



Title	波線パラメターについてのくわしい考察
Author(s)	田治米, 鏡二; TAZIME, Kyozi
Citation	北海道大学地球物理学研究報告, 49, 85-129
Issue Date	1987-03-30
DOI	https://doi.org/10.14943/gbhu.49.85
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/14161
Type	departmental bulletin paper
File Information	49_p85-129.pdf



波線パラメーターについてのくわしい考察

田治米 鏡 二

(昭和61年11月25日受理)

Investigations of the Ray-parameter in Detail

By Kyozi TAZIME

(Received November 25, 1986)

As AKI and RICHARDS (1980) introduced Cagniard-De Hoop method is very useful to the calculation of the strict wave form in case of PP or SS reflection. The shape of the front of these reflected waves is the same to that of the incident wave and the ray-parameter of them is the root of the second order equation. Therefore the algebraic solution is simple and the analysis of it is easy.

On the other hand various shapes of the front of PS, SP reflected waves and that of all transmitted waves are very complicated. The ray-parameter of these waves must be found in the roots of the fourth order equation. It is impossible in practice to find the analytical solution of the present problem in concrete terms. HELMBERGER (1968) proposed the numerical formula of obtaining the wave form of reflected rays in numerous layers. As him it is able to find the numerical solution for the ray-parameter of the transmitted wave. However the numerical solution cannot give the construction of the algebraic one.

Therefore analytical considerations and numerical experiments were used together in the present paper. At first, the present author reviewed in detail the well-known ray-parameter of SS reflected wave and had the foundation to attack unknown cases. He noticed that Fourier transform of the fundamental solution for the second order wave equation coincides with Hankel function and he used Fourier transform itself for the evaluation of the integral on Riemann sheets. The path of integration for Fourier transform completes the branch of the hyperbola extending over positive and negative sides of the imaginary part of the ray-parameter. When the variable is changed from the ray-parameter to the time, however, the integral on the both sides becomes equal to each other. Thus the result due to Fourier transform coincides with that due to Laplace transform. Then the wave form of the head wave was obtained. It was reconfirmed that the amplitude of the head wave was insensitive to the ratio of the wave velocities in two layers.

Next, the present author intended to find any suitable approximation to the strict solution of the transmitted ray-parameter Q . It was easy to get approximate Q in the region of the large travel time T . But the solution near the stationary phase Q_s is important where $dT/dQ=0$ and Snell's law is satisfied. Therefore another simple approximation was obtained which represented the strict solution near Q_s . Any approximation is expressed by the respective hyperbola. The strict solution over whole range extends from a part of the representative hyperbola near Q_s to a part of that suitable to large T . In the middle range of T the strict solution is seen on the common tangential straight line of the above two hyperbolas.

Looking only at the geometrical transmitted wave, the path of integration can be reduced to the hyperbola which represents the strict solution near Q_s .

内 容

I. カニヤール法の適用

1. 平面波から合成される円筒波
2. 波線パラメターの絶対値が無限大の円周上の積分値
3. リーマン面の作り方
4. 基本的な演算

II. SH 波の反射と透過

5. 反射係数と透過係数
6. 平面境界における円筒波の反射と透過
7. 反射波に対する演算
8. head wave についての厳密解

III. 透過波線パラメターの追跡

9. 透過波線に対するスネルの法則
10. 透過波線パラメターの近似解(1)
11. 透過波線パラメターの近似解(2)
12. 透過波線パラメターのきわめて厳密に近い解(3)
13. 近似解についての吟味
14. 波線パラメター p から走時 τ への変数変換およびこれを用いた透過波の波形の演算式
15. 2つの双曲線に共通な切線の方程式
16. 解析的な近似解のまとめ

I. カニヤール法の適用

1. 平面波から合成される円筒波

2次元の位置座標 (x, z) を図 1.1 のような直角座標とし、時間座標を t とする。さらに、無限に広い媒質 1 内の実体波の速度を c_1 とすると、2次元非斉次波動方程式

$$\left(\frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \psi_1(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x}, t) \quad (1.1)$$

のゼロ初期条件

$$\psi_1(\mathbf{x}, 0) = \dot{\psi}_1(\mathbf{x}, 0) = 0; \quad \dot{\psi} = \partial \psi / \partial t \quad (1.2)$$

に対する解は2次元波動方程式の基本解と呼ばれ、次のようになる(田治米, 1984):

$$\psi_1(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \frac{Y(t - r_1/c_1)}{\sqrt{t^2 - (r_1/c_1)^2}}; \quad r_1 = \sqrt{x^2 + z^2}. \quad (1.3)$$

ただし上式の $Y(t)$ はヘビーサイド関数である。ゆえに $\psi_1(\mathbf{x}, t)$ の発現時の波面は図 1.1 のように半径 r_1 の円筒なので、 $\psi_1(\mathbf{x}, t)$ は円筒波である。

さて(1.3)のフーリエ変換は既出(田治米, 1984)のように

$$\Psi_1(\mathbf{x}, \omega) = \mathcal{F} \psi_1(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1(\mathbf{x}, t) e^{i\omega t} dt = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\omega r_1/c_1). \quad (1.4)$$

この式の ω は角周波数を意味し、 $H_0^{(1)}(\omega r_1/c_1)$ は第1種第0次ハンケル関数であって、これは(1.1)の ∇^2

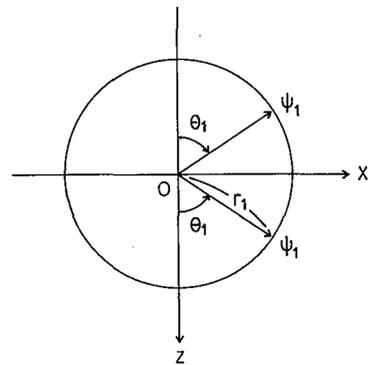


Fig. 1.1. Coordinates of the space and the wave front of the cylindrical wave in medium 1.

を円筒座標で表わした時の一般解を表わす円筒関数の一族である。

一方(1.3)により

$$\phi_1(\mathbf{x}, |\infty|) = \dot{\phi}_1(\mathbf{x}, |\infty|) = 0 \tag{1.5}$$

なので、

$$\mathcal{F} \dot{\phi}_1 = [\dot{\phi}_1 e^{i\omega t}]_{-\infty}^{\infty} - i\omega [\phi_1 e^{i\omega t}]_{-\infty}^{\infty} - \omega^2 \int_{-\infty}^{\infty} \phi_1 e^{i\omega t} dt = -\omega^2 \Psi_1(\mathbf{x}, \omega).$$

しかるにシュワルツによると (岩村ら, 1971. 田治米, 1984),

$$\mathcal{F} \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{i\omega t} dt = 1 \tag{1.6}$$

であり、1の逆フーリエ変換は

$$\mathcal{F}^{-1} 1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} d\omega = \delta(t). \tag{1.7}$$

ゆえに(1.1)の両辺のフーリエ変換を作ると

$$(\nabla^2 + \omega^2/c_1^2) \Psi_1(\mathbf{x}, \omega) = -\delta(\mathbf{x}). \tag{1.8}$$

これは(1.1)の $\phi_1(\mathbf{x}, t)$ に $\Psi_1(\mathbf{x}, \omega) \exp(-i\omega t)$ を、 $\delta(t)$ に $\exp(-i\omega t)$ を代入した微分方程式

$$\left(\frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \Psi_1(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t} = \delta(\mathbf{x}) e^{-i\omega t} \tag{1.9}$$

と同じであり、(1.4)が(1.8)の解である。

しかるに $p_1 = 1/c_1$ とおき、波線パラメータ p を用いると、ベッセル関数論において

$$H_0^{(1)}(\omega p_1 r_1) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(p_1 x + \eta_1 |z|)} \frac{d\eta_1}{\eta_1}; \quad \eta_1 = \sqrt{p_1^2 - \eta_1^2} \tag{1.10}$$

であることが知られている。ゆえに(1.10)によって円筒波を平面波から合成することができる。すなわち(1.10)を(1.4)に代入すると

$$\Psi_1(\mathbf{x}, \omega) = \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(p_1 x + \eta_1 |z|)} \frac{d\eta_1}{\eta_1}. \tag{1.11}$$

実は(1.1)の解(1.3)を求めるよりも(1.8)の解(1.4)を求める方が容易である。しかも媒質が平面境界を持つ場合に t に無関係な境界条件を満させるためには、解を(1.10)のように平面波から合成しておかなければならない。

境界値問題においては(1.11)よりも一般的な積分形

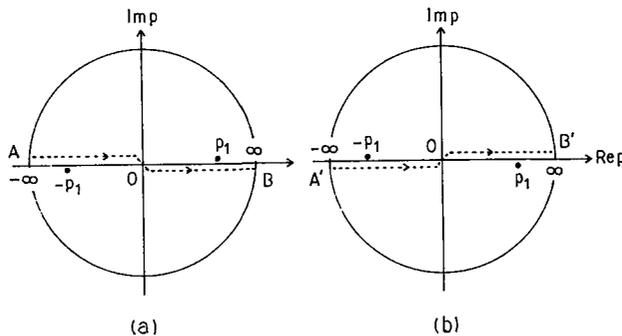


Fig. 1. 2. The original path of the integration.

$$\Psi_1\{\mathbf{x}, \omega; F\} = \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(p) e^{i\omega(\rho\mathbf{x} + \eta_1|z|)} \frac{dp}{\eta_1} \quad (1.12)$$

に遭遇する。上式の $F(p)$ は p のみの関数である。

積分(1.11)の η_1 は $p = \pm ip_1$ にそれぞれ2個の分岐点を有するので、これを避けるための当初の積分路は図1.2(a)又は(b)の点線である。ただしこのままでは積分を実施することがむずかしい。ゆえに p の複素数平面上において当初の積分路を変形し、既知の積分公式を利用する方針が採用される。

2. 波線パラメータの絶対値が無限大の円周上の積分値

図1.2のような当初の積分路を適当に変形するためには、 p 平面上の半径 $|p|$ が無限大の円周上の積分値が問題になる。この際に(1.11)の η_1 は p の2個関数なので

$$\lim_{|p| \rightarrow \infty} \eta_1 = \lim_{|p| \rightarrow \infty} (\pm ip). \quad (2.1)$$

ゆえに上式右辺の正負の符号ごとに調べる必要がある。しかるに図1.1によると

$$x = r_1 \sin \theta_1, \quad |z| = r_1 \cos \theta_1. \quad (2.2)$$

ゆえに

$$p = |p| e^{i\gamma} = |p| (\cos \gamma + i \sin \gamma) \quad (2.3)$$

とおき、まず(2.1)の正符号を採用すると

$$\lim_{|p| \rightarrow \infty} \eta_1 = \lim_{|p| \rightarrow \infty} (+ip) = \lim_{|p| \rightarrow \infty} (-\text{Im } p + i \text{Re } p). \quad (2.4)$$

この場合は(1.11)は $|p| = \infty$ の円周上において次のようになる

$$\lim_{|p| \rightarrow \infty} \Psi_1(\mathbf{x}, \omega) = \frac{i}{4\pi} \lim_{|p| \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} e^{-\omega|p|r_1(\cos(\gamma-\theta_1) - i \sin(\gamma-\theta_1))} d\gamma. \quad (2.5)$$

しかるに、一般の定積分において

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad (2.6)$$

なので、円弧 \widehat{ab} 上において(2.5)は次のようになる

$$\left| \lim_{|p| \rightarrow \infty} \Psi_1(\mathbf{x}, \omega) \right| \leq \frac{1}{4\pi} \lim_{|p| \rightarrow \infty} \int_a^b e^{-\omega|p|r_1 \cos(\gamma-\theta_1)} d\gamma. \quad (2.7)$$

ゆえに図2.1(a)の点線の半円周上において(2.7)は0である。

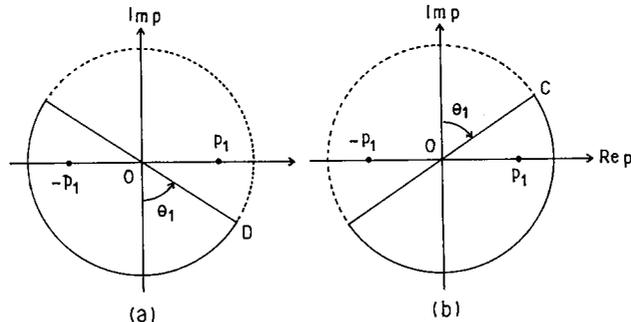


Fig. 2. 1. The integral on the circumference of the circle having infinitely large radius of the ray-parameter. θ_1 means the incident angle. At $|p| \rightarrow \infty$ (a) $\eta_1 = ip$ but (b) $\eta_1 = -ip$.

