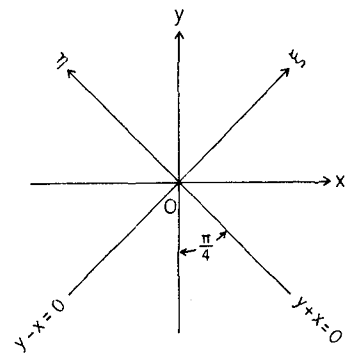

Fig. 5. Rotation of the coordinates.

$$\text{は}\, dx=d\xi/\sqrt{2} \tag{2.10}$$

しかも $\delta_{x,y}$ は回転に対して不変なので

$$\delta_{x,y}=\delta_{\xi,\eta}. \tag{2.11}$$

ゆえに (2.8) を参照すると

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta_{x,y}\varphi(x,y)dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\delta_{\xi,\eta}\varphi(\xi,\eta)d\xi=\frac{1}{\sqrt{2}}\delta_\eta\varphi(0,\eta). \tag{2.12}$$

しかも k を定数とすると

$$k\delta_{kx}=\delta_x. \tag{2.13}$$

ゆえに (2.8) と (2.12) とから

$$\delta_y\varphi(y)=\delta_{\sqrt{2}\eta}\varphi(\eta)\ \ \text{又は}\ \ \delta_{\sqrt{2}\xi}\varphi(\xi).$$

同様にして

$$\delta_x\varphi(x)=\delta_{\sqrt{2}\xi}\varphi(\xi)\ \ \text{又は}\ \ \delta_{\sqrt{2}\eta}\varphi(\eta). \tag{2.14}$$

これは"δ は回転に対して不変"と言う一般の R^n 空間に対する定理に含まれる. ただし, x 軸と ξ 軸との線素の縮尺が (2.10) のように異なるので, (2.14) の右辺が δ_ξ ではなくて $\delta_{\sqrt{2}\xi}$ となっている点に留意すべきである.

式 (2.14) に (2.9) を代入すると

$$\delta_x\varphi(x)=\delta_{y\pm x}\varphi(y\pm x). \tag{2.15}$$

このことは $y=0$ すなわち x 軸上において定義された量 δ_x が $y\neq 0$ において $y\pm x=0$ 直線上

に変換されることを意味する.

3. 合 成 積

(i) S と T とをそれぞれ R^n 上の2つの任意の超関数とすると,(2.3)のようなテンソル積 $S_\xi \otimes T_\eta$ は $R^n \times R^n$ 上の超関数として常に存在する.

(ii) R^n における S と T の台をそれぞれ A および B とすると,$S_\xi \otimes T_\eta$ の台は $\xi \in A, \eta \in B$ なる (ξ, η) の集合 $A \times B$ である.

(iii) 収束関数 $\varphi(\xi, \eta)$ は無限回可微分なので,$\varphi(\xi+\eta)$ も無限回可微分の関数である.

(iv) しかし $\varphi(\xi+\eta)$ の台を K とすると,その台は

$$\xi+\eta \in K \tag{3.1}$$

のような (ξ, η) の集合である.すなわち $\varphi(\xi+\eta)$ の台は,Fig. 6 に太線で示されているように,$\xi+\eta=0$ 直線に平行な帯状の空間である.

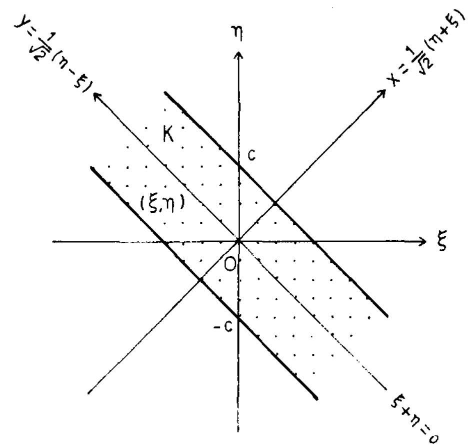

Fig. 6. The support of $\varphi(\xi+\eta)$.

同図に太線で限られているように,$\varphi(x)$ の台 K は x 方向に有界でも y 方向には有界でない.ゆえに K を2次元的にみると,$\varphi(\xi+\eta)$ の台 K は ξ, η 平面上において有界でない.

収束関数 $\varphi(\xi, \eta)$ の台は2次元的にコンパクトであるとの条件が課せられているのに対し,$\varphi(x=\xi+\eta)$ の台は x 方向にのみコンパクトであるとの1次元的条件しか課せられていない.

ゆえに S と T とが全く任意では $A \times B$ と K とが共通部分を持っても,Fig. 7 (a), (b) のように,その共通部分は必らずしも有界でない.すると

$$S_\xi \otimes T_\eta [\varphi(\xi+\eta)] \tag{3.2}$$

は(2.3)のようなテンソル積を定義することができない.