今度は(2.1)の負符号を採用し

$$\lim_{|p| \rightarrow \infty} \eta_1 = \lim_{|p| \rightarrow \infty} (-ip) = \lim_{|p| \rightarrow \infty} (\text{Im} p - i \text{Re} p) \quad (2.8)$$

とすると、(2.7)の代りに

$$\lim_{|p| \rightarrow \infty} |\Psi_1(x, \omega)| \leq \frac{1}{4\pi} \lim_{|p| \rightarrow \infty} \int_a^b e^{\omega |p| r_1 \cos(\gamma + \theta_1)} d\gamma. \quad (2.9)$$

ゆえにこれは図2.1(b)の点線の半円周上において0になる。

図1.2の当初の積分路を变形する際には、図2.1(a)又は(b)の点線部分を積分路の1部に利用して適当な閉回路を作る工夫が行われる。

後の(3.5)に見られるように被積分関数の指数部の ω が is に変り

$$-s(px + \eta_1 |z|)$$

の場合は(2.1)~(2.3)により

$$\lim_{|p| \rightarrow \infty} \eta_1 = \lim_{|p| \rightarrow \infty} (\pm ip) \text{ に対して}$$

$$-s(px + \eta_1 |z|) = -s|p| r_1 \{ \sin(\theta_1 \pm \gamma) + i \cos(\theta_1 \pm \gamma) \}. \quad (2.10)$$

ゆえに $|p| = \infty$ の円弧上の積分値が0であるのは図2.2(a), (b)の点線の半円周上である。図2.1と図2.2とを比較すると、互いに $\pi/2$ だけのずれがある。

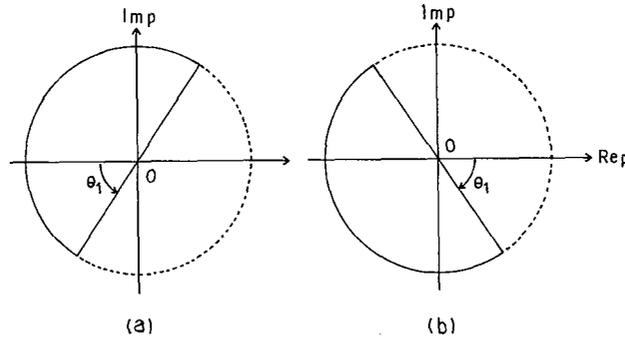


Fig. 2. 2. The integral on the circumference of the circle having infinitely large radius of the ray-parameter where $\omega = is$. θ_1 means the incident angle. At $|p| \rightarrow \infty$ (a) $\eta_1 = ip$ but (b) $\eta_1 = -ip$.

3. リーマン面の作り方

上述のように積分(1.11)の η_1 は p の2価関数なので、積分値を1価に確定させるために、 η_1 の正負に対応する2葉の p の複素数平面を用意してリーマン面を作り、かつ2葉の中のいずれかの1葉上に積分路を設定する必要がある。

積分路を設定するリーマン面の葉を選ぶに当っては、物理学的に理解されやすい結果が得られるように、その葉上の $\text{Re} \eta_1$ 又は $\text{Im} \eta_1$ の符号を正負のいずれかに指定する。

しかるに(2.4)と(2.8)によると

$$\lim_{|p| \rightarrow \infty} \eta_1 = \lim_{|p| \rightarrow \infty} \sqrt{p^2 - p^2} = \lim_{|p| \rightarrow \infty} (\pm ip) = \lim_{|p| \rightarrow \infty} (\mp \text{Im} p \pm i \text{Re} p). \quad (3.1)$$

ゆえに $|p| = \infty$ の円周上の $\text{Re} \eta_1$ の符号は上式の $\pm ip$ に応じて図3.1(a)又は(b)のようになる。ただしこれらの図の実線の半円周は $\text{Re} \eta_1 > 0$ を、破線は $\text{Re} \eta_1 < 0$ を意味する。

同様に $\text{Im}\eta_1$ の符号は図 3.2 (a)又は(b)のようになり、実線の半円周は $\text{Im}\eta_1 > 0$ を、破線は $\text{Im}\eta_1 < 0$ を意味する。

以上の数学的考察結果のみによると、積分路を設定する葉の選び方は4通りあり、リーマン面を作るために分岐点(± p_1)からの分岐線を $|p| = \infty$ においてそれぞれ図 3.1 又は図 3.2 の波型線につなげなければならない。それにしても4通りの選び方は多すぎる。

これらの選び方を絞るために「 $|z| = \infty$ において(1.11)が発散しない」との物理学的な境界条件を課すると、

$$\text{Im}\eta_1 > 0 \tag{3.2}$$

でなければならない。すると図 3.2 (a)又は(b)が選ばれる。しかし図 1.2 と図 3.2 とを重ねると、カニヤールの積分路が分岐線を横断するので、積分の演算が複雑である。

このために(1.11)の積分変数を $\xi = \omega p$ に変えた後に $s = -i\omega$ とおき、あらためて積分変数を p に戻すと

$$\Psi_1(x, s) = \frac{1}{4\pi} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{-ie^{-s(px + \eta_1|z|)}}{\eta_1} dp. \tag{3.3}$$

ゆえに今度は(3.3)に条件

$$\text{Re}\eta_1 > 0 \tag{3.4}$$

を課すと、 $|z| = \infty$ において(3.3)は発散しない。式(3.3)の $\Psi_1(x, s)$ は実は(1.3)のラプラス変換であって、今度の積分路は図 3.1 の分岐線を横断しない。しかも p の虚軸上において η_1 は実数かつ p の偶関数である。ゆえに(3.3)はさらに次のように変形される

$$\Psi_1(x, s) = \frac{1}{2\pi} \text{Im} \int_0^{i\infty} e^{-s(px + \eta_1|z|)} \frac{dp}{\eta_1}. \tag{3.5}$$

式(1.12)の $F(p)$ が p の偶関数である場合はこれと全く同じ扱いができる。(3.5)に対しては図 3.1 (b)の葉上に積分路を設ければよい。AKI and RICHARDS (1980) が述べているカニヤール法のリーマン面の作り方はこれである。

しかしここでは積分(1.11)に直接(3.4)を課してみよう。すると(3.4)は $|z| = \infty$ からの反射波がないことを意味し、これも1種の物理学的境界条件である。

$|z| = \infty$ において変位も速度も0であれば $|z| = \infty$ からの反射波はない。逆に $|z| = \infty$ からの反射波が存在しないためには $|z| = \infty$ において変位も速度も0でなければならない。ゆえに(1.11)に対して radiation condition (3.2), (3.4)は窮極的には表裏一体と考えられる。

そこで図 1.2 (a)と図 2.1 および図 3.1 を重ねると図 3.3 のようになる。この図の $\text{Re}\eta_1 > 0$ なる実線の半

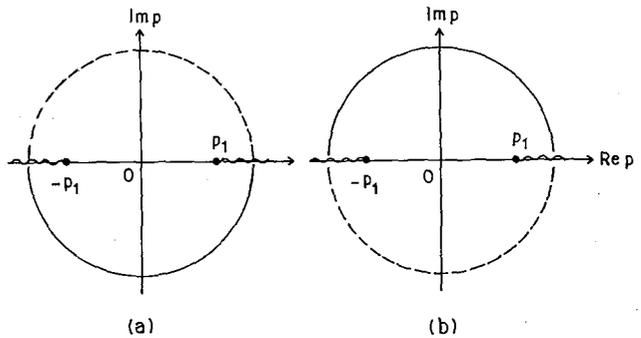


Fig. 3.1. The sign of $\text{Re}\eta_1$ on the circumference of the circle having infinitely large radius of the ray-parameter. At $|p| \rightarrow \infty$ (a) $\eta_1 = ip$ but (b) $\eta_1 = -ip$.

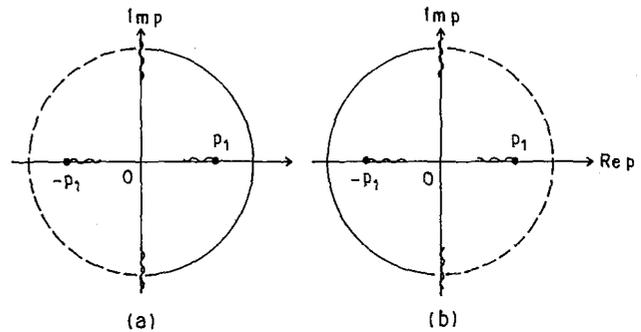


Fig. 3.2. The sign of $\text{Im}\eta_1$ on the circumference of the circle having infinitely large radius of the ray-parameter. At $|p| \rightarrow \infty$ (a) $\eta_1 = ip$ but (b) $\eta_1 = -ip$.

円周に着目すると、点線の半円周上において積分値は0なので、図3.3(a)において当初の積分路の1部は次のように変えられる

$$\int_0^\infty \frac{dp}{\eta_1} = \int_0^D \frac{dp}{\eta_1} \quad (3.6)$$

同様に、図3.3(b)において

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dp}{\eta_1} = \int_{-\infty}^0 \frac{dp}{\eta_1} = \int_C^0 \frac{dp}{\eta_1} \quad (3.7)$$

ただし図3.3の(a)と(b)とは別々のリーマン面なので、(3.6)の積分路と(3.7)の積分路とは、いずれも $\text{Re}\eta_1 > 0$ の葉上にあるにもかかわらず、別々に演算を実施しなければならない。

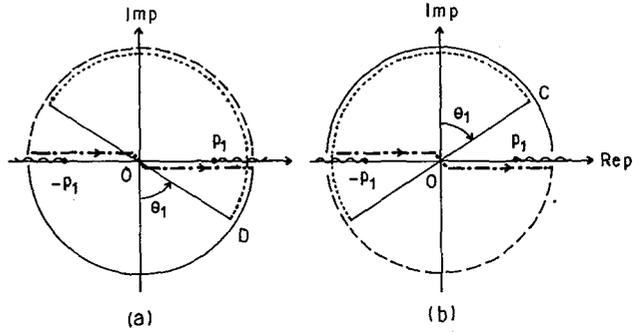


Fig. 3.3. The original path of the integration, the integral on the circumference of the circle having infinitely large radius and the sign of $\text{Re}\eta_1$ on it. At $|p| \rightarrow \infty$ (a) $\eta_1 = ip$ (b) $\eta_1 = -ip$.

4. 基本的な演算

式(1.11)の指数関数部に着目して

$$\tau(p) = px + \eta_1 |z| \quad ; \quad \eta_1 = \sqrt{p_1^2 - p^2} \quad (4.1)$$

の τ を正の実数とし、これを(1.11)に代入すると、

$$\Psi_1(x, \omega) = \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} \frac{dp}{\eta_1} \quad (4.2)$$

次に(4.1)を p について解くと

$$p r_1^2 = \begin{cases} x\tau \pm |z|\sqrt{p_1^2 r_1^2 - \tau^2} & : \tau \leq p_1 r_1, \\ x\tau \pm i|z|\sqrt{\tau^2 - p_1^2 r_1^2} & : \tau \geq p_1 r_1. \end{cases} \quad (4.3)$$

$$p r_1^2 = \begin{cases} x\tau \pm i|z|\sqrt{\tau^2 - p_1^2 r_1^2} & : \tau \leq p_1 r_1, \\ x\tau \pm |z|\sqrt{p_1^2 r_1^2 - \tau^2} & : \tau \geq p_1 r_1. \end{cases} \quad (4.4)$$

さらに(4.1)を p について微分すると

$$\frac{d\tau}{dp} = \frac{x\sqrt{p_1^2 - p^2} - |z|p}{\sqrt{p_1^2 - p^2}} = \frac{x\tau - p r_1^2}{|z|\sqrt{p_1^2 - p^2}} \quad (4.5)$$

ゆえに(4.5)の右辺の分子に(4.3)又は(4.4)を代入すると

$$\frac{d\tau}{dp} = \begin{cases} \mp \frac{\sqrt{p_1^2 r_1^2 - \tau^2}}{\eta_1} & : \tau \leq p_1 r_1, \\ \mp \frac{i\sqrt{\tau^2 - p_1^2 r_1^2}}{\eta_1} & : \tau \geq p_1 r_1. \end{cases} \quad (4.6)$$

$$\frac{d\tau}{dp} = \begin{cases} \mp \frac{i\sqrt{\tau^2 - p_1^2 r_1^2}}{\eta_1} & : \tau \leq p_1 r_1, \\ \mp \frac{\sqrt{p_1^2 r_1^2 - \tau^2}}{\eta_1} & : \tau \geq p_1 r_1. \end{cases} \quad (4.7)$$

上式の符号 \mp はそれぞれ(4.3), (4.4)の符号 \pm に対応している。しかも $\tau = p_1 r_1$ の時に $d\tau/dp = 0$ なので、この τ を(4.3), (4.4)に代入した場合の p を特に p_0 と記すと

$$p_0 = p_1 x / r_1 \quad (4.8)$$

はサドル・ポイントであって

$$\tau(p_0) = p_1 r_1. \quad (4.9)$$

さて(4.3)の概略を示すと図4.1のようになる。実線は(4.3)の負符号に、点線は正符号に対応している。しかるに(4.1)に戻ると $\tau = 0$ を与える p は負でなければならないので、図4.1の点線部分を無視し、 τ と

p とを 1 対 1 に対応させよう。実は点 $(p_1, p_1 x)$ より下方の点線部分は (4.1) を 2 乗したために生じた見かけ上の解にすぎない。このような考察によると、(4.3)、(4.6) の根号の符号は次のように限定される

$$p r_1^2 = x \tau - |z| \sqrt{p_1^2 r_1^2 - \tau^2}, \quad \frac{d\tau}{dp} = \frac{\sqrt{p_1^2 r_1^2 - \tau^2}}{\eta_1} : \tau \leq p_1 r_1. \quad (4.10)$$

一方 (4.4) の p は複素数なので

$$\operatorname{Re} p = x \tau / r_1^2, \quad \operatorname{Im} p = \pm (|z| / r_1^2) \sqrt{\tau^2 - p_1^2 r_1^2} \quad (4.11)$$

とおき、これらから τ を消去すると

$$(\operatorname{Re} p)^2 / x^2 - (\operatorname{Im} p)^2 / z^2 = (p_1 / r_1)^2. \quad (4.12)$$

これは図 4.2 のサドル・ポイント p_s を頂点とし、 \overline{OC} 、 \overline{OD} 直線を漸近線とする双曲線 $C p_s D$ である。ゆえに図 4.1 をも参考にして、 $\tau = 0$ から ∞ に至るまでの p を追跡すると図 4.2 の太い実線のようになり、(a)、(b) の 2 路線はいずれも $\operatorname{Re} \eta_1 > 0$ の葉上にある。路線上の矢印は (3.6)、(3.7) の積分路の向きを示す。すると積分路の向きと τ の増す向きは (a) では同じであるのに反し、(b) では逆である。このことは (4.7) の (+) 符号が $\operatorname{Im} p < 0$ に、(-) 符号が $\operatorname{Im} p > 0$ に対応することと同調している。