(v) しかし,Fig. 7 (c) のように $A \times B$ と K との共通部分がコンパクトならば,Fig. 3 (b) 又は (c) と同様に,I 内において (ii), (iv) を満たす (ξ, η) の集合は有界なので (3.1) は意味を持つ.その時 (3.2) を S と T との合成積と称し,次のように記す:

定義 $(S * T)_x[\varphi(x)] = (S_\xi \otimes T_\eta)[\varphi(\xi+\eta)]$; $x=\xi+\eta$. (3.3)

上述の事柄をまとめると,次のように整理される:

定理 S_ξ と T_η の台をそれぞれ A と B とする.$\xi \in A$,$\eta \in B$ に対して,$\xi+\eta$ が有界にとどまる時,ξ も η も有界に止まるならば (3.2) のように定義された合成積は意味を持つ. (3.4)

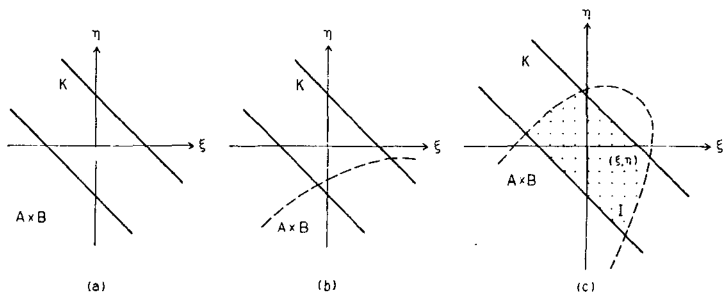

Fig. 7. The relation between the support of $S_\xi \otimes T_\eta$ and that of $\varphi(\xi+\eta)$.

系　上述(iv)のように，S_ξ と T_η とが任意では(3.2)は意味を持たないので，S_ξ の台 A をコンパクトとしよう．すると(3.1)により

$$\eta \in K - A \tag{3.5}$$

であるが，Fig. 7(c)の I 内において K はコンパクトであり $\xi+\eta$ は有界にとどまる．すると，K も A もコンパクトなので(3.5)により η も有界にとどまる．すると定理(3.4)により(3.2)は意味を持つ．　(3.6)

定義(3.3)によって ξ,η **平面**上において定義された量 $S_\xi \otimes T_\eta$ が x **直線**上において定義される量 $(S * T)_x$ に変換される．このことは物理学的にも大きな意義を持つ．

$\delta_{x,y}$ の台の変換

さて，$\varphi(x)$ の台が x 方向に対してコンパクトとすると，δ_ξ の台 $\xi=0$ 直線は Fig. 6 の区間 [−c, c] のようにコンパクトである．すると系(3.6)により，(3.3)が必らず定義される．

$$\therefore\quad \delta_\xi \otimes T_\eta \cdot \varphi(\eta+\xi) = (\delta * T)_{\eta+\xi} \cdot \varphi(\eta+\xi) = T_{\eta+\xi} \cdot \varphi(\eta+\xi). \tag{3.7}$$

さらに T も δ とすると，

$$\delta_{\xi,\eta} \cdot \varphi(\eta+\xi) = \delta_{\eta+\xi} \cdot \varphi(\eta+\xi). \tag{3.8}$$

もし $\varphi(\eta-\xi)$ の台が Fig. 6 の y 軸の方向に有界であるとすると，(3.8)と同様に

$$\delta_{\xi,\eta} \cdot \varphi(\eta-\xi) = \delta_{\eta-\xi} \cdot \varphi(\eta-\xi). \tag{3.9}$$

ゆえに，(2.15)までの記号法に統一するために，(3.8), (3.9)の (ξ,η) と (x,y) とを交換すると，

$$\delta_{x,y}\cdot\varphi(y\pm x)=\delta_{y\pm x}\cdot\varphi(y\pm x)=\varphi(0). \tag{3.10}$$

これは 原点 $x=y=0$ にあった量が $y\neq 0$ において $y\pm x=0$ 直線上に保存される可能性があることを意味する.

実は $\delta_{x,y}=\delta_x\otimes\delta_y$ の台 $x=y=0$ 点はコンパクトである. ゆえに $\delta_x\otimes\delta_y$ の台と $\varphi(y+x)$ の台又は $\varphi(y-x)$ の台との共通部分はいつもコンパクトである. ゆえに $\varphi(y\pm x)$ の台が有界であるとの条件を特に課さなくとも, (3.10) はいつも成立する.

式 (3.10) と (2.15) とを比較すると,

$$\delta_{x,y}\cdot\varphi(y\pm x)=\delta_{y\pm x}\cdot\varphi(y\pm x)=\delta_x\cdot\varphi(x)=\varphi(0). \tag{3.11}$$

上式は一般には単に

$$\delta=\varphi(0) \tag{3.12}$$

と書かれる.

あ と が き

以上の結果の物理学的意義の1例を挙げておこう (田治米, 1984).

外力 $\delta_{x,y}$ が $x=y=0$ において弦に作用した時, 弦の運動の速度 δ_x が $y>0$ における速度 $\delta_{y\pm x}$ に変換されることを (2.15) は意味する.

これに反し (3.10) は外力が弦に与える運動量が $y>0$ において $y\pm x=0$ 直線上の弦の運動量に変換されることを意味する.

文 献

岩村聯, 石垣春夫, 鈴木文夫, 邦訳, 1971, SCHWARTZ 著超関数の理論, 岩波書店.
田治米鏡二, 1984, 超関数理論の概観と波動論への応用, 北海道大学自然災害科学資料センター.
吉田耕作, 渡辺二郎, 邦訳, 1966, SCHWARTZ 著物理数学の方法, 岩波書店.