さて図 4.2 (a) の閉曲線 $OD p_s O$ 内に特異点は存在しないので、(3.6) の右辺はさらに次のように変形される

$$\int_0^D \frac{dp}{\eta_1} = \left(\int_0^{p_s} + \int_{p_s}^D \right) \frac{dp}{\eta_1}. \quad (4.13)$$

ゆえに (4.2) を思い出しながら区間 $[0, p_s]$ に対しては (4.10)、区間 $[p_s, D]$ に対しては (4.7) を用いて、(4.13) の右辺の積分変数を p から τ に変えると

$$\int_0^{p_s} e^{i\omega\tau} \frac{dp}{\eta_1} = \int_{\tau(0)}^{\tau(p_s)} e^{i\omega\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{p_1^2 r_1^2 - \tau^2}}, \quad \int_{p_s}^D e^{i\omega\tau} \frac{dp}{\eta_1} = \int_{\tau(p_s)}^{\infty} e^{i\omega\tau} \frac{d\tau}{i\sqrt{\tau^2 - p_1^2 r_1^2}}.$$

ゆえに (4.9) を用いると (3.6) は次のようになる

$$\int_0^{\infty} \frac{dp}{\eta_1} = \int_{\tau(0)}^{p_1 r_1} e^{i\omega\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{p_1^2 r_1^2 - \tau^2}} + \frac{1}{i} \int_{p_1 r_1}^{\infty} e^{i\omega\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2 - p_1^2 r_1^2}}. \quad (4.14)$$

他方図 4.2 (b) の閉曲線 $O p_s CO$ 内にも特異点は存在しないので、(3.7) の右辺は次のように変形される

$$\int_c^0 \frac{dp}{\eta_1} = \left(\int_c^{p_s} + \int_{p_s}^0 \right) \frac{dp}{\eta_1}. \quad (4.15)$$

ゆえにふたたび (4.10) と (4.7) を用いて (4.15) の積分変数を変えると

$$\int_{p_s}^0 e^{i\omega\tau} \frac{dp}{\eta_1} = \int_{\tau(p_s)}^{\tau(0)} e^{i\omega\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{p_1^2 r_1^2 - \tau^2}},$$

$$\int_c^{p_s} e^{i\omega\tau} \frac{dp}{\eta_1} = \int_{\infty}^{\tau(p_s)} e^{i\omega\tau} \frac{d\tau}{-i\sqrt{\tau^2 - p_1^2 r_1^2}}.$$

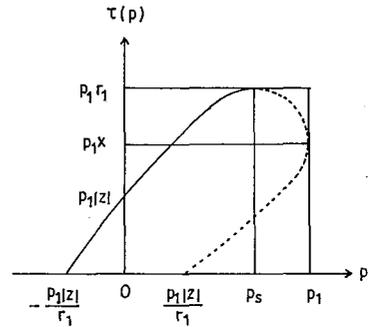


Fig. 4. 1. A schema of $\tau(p)$. $\tau \leq p_1 r_1$.

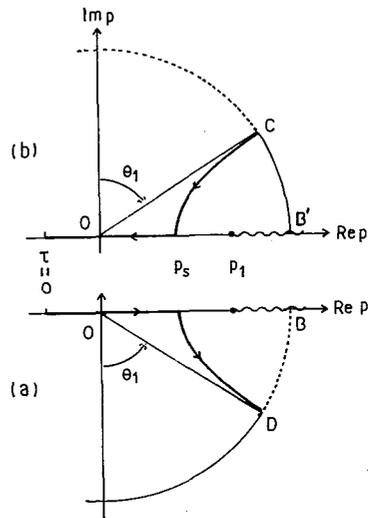


Fig. 4. 2. The loci of p accompanied by the change of τ . At $|p| \rightarrow \infty$ (a) $\eta_1 = ip$ but (b) $\eta_1 = -ip$.

ゆえに(3.7)は次のようになる

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dp}{\eta_1} = \int_{p_1 r_1}^{\tau^{(0)}} e^{i\omega\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{p_1^2 r_1^2 - \tau^2}} - \frac{1}{i} \int_{\infty}^{p_1 r_1} e^{i\omega\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2 - p_1^2 r_1^2}} \quad (4.16)$$

しかるに(4.14)および(4.16)の右辺の τ に関する積分はもはや p に関するリーマン面の区別を要しないし、いずれも(1.4)のようなフーリエ変換の形にすることができる。ゆえに両者を加え合すと、それぞれの右辺第1項は打ち消し合うので、(4.2)は結局次のようになる

$$\Psi_1(x, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Y(\tau - p_1 r_1)}{\sqrt{\tau^2 - p_1^2 r_1^2}} e^{i\omega\tau} d\tau \quad (4.17)$$

これの逆フーリエ変換が(1.3)であることは明らかであるが、実際に演算を行ってみると、(1.7)により

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{F}} \Psi_1(x, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Y(\tau - p_1 r_1)}{\sqrt{\tau^2 - p_1^2 r_1^2}} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(\tau-t)} d\omega \right\} d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Y(\tau - p_1 r_1)}{\sqrt{\tau^2 - p_1^2 r_1^2}} \delta(\tau-t) d\tau = \frac{1}{2\pi} \frac{Y(t - p_1 r_1)}{\sqrt{t^2 - p_1^2 r_1^2}} \end{aligned} \quad (4.18)$$

図4.2の積分路上においては $\text{Im}\tau(p) = 0$ である代りに $\text{Re}\tau(p)$ は一定でないので、サドル・ポイント p_s を頂点とする双曲線(4.12)は最峻降下路ではない。

AKI and RICHARDS (1980) が述べているカニヤール法においてはフーリエ変換(1.11)ではなく、ラプラス変換(3.5)によって(4.18)の右辺に達した。その際には図4.2の(b)のみに着目すればよい。

式(1.11)の代りに(1.12)を問題にする場合も、 $F\{p(\tau)\}$ は図4.2(a)、(b)の双曲線の分枝上において同値なので、結果的には(4.17)の被積分関数に $F\{p(\tau)\}$ を乗じるだけでよい。

さて(2.2)の入射角 θ_1 が $\pi/2$ になると

$$x = r_1, z = 0 \quad (4.19)$$

なので、(4.8)のサドル・ポイント p_s は p_1 に一致し、双曲線(4.12)は次のようになる

$$(\text{Re } p)^2 = p_1^2 + \lim_{z \rightarrow 0} (\text{Im } p / z)^2 \quad (4.20)$$

ゆえに $\text{Re } p > 0$ の領域において

$$\text{Re } p = p_1 + \text{不定な正の実数} \quad (4.21)$$

しかもこの式の不定な実数は0から無限大までの勝手な値なので、 $\theta_1 = \pi/2$ の場合の積分路は図4.3の太い実線のようになる。すなわち図4.3の $\overline{B' p_s}$ および $\overline{p_s B}$ はそれぞれ図4.2の双曲線(4.12)の分枝 $\overline{C p_s}$ および $\overline{p_s D}$ の $\theta_1 = \pi/2$ における極限と考えられる。

ただし図4.3(a)の円弧上においては

$$\eta_1 = |\text{Re } \eta_1| + i |\text{Im } \eta_1|$$

しかるに p_s とDとは同じ葉上にあつたので、

$$\overline{p_s B} \text{ 上において } \eta_1 = +i |\text{Im } \eta_1|, \text{ Im } p < 0 \quad (4.22)$$

一方図4.3(b)の円弧上においては

$$\eta_1 = |\text{Re } \eta_1| - i |\text{Im } \eta_1|$$

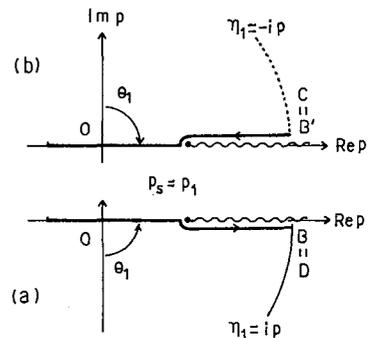


Fig. 4.3. The path of the integration when the incident angle becomes $\pi/2$.

しかるに p_s と C とは同じ葉上にあつたので

$$\overline{B'p_s} \text{ 上において } \eta_1 = -i |\operatorname{Im} \eta_1|, \operatorname{Im} p > 0. \quad (4.23)$$

ゆえに (4.7) の η_1 に (4.22) 又は (4.23) を代入すると, $\operatorname{Im} p$ の正負に関せず

$$\frac{d\tau}{dp} = \frac{\sqrt{\tau^2 - p_1^2 r_1^2}}{|\operatorname{Im} \eta_1|}; \tau > p_1 r_1. \quad (4.24)$$

これによると, p の実軸上の $d\tau/dp$ は $\tau \leq p_1 r_1$ に応じて (4.10) 又は (4.24) になることがわかる. すると $\theta_1 = \pi/2$ の場合は $z=0$ なので, (4.2) は (3.6), (3.7) を経て (4.22), (4.23) により (4.13), (4.15) の代りに次のように分解される.

$$\int_0^\infty \frac{dp}{\eta_1} = \int_0^B \frac{dp}{\eta_1} = \int_0^{p_s} \frac{dp}{\eta_1} + \int_{p_s}^B \frac{dp}{i|\operatorname{Im} \eta_1|},$$

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dp}{\eta_1} = \int_{B'}^0 \frac{dp}{\eta_1} = \int_{B'}^{p_s} \frac{dp}{-i|\operatorname{Im} \eta_1|} + \int_{p_s}^0 \frac{dp}{\eta_1}.$$

ゆえに (4.10) 又は (4.24) により積分変数を p から τ に変えて, 上の 2 式を加え合せると (4.17) と同じ結果が得られる. 換言すると, (4.17) は $\theta_1 = \pi/2$ の場合にも通用することが確かめられた.

II. SH 波の反射と透過

5. 反射係数と透過係数

図 5.1 のような x, z 平面内の $z < 0$ に媒質 1 があり, $z > 0$ に媒質 2 がある, 両者は $z=0$ において接しているものとする. さらに媒質 1, 2 内の量にそれぞれ添字 1, 2 を付けてそれぞれを区別する. たとえば c_1, c_2 はそれぞれ媒質 1, 2 に固有な SH 波の速度である.

さて, x が増加する方向に進行する波のみを考察することにし, 媒質 1 側から境界面に向う平面 SH 波の変位を v_{inc} とすると, 波動方程式 (1.1) の一般解として次のように表わされる

$$v_{inc}(x, t) = A e^{i(\xi x + \beta_1 z - \omega t)}, \beta_1 = \{(\omega/c_1)^2 - \xi^2\}^{1/2}. \quad (5.1)$$

ただし, ξ, ω はいずれも変数分離の際に用いられた定数であり, A も x や t に無関係な定数である.

この v_{inc} が境界面 $z=0$ に達すると反射波 v_{ref} と透過波 v_{tr} とが生じる. この際に境界条件を満足させやすくするために, いずれも (5.1) に似た平面波を用いると, それぞれ次のように表わされる

$$v_{ref}(x, t) = B e^{i(\xi_1 x - \beta_{11} z - \omega_1 t)}; \beta_{11} = \{(\omega_1/c_1)^2 - \xi_1^2\}^{1/2}, \quad (5.2)$$

$$v_{tr}(x, t) = C e^{i(\xi_2 x - \beta_2 z - \omega_2 t)}; \beta_2 = \{(\omega_2/c_2)^2 - \xi_2^2\}^{1/2}. \quad (5.3)$$

上式の B や C は (5.1) の A と同様に x や t に無関係な任意の定数である.

しかるに $z=0$ において, まず媒質 1, 2 の変位が連続でなければならない. ゆえに (5.1) ~ (5.3) により, 次式が x および t のいかんによらず成立しなければならない

$$A e^{i\xi x} = C e^{i\xi_2 x} e^{i(\omega - \omega_2)t} - B e^{i\xi_1 x} e^{i(\omega - \omega_1)t}. \quad (5.4)$$

しかるに上式の左辺は t に無関係なので, t のいかんによらず (5.4) が成立するためには $\omega = \omega_1 = \omega_2$ でなければならない. さらに (5.4) は x のいかんによらず成立しなければならないので $\xi = \xi_1 = \xi_2$ でなければ

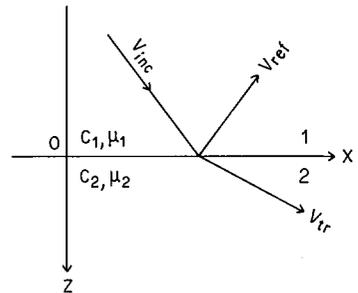


Fig. 5. 1. The reflection and the transmission of the plane SH ray. $c_1 < c_2$.

ならない。

すると(5.4)から次の結果が得られる

$$A+B=C. \tag{5.5}$$

しかも(5.2), (5.3)は次のように書き換えられる

$$v_{ref}(x, t) = B e^{i(\xi x - \beta_1 z - \omega t)} \quad ; \quad \beta_1 = \{(\omega/c_1)^2 - \xi^2\}^{1/2}, \tag{5.6}$$

$$v_{tr}(x, t) = C e^{i(\xi x + \beta_2 z - \omega t)} \quad ; \quad \beta_2 = \{(\omega/c_2)^2 - \xi^2\}^{1/2}. \tag{5.7}$$

次に $z=0$ において媒質 1, 2 のストレスも連続でなければならない。ゆえに媒質 1, 2 の剛性率を μ_1, μ_2 とすると

$$\mu_1(A\beta_1 - B\beta_1) = \mu_2 C\beta_2. \tag{5.8}$$

ゆえに(5.5)と(5.8)とを連立させ、 $B/A, C/A$ について解き、

$$K_{12} = \left(1 - \frac{\mu_2 \beta_2}{\mu_1 \beta_1}\right) / \left(1 + \frac{\mu_2 \beta_2}{\mu_1 \beta_1}\right) \tag{5.9}$$

とおくと

$$B/A = K_{12}, \quad C/A = 1 + K_{12}. \tag{5.10}$$

上式の K_{12} および $1 + K_{12}$ はそれぞれ媒質 1 側からの入射波に対する $z=0$ 面における反射係数および透過係数である。

さらに

$$\xi = \omega p, \quad 1/c_1 = p_1, \quad 1/c_2 = p_2 \tag{5.11}$$

とおくと

$$\beta_2/\beta_1 = \sqrt{p_2^2 - p^2} / \sqrt{p_1^2 - p^2}. \tag{5.12}$$

ゆえに(5.9)の K_{12} は波線パラメータ p のみの関数である。

6. 平面境界における円筒波の反射と透過

図 6.1 の媒質 2 内にある線振源 E から発射される円筒 SH 波の変位 $v_{inc}(x, t)$ のフーリエ変換は(1.11)に準じて次のように表わされる

$$V_{inc}(x, \omega) = A \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\xi x \pm \beta_2(z-E))} \frac{d\xi}{\beta_2}; \quad z-E \geq 0. \tag{6.1}$$

この $V_{inc}(x, \omega)$ が境界面 $z=0$ に達すると、(5.1)以下に述べられたように $V_{ref}(x, \omega)$ と $V_{tr}(x, \omega)$ とが生じるが、境界条件を満足させやすくするために、(6.1)に似た表現を用いる。その際に(5.4)以下の考察を参考にして、 V_{ref} にも V_{tr} にも V_{inc} と同じ ξ, ω を用いる。すると

$$V_{ref}(x, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} B(\xi) e^{i(\xi x + \beta_2(E+z))} \frac{d\xi}{\beta_2}, \tag{6.2}$$

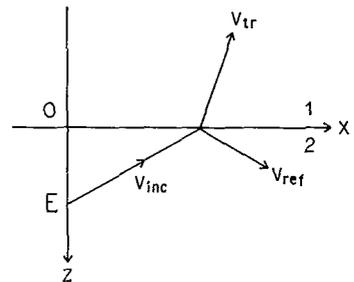


Fig. 6.1. The reflection and the transmission of the cylindrical SH ray. $c_1 < c_2$.

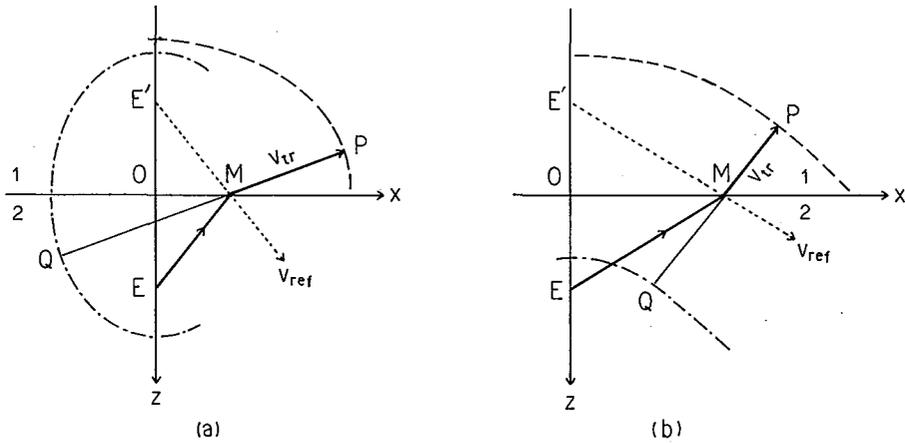


Fig. 6. 2. The wave front of the transmitted ray. (a) $c_1/c_2=1.5$ (b) $c_2/c_1=1.5$.

$$V_{tr}(x, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\xi) e^{i(\xi x + \beta_2 E - \beta_1 z)} \frac{d\xi}{\beta_2} \tag{6.3}$$

ここで注意すべきは V_{ref} の波面は V_{inc} の波面と同様な円筒であるのに反し、 V_{tr} の波面は円筒でないことである。

図 6.2 のように入射波の波線と境界面との交点を M とし、M を通る反射波の波線を逆向きに延長させて z 軸との交点を E' とする。すると $\overline{ME'} = \overline{ME}$ なので、 $z = 0$ に対する E の鏡像 E' は入射角のいかんによらず、いつも反射波の見かけ上の振源である。ゆえに反射波の波面は円筒である。

他方、透過波線 \overline{MP} の逆向きの延長線上に

$$\overline{MQ}/c_1 = \overline{ME}/c_2 \tag{6.4}$$

なる点を作図すると、点 Q(x,z) は次の曲線上にある (田治米, 1969) :

$$\pm \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \quad c_2 \leq c_1; \quad a^2 = |1 - \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2| b^2, \quad b = E \frac{c_1}{c_2} \tag{6.5}$$

すなわち Q の軌跡は図 6.2 の 1 点鎖線のような (a) 楕円又は (b) 双曲線である。点 Q は透過波の見かけの振源であるが、入射角が変わると Q は曲線 (6.5) 上を移動するので、透過波の波面は円筒でない。

図 6.2 の 1 点鎖線は $t = 0$ における透過波の波面と考えられる。ゆえに 1 点鎖線上の各点を中心とし $c_1 t$ を半径とする円群を描くと、これらの円群の包絡線は図に破線で示されているような t 時間後の透過波の波面である。これらの波面はいずれも波線と直交するが、もはや楕円でも双曲線でもない。

さて (6.3) 以前に戻り、 $z = 0$ における変位およびストレスの連続条件を課すると

$$\int_{-\infty}^{\infty} [A + B(\xi) - C(\xi)] e^{i(\xi x + \beta_2 E)} \frac{d\xi}{\beta_2} = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\mu_2 \{A\beta_2 - B(\xi)\beta_2\} - \mu_1 C(\xi)\beta_1] e^{i(\xi x + \beta_2 E)} \frac{d\xi}{\beta_2} = 0.$$

しかるに (5.5) を得た時のように x のいかんによらず上の 2 式が成立するためには、それぞれの式の [] 内が 0 でなければならない。

すると (5.5) と同じ式および (5.8) の添字 1, 2 を交換した式が得られる。ゆえに今度は (5.9) の添字を交換し

$$B/A = K_{21}, \quad C/A = 1 + K_{21}; \quad K_{21} = \left(1 - \frac{\mu_1 \beta_1}{\mu_2 \beta_2}\right) / \left(1 + \frac{\mu_1 \beta_1}{\mu_2 \beta_2}\right) \tag{6.6}$$

これらの B , C を (6.2), (6.3) に代入すると

$$V_{ref}(x, \omega) = A \int_{-\infty}^{\infty} K_{21}(\xi) e^{i(\xi x + \beta_2(E+z))} \frac{d\xi}{\beta_2}, \quad (6.7)$$

$$V_{tr}(x, \omega) = A \int_{-\infty}^{\infty} \{1 + K_{21}(\xi)\} e^{i(\xi x + \beta_2 E - \beta_1 z)} \frac{d\xi}{\beta_2}. \quad (6.8)$$

7. 反射波に対する演算

式(6.1)の A に (1.11) の $i/(4\pi)$ を代入し、さらに (5.11) の p を用いると、(6.1), (6.7) および (6.12) はそれぞれ次のように表わされる：

$$V_{inc}(x, \omega) = \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(p x \pm \eta_2(z-E))} \frac{dp}{\eta_2}, \quad z-E \geq 0, \quad (7.1)$$

$$V_{ref}(x, \omega) = \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{21}(p) e^{i\omega(p x + \eta_2(E+z))} \frac{dp}{\eta_2}, \quad (7.2)$$

$$V_{tr}(x, \omega) = -\frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{1 + K_{21}(p)\} e^{i\omega(p x + \eta_2 E - \eta_1 z)} \frac{dp}{\eta_2}; \quad (7.3)$$

$$\eta_1 = \sqrt{p_1^2 - p^2}, \quad \eta_2 = \sqrt{p_2^2 - p^2}.$$

しかも (5.9) の K_{12} を用いると

$$-K_{21}(p) = K_{12}(p) = \left(1 - \frac{\mu_2 \eta_2}{\mu_1 \eta_1}\right) / \left(1 + \frac{\mu_2 \eta_2}{\mu_1 \eta_1}\right). \quad (7.4)$$

さて (7.2) の積分を 4 に沿って実施するために (4.1) に準じて

$$\tau(p) = p x + \eta_2(E+z) \quad (7.5)$$

とおき、これを正の実数とし、(7.2) に代入すると

$$V_{ref}(x, \omega) = \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{21}(p) e^{i\omega\tau(p)} \frac{dp}{\eta_2}. \quad (7.6)$$

しかも (7.5) を p について解くと

$$p r_2^2 = x \tau - (E+z) \sqrt{p_2^2 r_2^2 - \tau^2}, \quad \frac{d\tau}{dp} = \frac{\sqrt{p_2^2 r_2^2 - \tau^2}}{\eta_2}; \quad \tau \leq p_2 r_2. \quad (7.7)$$

$$p r_2^2 = x \tau \pm i(E+z) \sqrt{\tau^2 - p_2^2 r_2^2}, \quad \frac{d\tau}{dp} = \mp \frac{\sqrt{\tau^2 - p_2^2 r_2^2}}{\eta_2}, \quad \text{Im } p \geq 0;$$

$$\tau \geq p_2 r_2, \quad r_2 = \sqrt{x^2 + (E+z)^2}. \quad (7.8)$$

まず $\tau = p_2 r_2$ を (7.7), (7.8) の第 2 等式に代入すると $d\tau/dp = 0$ なので、この τ を第 1 等式に代入した場合の p を特に p_0 と記すと

$$p_0 = p_2 x / r_2 = p_2 \sin \theta_2 \quad (7.9)$$

は (7.5) の τ のサドルポイントである。

上式の θ_2 は図 7.1 に示されているように反射波線の入射角であり、同図の E' は振源 E の鏡像であって、反射波線の見かけの振源である。

このゆえに V_{ref} の波面は円筒である。

次に (7.8) の第 1 等式の $\text{Re } p$ と $\text{Im } p$ とから τ を消去すると

$$(\text{Re}p)^2/x^2 - (\text{Im}p)^2/(E+z)^2 = (p_2/r_2)^2. \quad (7.10)$$

これは図7.2のサドルポイント p_s を頂点とし、 \overline{OC} , \overline{OD} 直線を漸近線とする双曲線 Cp_sD である。

式(7.9)の θ_2 は点 E' から点 P に至る最短経路を与え、この入射角以外の反射波線の経路は図7.1の点線のようになる。換言すると $\tau(p_s) = p_2 r_2$ は点 E' から点 P に至る最小走時であって、(7.5)の一般の走時 $\tau(p)$ は図7.1の点線の波線の走時である。そしてこのような一般の $\tau(p)$ に対する p の軌跡が図7.2の双曲線 Cp_sD である。このように、図7.1の幾何学的な反射波線 ESP は図7.2において点 p_s に集中している。

一方において(7.6)の被積分関数は $p = \pm p_1$ および $\pm p_2$ にそれぞれ2価の分岐点を有するので、積分値を1価に確定させるためにそれぞれの分岐点から割目を入れてリーマン面を作らなければならない。その際に双曲線がいつもリーマン面の $\text{Re}\eta_2 > 0$ および $\text{Re}\eta_1 > 0$ の葉上にあり、しかも分岐線と双曲線とが交叉しないようにしよう。そのために3の考察に従がい図7.2の波型線のような分岐線を p の実軸上に設ける。

すると3で調べたように図3.3の $\text{Re}\eta_2 > 0$ の葉上の $|p| = \infty$ の円周の点線部分において(7.6)の被積分関数は0なので、(7.6)はまず次のように書き変えられる

$$V_{ref}(x, \omega) = \frac{i}{4\pi} \left(\int_C^0 + \int_0^D \right) K_{21}(p) e^{i\omega\tau(p)} \frac{dp}{\eta_2}. \quad (7.11)$$

しかるに図7.2のように $p_2 < p_1$ の場合は漸近線 \overline{OC} , \overline{OD} と双曲線 Cp_sD とに囲まれた閉面内に特異点は存在しないので、

$$\left(\int_C^0 + \int_0^D \right) \frac{dp}{\eta_2} = \left(\int_C^{p_s} + \int_{p_s}^D \right) \frac{dp}{\eta_2}. \quad (7.12)$$

上に述べたように、図7.2の点 p_s から幾何学的反射波が生じ、点 p_s 以外の双曲線部分は言わば散乱波に寸応されるので、この部分は積分値に大きな貢献をしないことが予想される。

しかし波形を求めるためには $\tau(p_s)$ 以後を無視することはできない。そこで(7.12)の積分変数を(7.8)に
より p から τ に変えると

$$\int_C^{p_s} \frac{dp}{\eta_2} = -\frac{1}{i} \int_{\infty}^{p_2 r_2} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2 - p_2^2 r_2^2}}, \quad \int_{p_s}^D \frac{dp}{\eta_2} = \frac{1}{i} \int_{p_2 r_2}^{\infty} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2 - p_2^2 r_2^2}}. \quad (7.13)$$

ゆえに(7.12)とこれらを(7.11)に代入すると

$$V_{ref}(x, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{21}(\tau) \frac{Y(\tau - p_2 r_2)}{\sqrt{\tau^2 - p_2^2 r_2^2}} e^{i\omega\tau} d\tau. \quad (7.14)$$

ゆえにこれの逆フーリエ変換は

$$v_{ref}(x, t) = \overline{\mathcal{F}} V_{ref}(x, \omega) = \frac{1}{2\pi} K_{21}\{t(p)\} \frac{Y(t - p_2 r_2)}{\sqrt{t^2 - p_2^2 r_2^2}}. \quad (7.15)$$

ただし現実の反射波形は実数で表わされるべきなので、(7.15)の $K_{21}(t)$ はこれの実数部を採用すべきである。

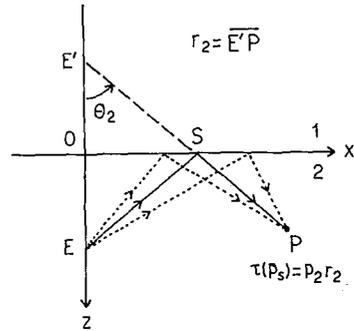


Fig. 7.1. Various reflected rays.

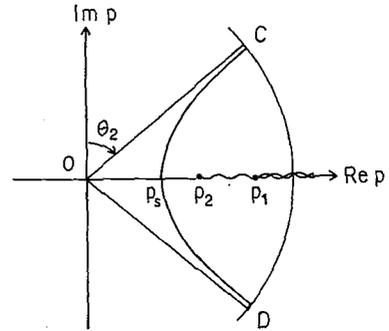


Fig. 7.2. The locus of p accompanied by the change of τ . $\tau > \tau(p_s)$, $p_2 < p_1$.

$$\therefore v_{ref}(x, t) = \frac{1}{2\pi} [Re K_{21}\{t(p)\}] \frac{Y(t - p_2 r_2)}{\sqrt{t^2 - p_2^2 r_2^2}} \quad (7.16)$$

上式の $K_{21}\{t(p)\}$ の数値を求めるには、まず(7.8)によって τ に対する p を算出する。この p は図 7.2 の双曲線 $p_s D$ 上の 1 点である。次にこの p を(7.4)に代入すると $K_{21}(t)$ が算出される。しかし p は複素数なので、 $K_{21}(t)$ の算出にはかなり手間がかかる。

入射角 θ_2 が $\pi/2$ になると(7.9)により p_s は p_2 に一致する。この時図 7.2 の C, D は図 7.3 のようにそれぞれ B', B に一致

するので、双曲線 $Cp_s D$ は路線 $B'p_2 B$ に重なる。この際に留意すべきは図 7.2 について説明したように、双曲線 $Cp_s D$ はいつも $Re\eta_2 > 0$ かつ $Re\eta_1 > 0$ の葉上にあることである。すなわち双曲線は分岐点のまわりを 1 周しない、ゆえに図 7.3 の $\overline{BP_2}$ と $\overline{P_2 B}$ とは分岐線を挟んでいるにもかかわらず、路線上の η_2, η_1 の符号は変わらない。ゆえに(7.16)までの経過と結果は $\theta_2 = \pi/2$ においても通用する。

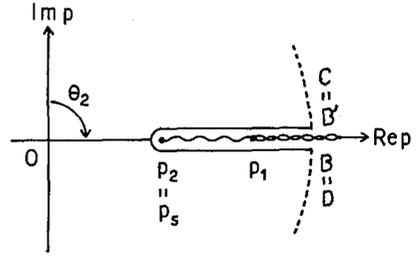


Fig. 7.3. The path of the integration when incident angle θ_2 becomes $\pi/2$.

8. head wave についての厳密解

今までと同様に $c_1 < c_2$ であるが、今度は図 8.1(a)のように振源 E が媒質 1 側にあるものとする。すると(7.1)の代りの

$$V_{inc}(x, \omega) = \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(p x + \eta_1 |E - z|)} \frac{dp}{\eta_1} \quad (8.1)$$

に対する反射波および透過波はそれぞれ(7.2)および(7.3)の代りに次のようになる

$$V_{ref}(x, \omega) = \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{12}(p) e^{i\omega(p x + \eta_1 (|E| - z))} \frac{dp}{\eta_1}, \quad (8.2)$$

$$V_{tr}(x, \omega) = \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + K_{12}) e^{i\omega(p x + \eta_1 (|E| + \eta_2 z))} \frac{dp}{\eta_1}. \quad (8.3)$$

ここで(7.5)と同様に

$$\tau(p) = p x + (|E| + |z|) \sqrt{p^2 - p^2}, \quad r_1 = \sqrt{x^2 + (|E| + |z|)^2} \quad (8.4)$$

とおくと、(7.8)と同様に

$$p r_1^2 = x \tau \mp i (|E| + |z|) \sqrt{\tau^2 - p_1^2 r_1^2}, \quad \frac{d\tau}{dp} = \mp i \frac{\sqrt{\tau^2 - p_1^2 r_1^2}}{\eta_1}; \quad (8.5)$$

$$Im p \geq 0, \quad \tau \geq p_1 r_1.$$

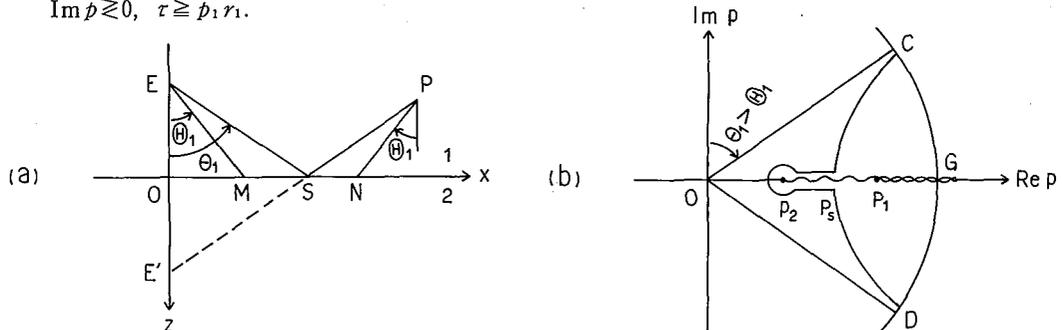


Fig. 8.1. (a) The ray of the head wave. (b) The path of the integration suitable to it. Θ_1 means the critical angle, $c_1 < c_2$.

しかるに (7.9) の時と同様に, (8.4) に対するサドル・ポイントは

$$\tau = p_1 r_1 \text{ の時の } p \text{ の座標 すなわち } p_s = p_1 x / r_1. \quad (8.6)$$

ゆえに $p_s < p_2$ の場合の積分路は図 7.2 の $Cp_s D$ と本質的に変わらず, 同図の θ_2 を θ_1 に読み換えるだけでよい. ゆえに (7.16) の添字の 1 と 2 とを交換すると直ちに次の結果が得られる.

$$v_{ref}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \{ \text{Re } K_{12}(t) \} \frac{Y(t - p_1 r_1)}{\sqrt{t^2 - p_1^2 r_1^2}}. \quad (8.7)$$

問題は図 8.1 (b) のように $p_s > p_2$ の場合である. この場合にも同図の双曲線 $Cp_s D$ は図 8.1 (a) の反射波線 ESP およびこれに後続する散乱波に対応するので, $Cp_s D$ 部分については (8.7) が成立する. ただしそのためには $p_s < p_2$ の場合と同様に $Cp_s D$ の全経路が $\text{Re}\eta_2 > 0$ の葉上選ばなければならない. さもないと Cp_s 上と $p_s D$ 上で η_2 の符号を変えねばならず, その結果 (7.12) の右辺に対応する積分の和が, 積分変数を p から τ に変えた際に, 0 になる.

しかるに積分路を他の葉に移せる場所は分岐点およびそれに対応する無限遠点だけなので, 点 p_s において路線の存在する葉を変更することはできない. ゆえに積分路 $Cp_s p_2 p_s D$ の全体が $\text{Re}\eta_2 > 0$ の同じ葉上に設けられなければならない.

ゆえに図 8.1 (b) の路線 $p_s p_2 p_s$ 上において $\text{Re}\eta_2$ の符号は変化しない. 一見すると分岐線の両側において η_2 の符号が違うように思われるが, 実は閉路線 $OCp_s p_2 p_s DO$ は分岐点 p_2 を一周していない.

以上の理由により, (8.2) に含まれる積分値

$$V_h(x, \omega) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(- \int_{p_2 + i\varepsilon}^{p_s + i\varepsilon} dp + \int_{p_2 - i\varepsilon}^{p_s - i\varepsilon} dp \right) \quad (8.8)$$

は積分変数を p から τ に変えると 0 でなくなる. この式の ε は 0 に近い正の実数である.

しかも今までと違い, $\tau(p_2) < \tau(p) < \tau(p_s) < \tau(p_1)$ なので, (8.7) の分母の

$$\sqrt{t^2 - p_1^2 r_1^2} \text{ を } i\sqrt{p_1^2 r_1^2 - t^2} \text{ に変える} \quad (8.9)$$

と, $K_{12}(t) / (i\sqrt{p_1^2 r_1^2 - t^2})$ が実数であるためにはこの部分を $\{\text{Im } K_{12}(t)\} / \sqrt{p_1^2 r_1^2 - t^2}$ に書き変えなければならない.

さらに (8.8) は積分区間 $[p_2, p_s]$ においてのみ定義されているので, $t_h = \tau(p_2)$ とおき, (8.6) の $\tau(p_s) = p_1 r_1$ を用いると, (8.7) の

$$Y(t - p_1 r_1) \text{ は } Y(t - t_h) - Y(t - p_1 r_1) \text{ に}$$

書き変えられる. ゆえに

$$v_h(x, t) = \frac{1}{2\pi} \{ \text{Im } K_{12}(t) \} \frac{Y(t - t_h) - Y(t - p_1 r_1)}{\sqrt{p_1^2 r_1^2 - t^2}}. \quad (8.10)$$

この際に (8.4) および図 8.1 (a) を参照すると

$$\begin{aligned} t_h = \tau(p_2) &= p_2 x + (|E| + |z|) \sqrt{p_1^2 - p_2^2} \\ &= \overline{EM} / c_1 + \overline{MN} / c_2 + \overline{NP} / c_1. \end{aligned} \quad (8.11)$$

これが head wave の走時であり, (8.10) は head wave の波形である. (8.10) は $t = t_h$ に出現し, 反射波の到来時 $t = r_1 / c_1$ まで続く. ゆえに head wave を全反射の際の反射波の前駆又は浸み出しとみなす人もいる.

$\mu_2 / \mu_1 \approx 1$ および $c_2 / c_1 \approx 1$ の場合は図 8.2 のように head wave (破線) の走時と幾何学的反射波 (実線)

の走時との区別をつけにくい。

波形の数値計算

$p_2 \leq p < p_1$ において, (5.11)を用いると, (5.9)は次のように表わされる

$$K_{12}(p) = \left(1 + i \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{\sqrt{p^2 - p_2^2}}{\sqrt{p_1^2 - p^2}}\right) / \left(1 - i \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{\sqrt{p^2 - p_2^2}}{\sqrt{p_1^2 - p^2}}\right). \quad (8.12)$$

ゆえに

$$q = p/p_1, \quad \alpha = p_2/p_1 = \sin \theta_1 < 1 \quad (8.13)$$

とおき, 媒質1, 2の密度を等しいと仮定すると, (8.12)から次の表現が得られる

$$\text{Im } K_{12}(q) = 2\alpha^2 \frac{\sqrt{q^2 - \alpha^2}}{\sqrt{1 - q^2}} / \left(\alpha^4 + \frac{q^2 - \alpha^2}{1 - q^2}\right). \quad (8.14)$$

すると

$$\frac{d \text{Im } K_{12}}{dq} = -\frac{2\alpha^2(1 - \alpha^2)q}{\sqrt{1 - q^2} \sqrt{q^2 - \alpha^2}} \frac{q^2(1 + \alpha^4) - \alpha^2(1 + \alpha^2)}{\{\alpha^4(1 - q^2) + q^2 - \alpha^2\}^2} = 0 \quad (8.15)$$

を満たす q_m は

$$q_m = \alpha \sqrt{(1 + \alpha^2)/(1 + \alpha^4)} \quad (8.16)$$

によって与えられ, この時

$$[\text{Im } K_{12}(q)]_{max} = \text{Im } K_{12}(q_m) = 1. \quad (8.17)$$

このように $\text{Im } K_{12}(q)$ の極大値が α に無関係に1である点に注目される。

さて(8.4)を p について解き, (7.7)に習うと

$$q = \frac{p}{p_1} = \frac{x}{r_1} \frac{t}{p_1 r_1} - \frac{|E| + |z|}{r_1} \sqrt{1 - \left(\frac{t}{p_1 r_1}\right)^2}. \quad (8.18)$$

ゆえに

$$\cot \theta_1 = (|E| + |z|)/x, \quad t/(p_1 r_1) = \sin \lambda \quad (8.19)$$

とおくと(8.18)は次のようになる。

$$q = -\cos(\theta_1 + \lambda) = \sin(\theta_1 + \lambda - \pi/2) \geq \sin \theta_1. \quad (8.20)$$

$$\therefore \pi > \theta_1 + \lambda \geq \pi/2 + \theta_1. \quad (8.21)$$

ゆえに $\theta_1 + \lambda = \pi/2 + \theta_1$ すなわち

$$t/(p_1 r_1) = \sin(\pi/2 + \theta_1 - \theta_1) \text{ の時 } \text{Im } K_{12}(t) = 0. \quad (8.22)$$

一方(8.16)と(8.20)によると

$$t/(p_1 r_1) = \sin\{\cos^{-1}(-q_m) - \theta_1\} \text{ の時 } \text{Im } K_{12}(t) = 1. \quad (8.23)$$

しかるに $\cos^{-1}(-q_m) = \pi/2 + Q$ とおくと(8.16)により

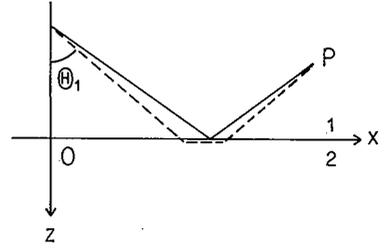


Fig. 8. 2. The comparison of the ray of the head wave with that of the geometrically reflected wave having the incident angle close to the critical one.

$$\sin Q = q_m \approx \sin \theta_1 (1 + \alpha^2/2 + \dots).$$

$$\therefore \cos^{-1}(-q_m) - \theta_1 - (\pi/2 + \theta_1 - \theta_1) = Q - \theta_1 \geq 0. \tag{8.24}$$

ゆえに(8.22)と(8.23)とは、 α が小さいと、時間的にきわめて接近する。

数値計算に際してさらに注意すべきは $\lambda = \pi/2$ 近傍において $\cos \lambda$ が0に近づくことである。この近傍においては λ の間隔を小さくしなければならない。

以上の注意をした後に、まず α をパラメータとし、(8.14)により $\text{Im}K_{12}(q)$ を算出すると図8.3のようになる。

次に(8.20)を用いて q を $\theta_1 + \lambda$ に換算し、 θ_1 を第2のパラメータとして各 q に対する λ を求める。すると(8.19)により各 q に対する $t/(p_1 r_1)$ がわかる。

$t/(p_1 r_1) = 1$ すなわち $\lambda = \pi/2$ に対応する q は(8.20)により

$$q(\lambda = \pi/2) = -\cos(\theta_1 + \pi/2). \tag{8.25}$$

ゆえに入射角 θ_1 が0よりも大きくなるにつれて $q(\lambda = \pi/2)$ は1に近づく。

さて(8.18)~(8.20)のような置き方をすると(8.10)は次のように表わされる

$$v_h(x, t) = \frac{1}{2\pi p_1 r_1} \cdot \frac{\text{Im}K_{12}(t)}{\cos \lambda(t)} \cdot \{Y(t - t_h) - Y(t - p_1 r_1)\}. \tag{8.26}$$

これによると $1/(2\pi p_1 r_1)$ を振巾の単位とする head wave の変位波形は $\text{Im}K_{12}(t)/\cos \lambda$ によって表わされるので、それを図8.4に示した。

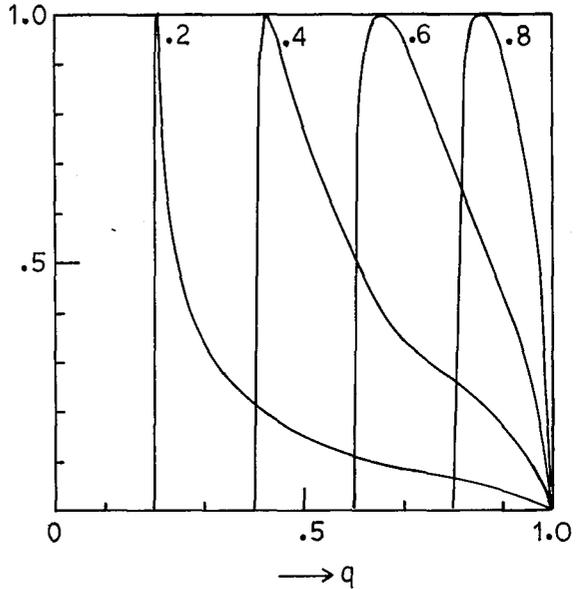


Fig. 8. 3. $\text{Im} K_{12}(q)$, being the parameter α .

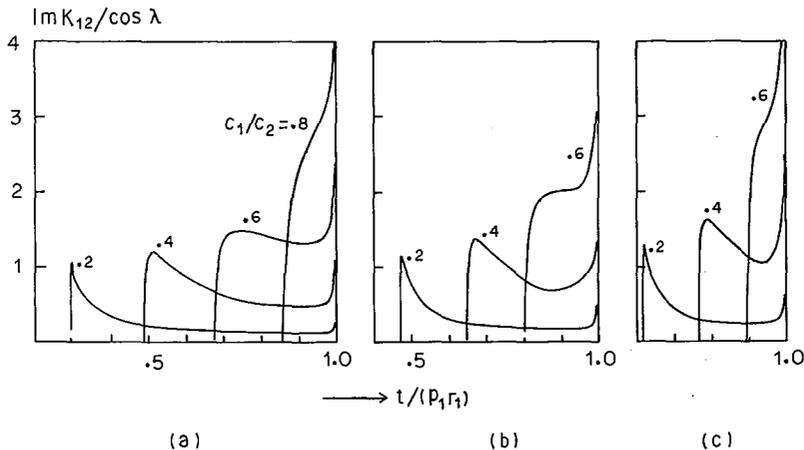


Fig. 8. 4. The wave form for the displacement of the head wave. A unit of the amplitude is $1/(2\pi p_1 r_1)$. (a) $(|E|+|z|)/x=0.1$, (b) $(|E|+|z|)/x=0.3$, (c) $(|E|+|z|)/x=0.5$.

これを見ると、幾何学的反射波の到着時 $t/(p_1 r_1) = 1$ 近くにおいて、すでにその到来の前兆が見られる。この部分を幾何学的反射波の浸み出しと呼ぶ人もいる。速度比 c_1/c_2 が 1 に近いと、head wave の振巾の極大は消えて幾何学的反射波につながってしまう。

幾何学的反射波の到着時の振巾は (8.7) により無限大なので、これにくらべると head wave の振巾は無視されるほど小さい。しかも head wave の振巾の極大値は c_1/c_2 によって余り変化しない。むしろ c_1/c_2 が 1 に近いほど極大値が大きいのには意外とも思われる。全反射の領域においては (8.17) が成立することと、head wave の全域が反射波の勢力圏内にあって (8.26) の分母の $\cos \lambda$ に支配されるからである。

しかしながら屈折法の実測上の見地からすると、head wave の立ち上りの時刻さえ確認できれば、速度比が 1 に近い 2 地層をも判別することができる。このことは屈折法に幸いして、屈折法の実用性を高めている。

head wave の速度波形

head wave の変位波形の $t=t_h$ における立ち上りが急激であることに注目して、(8.26) を t について微分すると、 $t=t_h$ 近傍において

$$\frac{dv_h(x, t)}{dt} = \frac{1}{2\pi p_1 r_1} \left\{ \frac{d \operatorname{Im} K_{12}}{dt} \frac{Y(t-t_h)}{\cos \lambda} + \operatorname{Im} K_{12} \frac{\delta(t-t_h)}{\cos \lambda} + \operatorname{Im} K_{12} \frac{d}{dt} \frac{1}{\cos \lambda} \right\}. \quad (8.27)$$

しかるに (8.14) によると $t=t_h$ すなわち $q=\alpha$ において $\operatorname{Im} K_{12} = 0$ なので、(8.27) の $\operatorname{Im} K_{12}$ を係数に持つ項はその時にいずれも 0 である。

一方 (8.19), (8.20) によると

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{1}{p_1 r_1 \cos \lambda}, \quad \frac{dq}{d\lambda} = \sin(\theta_1 + \lambda).$$

$$\therefore \frac{d}{dt} \operatorname{Im} K_{12} = \left(\frac{d}{dq} \operatorname{Im} K_{12} \right) \frac{dq}{dt} = \frac{\sin(\theta_1 + \lambda)}{p_1 r_1 \cos \lambda} \frac{d \operatorname{Im} K_{12}}{dq}. \quad (8.28)$$

しかるに (8.15) によると $q=\alpha$ において $d \operatorname{Im} K_{12} / dq = 1/0$ なので、この時 (8.28) は無限大である。ただし $t=t_h$ の直後において (8.28) が 0 になる場合は実際の dv_h/dt は 0 振巾のこの時間から始まるかのように見えるであろう。

さて (8.28) に (8.15) および (8.21) を代入すると (8.27) は次のように表わされる。

$$\frac{dv_h}{dt} = \frac{1}{\pi (p_1 r_1)^2} \frac{\alpha^2(1-\alpha^2)}{\cos^2 \lambda} \frac{q}{\sqrt{q^2-\alpha^2}} \frac{q^2(1+\alpha^4)-\alpha^2(1+\alpha^2)}{\{\alpha^4(1-q^2)+q^2-\alpha^2\}^2}. \quad (8.29)$$

$1/\{\pi(p_1 r_1)^2\}$ を振巾の単位として dv_h/dt を示すと図 8.5 のようになる。ただしこれに似た高周波の波形は一般には記録されない。

$c_1 = 1 \text{ km/s}$, $r_1 = 1 \text{ km}$ の時に $p_1 r_1 = 1 \text{ s}$ である。すると速度波形の初動の主要な周期は $1 \times 10^{-3} \text{ s}$ 以下である。しかるに計器の低周波フィルタのためと媒質の内部マサツのために、実際の測定においては高周波成分がいちぢるしくカットされるからである。

このことは実は図 8.4 の変位波形についても言える。

head wave の波形は、定性的には入射波形の積分形である。すると入射波の変位波形が $\delta(t)$ の場合は head wave の変位波形は階段関数 $Y(t-t_h)$ であり、head wave の速度波形は $\delta(t-t_h)$ になる。図 8.4 および図 8.5 においても head wave のこの性質が思い出される。

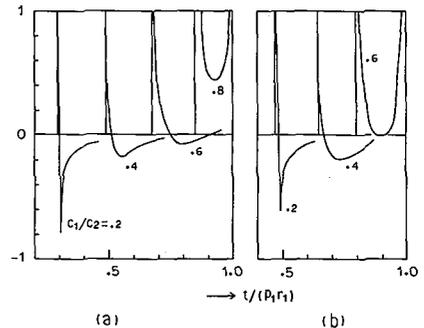


Fig. 8.5. The wave form for the particle velocity of the head wave. A unit of the amplitude is $1/\{\pi(p_1 r_1)^2\}$. (a) $(|E| + |z|)/x = 0.1$, (b) $(|E| + |z|)/x = 0.3$.

III. 透過波線パラメターの追跡

9. 透過波線に対するスネルの法則

直角座標 (x, z) を採用し、媒質 1, 2 の境界面を $z=0$ とすると、媒質 2 内の振源 $E(0, E)$ から媒質 1 内の測定点 $P(x, z)$ に至る波線の経路は図 9.1 の EMP のようになる。この際に M は波線の経路と境界面との交点であり、 \overrightarrow{EM} は入射波線、 \overrightarrow{MP} は透過波線と呼ばれる。

さて \overrightarrow{EM} , \overrightarrow{MP} の入射角をそれぞれ θ_2 , θ_1 とすると

$$x = E \tan \theta_2 + |z| \tan \theta_1. \quad (9.1)$$

次に媒質 1, 2 内の波の速度の大きさを c_1, c_2 とし

$$p_1 = 1/c_1, \quad p_2 = 1/c_2 \quad (9.2)$$

とおくと、点 E から点 P に至る波の走時は次のように表わされる

$$\tau = p_2 E \sec \theta_2 + p_1 |z| \sec \theta_1. \quad (9.3)$$

ただし一般には θ_2 は任意なので、(9.3) には図 9.1 の点線のような波路に対する走時も含まれる。

次に x, E, z, p_2 および p_1 を一定とし、(9.2), (9.3) の両辺を θ_2 について微分すると

$$\begin{aligned} E \sec^2 \theta_2 + |z| \sec^2 \theta_1 d\theta_1/d\theta_2 &= 0, \\ d\tau/d\theta_2 &= p_2 E \tan \theta_2 \sec \theta_2 + p_1 |z| \tan \theta_1 \sec \theta_1 d\theta_1/d\theta_2. \end{aligned} \quad (9.4)$$

さらに上の 2 式から $d\theta_1/d\theta_2$ を消去すると

$$d\tau/d\theta_2 = E \sec^2 \theta_2 (p_2 \sin \theta_2 - p_1 \sin \theta_1). \quad (9.5)$$

ゆえに

$$d\tau/d\theta_2 = 0 \quad (9.6)$$

の場合の θ_2, θ_1 に添字 s を付けて一般の θ_2, θ_1 と区別すると、(9.6) が満たされるためには (9.5) により

$$p_2 \sin \theta_{2s} = p_1 \sin \theta_{1s} \quad (9.7)$$

でなければならず、逆に (9.7) が成立すると (9.6) が満たされる。

しかも (9.4) の第 1 式によると $d\theta_1/d\theta_2 < 0$ なので、(9.7) の場合に (9.3) の τ は極小であって、(9.7) はスネルの法則に他ならない。

次に数値計算の便宜のために

$$T = \frac{\tau}{\sqrt{|Ez p_2 p_1|}}, \quad X = \frac{x}{E}, \quad Z = \frac{|z|}{E}, \quad Q_1 = \frac{p_1}{p_2} \quad (9.8)$$

とおいて各量を無次元化し、(9.1) と (9.7) とを連立させると

$$\left. \begin{aligned} X &= \tan \theta_{2s} + Z \tan \theta_{1s}, \\ \tan \theta_{1s} &= (\sin \theta_{2s}/Q_1) / \sqrt{1 - (\sin \theta_{2s}/Q_1)^2} \end{aligned} \right\} \quad (9.9)$$

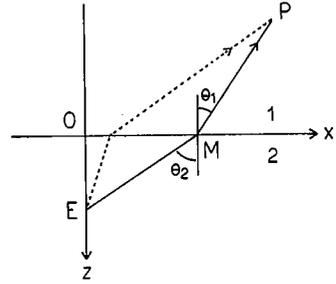


Fig. 9. 1. Paths of the transmitted ray in general.

しかるに(9.9)の第2式は図9.2のように示される。ゆえにこの図を用いると(9.9)により

$$X=5, Z=1, Q_1=2 \text{ の場合は } \theta_{2s}=77^\circ \text{ (9.10)}$$

であることがわかる。すると図9.1の点Mが決められる。

今述べたような図式解法によらずに、連立方程式(9.9)の θ_{2s} を代数的に解くのはきわめて面倒である。

さて(9.7)と(9.8)を参照し

$$\begin{aligned} p_s &= p_2 \sin \theta_{2s} = p_1 \sin \theta_{1s}, \\ Q_s &= p_s / \sqrt{p_2 p_1} = \sin \theta_{2s} / \sqrt{Q_1} \end{aligned} \quad (9.11)$$

とおくと、(9.10)により

$$Q_s = 0.689. \quad (9.12)$$

一方(9.8)により(9.3)も無次元化すると

$$T_s = \frac{1}{\sqrt{Q_1 Z}} \sec \theta_{2s} + \sqrt{Q_1 Z} \sec \theta_{1s}. \quad (9.13)$$

これに(9.10)を代入すると

$$\cos \theta_{2s} = 0.225 \text{ および } \cos \theta_{1s} = 0.873$$

なので

$$T_s = 4.76. \quad (9.14)$$

以上と違い、スネルの法則(9.7)に束縛されない一般の θ_2 に対して(9.1)と(9.3)とを連立させると

$$\tau = f(\theta_2) \text{ あるいは } \theta_2 = g(\tau) \quad (9.15)$$

となり、複素数値 τ と θ_2 との写像関係が得られる。ただし実際の関数形 $f(\theta_2)$ や $g(\tau)$ を求めるのは、図式解法によるとしても、きわめて面倒である。

そこで(9.11)に戻り、これを(9.3)に代入して θ_{2s} 、 θ_{1s} を消去すると

$$\begin{aligned} \tau_s &= p_2 E (\sin^2 \theta_{2s} + \cos^2 \theta_{2s}) \sec \theta_{2s} + p_1 |z| (\sin^2 \theta_{1s} + \cos^2 \theta_{1s}) \sec \theta_{1s} \\ &= p_s x + E \sqrt{p_2^2 - p_s^2} + |z| \sqrt{p_1^2 - p_s^2}. \end{aligned} \quad (9.16)$$

次に波路が(9.7)に束縛されない場合の波線パラメータ p を用い、走時(9.3)の代りに、(9.16)を単に次のように表わそう

$$\tau = p x + E \sqrt{p_2^2 - p^2} + |z| \sqrt{p_1^2 - p^2}. \quad (9.17)$$

実はこれは(7.3)の指数部の $i\omega$ の係数と同じであって、(9.11)の場合に

$$d\tau/dp = 0 \quad (9.18)$$

であり、(9.18)を満たす(9.17)の (p, τ) が (p_s, τ_s) である。

そこで(9.17)を無次元化するために、(9.8)の他に

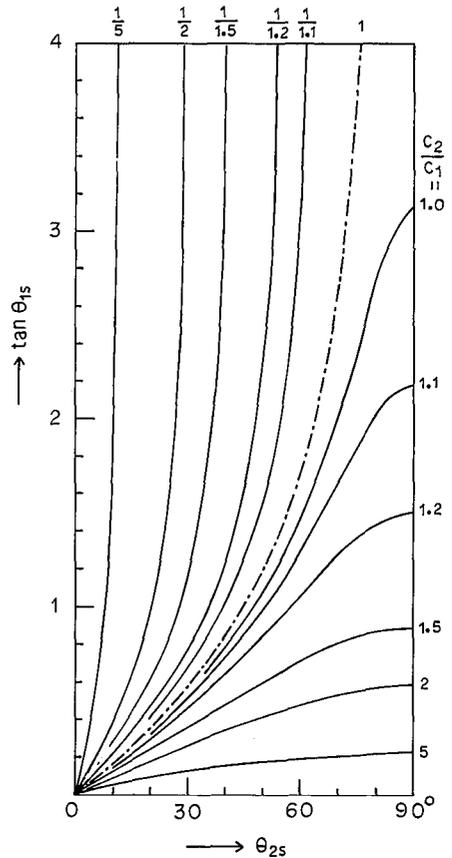


Fig. 9. 2. The relation between θ_2 and $\tan \theta_1$ when incident angles θ_2 and θ_1 obey Snell's law.

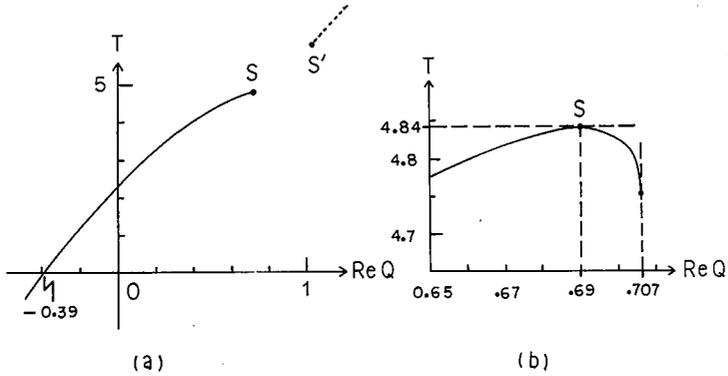


Fig. 9.3. Real T for real Q . $X=5$, $Z=1$, $Q_1=2$.

$$Q = p / \sqrt{p_2 p_1} \quad (9.19)$$

とおくと

$$T = Q \frac{X}{\sqrt{Z}} + \sqrt{\frac{1}{Z} \left(\frac{1}{Q_1} - Q^2 \right)} + \sqrt{Z(Q_1 - Q^2)}. \quad (9.20)$$

まず Q を実数として(9.10)の数値例に対して T の実数値を追跡すると図9.3のようになる。図(b)は図(a)の点 S 近傍の拡大である。図9.3(a),(b)によると次のことがわかる

$$(a) \quad T=0 \quad \text{に対して} \quad Q = -0.39. \quad (9.21)$$

一方 $Q > 0.707 = \sqrt{1/Q_1}$ において T の実数値は存在しない。これらのことは(9.20)において直観されたとおりである。

(b) 点 S において(9.18)と同じ

$$dT/dQ = 0 \quad (9.22)$$

が成立し、 $T > 4.84$ の実数値に対応する Q の実数値は存在しない。

ゆえに図9.3(b)の点 S に注目し、この座標を (Q_s, T_s) と記すと

$$Q_s = 0.690, \quad T_s = 4.84 \quad (9.23)$$

であって、図式解法の誤差の範囲内において当然のことながら(9.23)は(9.12)と(9.14)に一致する。換言するとスネルの法則に従う透過波線パラメータは(9.18)を満足させる。

図9.3において注意すべきは、点 (Q_s, T_s) において T は極小ではなくて極大であることである。

式(9.17)の両辺を p で微分すると

$$\frac{d\tau}{dp} = x - \frac{Ep}{\sqrt{p_2^2 - p^2}} - \frac{|z|p}{\sqrt{p_1^2 - p^2}}. \quad (9.24)$$

これに(9.11)の p_s を代入すると、(9.1)により(9.18)が得られる。

しかるに(9.24)の両辺を更に p で微分し、(9.11)の p_s を代入すると

$$\left[\frac{d^2\tau}{dp^2} \right]_{p=p_s} = - \left[\frac{E}{\sqrt{p_2^2 - p^2}} \left(1 + \frac{p^2}{p_2^2 - p^2} \right) + \frac{|z|}{\sqrt{p_1^2 - p^2}} \left(1 + \frac{p^2}{p_1^2 - p^2} \right) \right]_{p=p_s} < 0. \quad (9.25)$$

ゆえに

$$\left[d^2\tau/d\theta_2^2 \right]_{\theta_2=\theta_{2s}} > 0 \quad (9.26)$$

の場合とは符号が逆になる。

スネルの法則は(9.6)と(9.26)とを基本にしているので、 θ_2 の代りに ρ を用いると(9.18)と(9.25)とがスネルの法則を与える。

10. 透過波線パラメータの近似解(1)

スネルの法則(9.7)に束縛されない透過波線の走時 τ を追跡するには、(9.1)と(9.3)を連立させるよりも(9.17)又は(9.20)の方が好都合である。

ゆえに(9.20)の根号を開き、 Q の次数について整頓すると

$$\begin{aligned} & \left\{ \left(\frac{X^2}{Z} + Z + \frac{1}{Z} \right)^2 - 4 \right\} Q^4 - 4T \frac{X}{\sqrt{Z}} \left(\frac{X^2}{Z} + Z + \frac{1}{Z} \right) Q^3 + 2 \left\{ 2T^2 \frac{X^2}{Z} \right. \\ & + \left. \left(\frac{X^2}{Z} + Z + \frac{1}{Z} \right) \left(T^2 - ZQ_1 - \frac{1}{ZQ_1} \right) + 2 \left(Q_1 + \frac{1}{Q_1} \right) \right\} Q^2 \\ & - 4T \frac{X}{\sqrt{Z}} \left(T^2 - ZQ_1 - \frac{1}{ZQ_1} \right) Q + \left(T^2 - ZQ_1 - \frac{1}{ZQ_1} \right)^2 - 4 = 0. \end{aligned} \quad (10.1)$$

これは Q に関する4次方程式なので、(9.9)の場合と同様に、これを代数的に解くのはきわめて面倒である。

ゆえにまず $T=0$ を(10.1)に代入すると

$$\left\{ \left(\frac{X^2}{Z} + Z + \frac{1}{Z} \right)^2 - 4 \right\} Q^4 - 2 \left\{ \left(\frac{X^2}{Z} + Z + \frac{1}{Z} \right) \left(ZQ_1 + \frac{1}{ZQ_1} \right) - 2 \left(Q_1 + \frac{1}{Q_1} \right) \right\} Q^2 + \left(ZQ_1 - \frac{1}{ZQ_1} \right)^2 = 0. \quad (10.2)$$

$$\begin{aligned} \therefore & \left\{ \left(\frac{X^2}{Z} + Z + \frac{1}{Z} \right)^2 - 4 \right\} Q^2 = \frac{X^2}{Z} \left(ZQ_1 + \frac{1}{ZQ_1} \right) + \left(Z - \frac{1}{Z} \right) \left(ZQ_1 - \frac{1}{ZQ_1} \right) \\ & \pm 2 \frac{X}{\sqrt{Z}} \left\{ \frac{X^2}{Z} - \left(Q_1 - \frac{1}{Q_1} \right) \left(ZQ_1 - \frac{1}{ZQ_1} \right) \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (10.3)$$

ゆえに(9.10)の数値例に対しては

$$Q_0 = Q(T=0) = \pm 0.14 \quad \text{又は} \quad \pm 0.39. \quad (10.4)$$

しかるに $T=0$ に対する(9.20)の解は(9.21)のみなので、(10.4)のその他の解は(9.20)の根号を開いたことによって生じた余分の解である。ゆえに(10.3)の右辺の根号の符号は正に限られる。

ところで(10.1)の左辺は次のように書き変えられる

$$\begin{aligned} & \left\{ \left(\frac{X^2}{Z} + Z + \frac{1}{Z} \right)^2 - 4 \right\} Q^4 - 4T \frac{X}{\sqrt{Z}} \left(\frac{X^2}{Z} + Z + \frac{1}{Z} \right) Q^3 + 2 \left[2T^2 \frac{X^2}{Z} \right. \\ & + \left. \left(\frac{X^2}{Z} + Z + \frac{1}{Z} \right) \left(T^2 - ZQ_1 - \frac{1}{ZQ_1} \right) + 2 \left\{ 2 + \left(\sqrt{Q_1} - \frac{1}{\sqrt{Q_1}} \right)^2 \right\} \right] Q^2 \\ & - 4T \frac{X}{\sqrt{Z}} \left(T^2 - ZQ_1 - \frac{1}{ZQ_1} \right) Q + \left(T^2 - ZQ_1 - \frac{1}{ZQ_1} \right)^2 - 4 \\ & = \left\{ \left(\frac{X^2}{Z} + Z + \frac{1}{Z} + 2 \right) Q^2 - 2T \frac{X}{\sqrt{Z}} Q + T^2 - ZQ_1 - \frac{1}{ZQ_1} - 2 \right\} \\ & \cdot \left\{ \left(\frac{X^2}{Z} + Z + \frac{1}{Z} - 2 \right) Q^2 - 2T \frac{X}{\sqrt{Z}} Q + T^2 - ZQ_1 - \frac{1}{ZQ_1} + 2 \right\} + 4 \left(\sqrt{Q_1} - \frac{1}{\sqrt{Q_1}} \right)^2 Q^2. \end{aligned} \quad (10.5)$$

ゆえに

$$\left(\sqrt{Q_1} - 1/\sqrt{Q_1} \right)^2 / 2 \ll 1 \quad (10.6)$$

の場合に上式のゴチック字体の項を無視すると、(10.1)の左辺は近似的に次のように因数分解される

$$\left\{ \left(\frac{X^2}{Z} + Z + \frac{1}{Z} + 2 \right) Q^2 - 2T \frac{X}{\sqrt{Z}} Q + T^2 - ZQ_1 - \frac{1}{ZQ_1} - 2 \right\} \\ \cdot \left\{ \left(\frac{X^2}{Z} + Z + \frac{1}{Z} - 2 \right) Q^2 - 2T \frac{X}{\sqrt{Z}} Q + T^2 - ZQ_1 - \frac{1}{ZQ_1} + 2 \right\} \approx 0. \quad (10.7)$$

しかるに(9.21)のように $T=0$ の場合の Q は負の実数なので、(10.7)から次の結果が得られる

$$\left\{ \frac{X^2}{Z} + \left(\sqrt{Z} + \frac{1}{\sqrt{Z}} \right)^2 \right\} Q \approx \frac{X}{\sqrt{Z}} T \\ - \sqrt{\left\{ \frac{X^2}{Z} + \left(\sqrt{Z} + \frac{1}{\sqrt{Z}} \right)^2 \right\} \left(\sqrt{ZQ_1} + \frac{1}{\sqrt{ZQ_1}} \right)^2 - \left(\sqrt{Z} + \frac{1}{\sqrt{Z}} \right)^2 T^2} \quad (10.8)$$

又は

$$\left\{ \frac{X^2}{Z} + \left(\sqrt{Z} - \frac{1}{\sqrt{Z}} \right)^2 \right\} Q \approx \frac{X}{\sqrt{Z}} T \\ - \sqrt{\left\{ \frac{X^2}{Z} + \left(\sqrt{Z} - \frac{1}{\sqrt{Z}} \right)^2 \right\} \left(\sqrt{ZQ_1} - \frac{1}{\sqrt{ZQ_1}} \right)^2 - \left(\sqrt{Z} - \frac{1}{\sqrt{Z}} \right)^2 T^2} \quad (10.9)$$

ゆえに $T=0$ の場合は

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \frac{X^2}{Z} + \left(\sqrt{Z} + \frac{1}{\sqrt{Z}} \right)^2 \right\}^{1/2} Q_0 &\approx - \left(\sqrt{ZQ_1} + \frac{1}{\sqrt{ZQ_1}} \right) \\ \left\{ \frac{X^2}{Z} + \left(\sqrt{Z} - \frac{1}{\sqrt{Z}} \right)^2 \right\}^{1/2} Q_0 &\approx - \left| \sqrt{ZQ_1} - \frac{1}{\sqrt{ZQ_1}} \right|. \end{aligned} \right\} \quad (10.10)$$

これらの近似解に(9.10)の数値例を代入すると

$$Q_0 \approx -0.39 \quad \text{又は} \quad Q_0 \approx -0.14. \quad (10.11)$$

式(10.3)と比較すると(10.10)はいちぢるしく簡単である。にもかかわらず近似解(10.11)は厳密解(10.4)に一致する。ただし(9.21)と一致する Q_0 が得られるのは(10.9)ではなくて(10.8)に限られる。

さて(10.8)の根号内が負になると Q は複素数になる。ゆえに図9.3を思い出すと、(10.8)の根号内を0にする T が T_s であり、その時の Q が Q_s と考えられる。そこで数値例(9.10)を(10.8)に代入し、根号内を0とすると、次の近似解が得られる

$$T_s \approx 5.71, \quad Q_s \approx 0.98. \quad (10.12)$$

これと(9.23)とを比較すると、(10.12)の T_s には18%、 Q_s には42%の誤差がある。

このように誤差が大きいのは、 $Q_1=2$ に対して $(\sqrt{Q_1} - 1/\sqrt{Q_1})^2/2 = 0.25$ なので、条件(10.6)が十分には満足されないためと思われる。

$T > T_s$ の場合に

$$Q = \operatorname{Re} Q + i \operatorname{Im} Q \quad (10.13)$$

と記し、(10.8)および(10.9)からそれぞれ T を消去すると

$$\left(\frac{\operatorname{Re} Q}{X/\sqrt{Z}} \right)^2 - \left(\frac{\operatorname{Im} Q}{\sqrt{Z} + 1/\sqrt{Z}} \right)^2 \approx \left\{ \frac{1}{\sqrt{X^2/Z + (\sqrt{Z} + 1/\sqrt{Z})^2}} \frac{\sqrt{ZQ_1} + 1/\sqrt{ZQ_1}}{\sqrt{Z} + 1/\sqrt{Z}} \right\}^2, \quad (10.14)$$

$$\left(\frac{\operatorname{Re} Q}{X/\sqrt{Z}} \right)^2 - \left(\frac{\operatorname{Im} Q}{\sqrt{Z} - 1/\sqrt{Z}} \right)^2 \approx \left\{ \frac{1}{\sqrt{X^2/Z + (\sqrt{Z} - 1/\sqrt{Z})^2}} \frac{\sqrt{ZQ_1} - 1/\sqrt{ZQ_1}}{\sqrt{Z} - 1/\sqrt{Z}} \right\}^2. \quad (10.15)$$

しかるに(9.8)に戻ると

$$\frac{X/\sqrt{Z}}{|\sqrt{Z} \pm 1/\sqrt{Z}|} = \frac{x}{|E \pm |z||} \quad (10.16)$$

ゆえに図 10.1 のように $z=0$ に対する E の鏡像を E' とし

$$R_2 = \overline{EP}, \quad R_1 = \overline{E'P} \quad (10.17)$$

および

$$\tan \gamma_2 = x/(E+|z|), \quad \tan \gamma_1 = x/|E-|z|| \quad (10.18)$$

とおく.

すると(10.14), (10.15)はそれぞれ Q の虚軸と γ_2, γ_1 の角度をなす漸近線を持ち,

$$\text{Re} Q = Q_s = \frac{X/\sqrt{Z}}{\sqrt{X^2/Z + (\sqrt{Z} \pm 1/\sqrt{Z})^2}} \cdot \left| \frac{\sqrt{ZQ_1} \pm 1/\sqrt{ZQ_1}}{\sqrt{Z} \pm 1/\sqrt{Z}} \right| \quad (10.19)$$

を頂点とする双曲線であることがわかる.

数値例(9.10)に対する(10.14)が図 10.2 に破線で示されている. この図の太い実線は図式解法による厳密解(9.21) Q_0 と(9.23) Q_s とを結ぶ直線である.

なお比較のために次節の双曲線(11.9)が点線で示されている.

この図の数値例のように $\sqrt{Z}-1/\sqrt{Z}=0$ の場合は(10.15)は意味を持たない.

ゆえに(9.10)と違う数値例

$$X=5, \quad Z=1.5, \quad Q=1.2 \quad (10.20)$$

を採用してみよう. この時 $(\sqrt{Q_1}-1/\sqrt{Q_1})^2/2=0.02$ なので, 条件(10.6)に対してかなり有利である.

まず(9.20)に(10.20)を代入し, $Q \leq \sqrt{1/Q_1}$ の実数値に対して T を追跡すると図 10.3 が得られ, この図から次の厳密解が得られる.

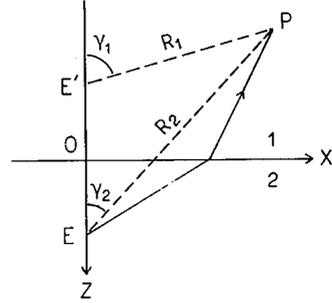


Fig. 10.1. The distance and the inclination of the observation point from the source and its mirror.

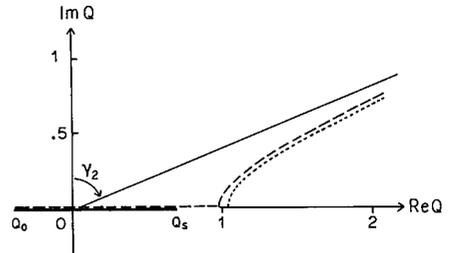
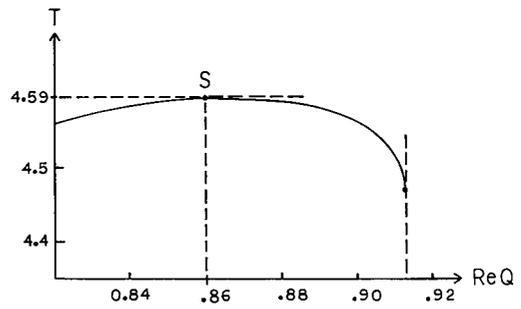
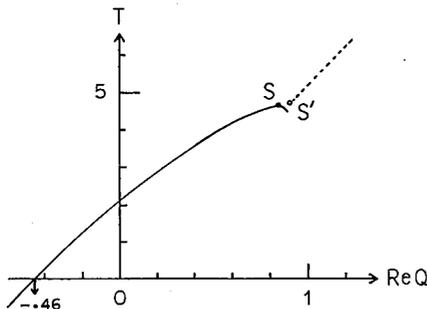


Fig. 10.2. The locus of Q on the plane of the ray-parameter. $X=5, Z=1, Q_1=2$.



(a)

(b)

Fig. 10.3. Real T for real Q . $X=5, Z=1.5, Q_1=1.2$.

$$Q_0 = -0.46, T_s = 4.59, Q_s = 0.86. \quad (10.21)$$

次に(10.10)の第1式および(10.8)に(10.20)を代入すると、近似解

$$Q_0 \approx -0.46, T_s \approx 4.67, Q_s = 0.92 \quad (10.22)$$

が得られる。この時(10.21)と(10.22)とを比較すると、(10.22)の Q_s および T_s の誤差はそれぞれ7.0%および1.7%である。

念のために(10.10)の第2式および(10.9)に(10.21)を代入すると

$$Q_0 \approx -0.15, T_s \approx 5.99, Q_s \approx 1.45 \quad (10.23)$$

になる。しかし(10.23)は(10.21)と大きく違うので、(10.23)は(9.20)に対する余分の解と考えられる。

図9.3(a)および図10.3(a)に $T > T_s$ における $\text{Re} Q$ と T との関係(10.8)が点線で示されている。

点 S' が点 S に近いほど(10.8)は厳密解に近い。

11. 透過波線パラメターの近似解(2)

4次方程式(10.1)の因数分解近似は(10.5)に限られない。(10.1)を次のように書き変えることもできる

$$\left\{ \left(\frac{X^2}{Z} + Z + \frac{1}{Z} + 2 \right) Q^2 - 2 \frac{X}{\sqrt{Z}} T Q + T^2 - Z Q_1 - \frac{1}{Z Q_1} - Q_1 - \frac{1}{Q_1} \right\} \\ \cdot \left\{ \left(\frac{X^2}{Z} + Z + \frac{1}{Z} - 2 \right) Q^2 - 2 \frac{X}{\sqrt{Z}} T Q + T^2 - Z Q_1 - \frac{1}{Z Q_1} + Q_1 + \frac{1}{Q_1} \right\} = - \left(Q_1 - \frac{1}{Q_1} \right)^2. \quad (11.1)$$

ゆえに

$$\left\{ (Q_1 - 1/Q_1) / (Q_1 + 1/Q_1) \right\}^2 \ll 1 \quad (11.2)$$

の場合に(11.1)の右辺を無視すると

$$\left\{ \left(\frac{X^2}{Z} + Z + \frac{1}{Z} + 2 \right) Q^2 - 2 \frac{X}{\sqrt{Z}} T Q + T^2 - Z Q_1 - \frac{1}{Z Q_1} - Q_1 - \frac{1}{Q_1} \right\} \\ \left\{ \left(\frac{X^2}{Z} + Z + \frac{1}{Z} - 2 \right) Q^2 - 2 \frac{X}{\sqrt{Z}} T Q + T^2 - Z Q_1 - \frac{1}{Z Q_1} + Q_1 + \frac{1}{Q_1} \right\} \approx 0. \quad (11.3)$$

ここで(10.6)の左辺と(11.2)の左辺とを比較すると図11.1の実線および破線のようになる。ゆえに $Q_1 < 2.9$ において近似(10.6)の方が有利である。ただしこれが近似式(10.7)と(11.3)にどのような違いを与えるかは直観的にはわからない。

$T = 0$ の場合の Q の符号に留意すると、(11.3)から次の近似解が得られる。

$$\left\{ \frac{X^2}{Z} + \left(\sqrt{Z} + \frac{1}{\sqrt{Z}} \right)^2 \right\} Q \approx \frac{X}{\sqrt{Z}} T - \left[\left\{ \frac{X^2}{Z} \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\sqrt{Z} + \frac{1}{\sqrt{Z}} \right)^2 \right\} \left\{ \left(\sqrt{Z Q_1} + \frac{1}{\sqrt{Z Q_1}} \right)^2 \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\sqrt{Q_1} - \frac{1}{\sqrt{Q_1}} \right)^2 \right\} - \left(\sqrt{Z} + \frac{1}{\sqrt{Z}} \right)^2 T^2 \right]^{1/2}, \quad (11.4)$$

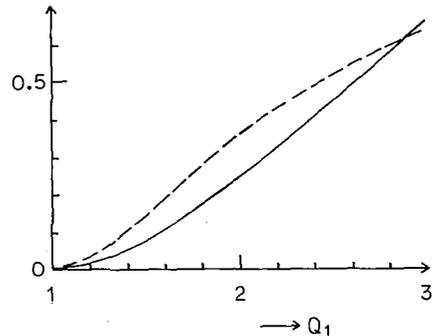


Fig. 11. 1. The comparison of the two approximations. The solid line means $(\sqrt{Q_1} - 1/\sqrt{Q_1})^2/2$ and the broken one does $(Q_1 - 1/Q_1)^2/(Q_1 + 1/Q_1)^2$.

$$\left\{ \frac{X^2}{Z} + \left(\sqrt{Z} - \frac{1}{\sqrt{Z}} \right)^2 \right\} Q \approx \frac{X}{\sqrt{Z}} T - \left[\left\{ \frac{X^2}{Z} + \left(\sqrt{Z} - \frac{1}{\sqrt{Z}} \right)^2 \right\} \left\{ \left(\sqrt{ZQ_1} - \frac{1}{\sqrt{ZQ_1}} \right)^2 - \left(\sqrt{Q_1} - \frac{1}{\sqrt{Q_1}} \right)^2 \right\} - \left(\sqrt{Z} - \frac{1}{\sqrt{Z}} \right)^2 T^2 \right]^{1/2} \quad (11.5)$$

さて数値例(9.10)を上式に代入すると(11.4)から次の結果が得られる。

$$Q_0 \approx -0.41, \quad T_s \approx 6.02, \quad Q_s \approx 1.04. \quad (11.6)$$

これと厳密解(9.21), (9.23)と比較すると, (11.6)の各数値には5%, 25%および51%の誤差がある。すなわち数値例(9.10)に対しては近似解(10.11), (10.12)の方が誤差が少ない。

近似解(11.5)は(10.9)と同様に余分の解と考えられる。

次に数値例(10.20)を(11.4)に代入すると近似解

$$Q_0 \approx -0.46, \quad T_s \approx 4.68, \quad Q_s \approx 0.92. \quad (11.7)$$

が得られ, これは近似解(10.22)と一致する。

一方(10.20)を(11.5)に代入すると

$$Q_0 \approx -0.03, \quad T_s \approx 5.71, \quad Q_s \approx 1.38 \quad (11.8)$$

となる。しかしこれは(10.21)と大きく違い, (9.20)に対する余分の解である。

近似式(11.4), (11.5)においても $T > T_s$ の場合に(10.13)のように記し, それぞれの式から T を消去すると

$$\left(\frac{\operatorname{Re} Q}{X/\sqrt{Z}} \right)^2 - \left(\frac{\operatorname{Im} Q}{\sqrt{Z} + 1/\sqrt{Z}} \right)^2 \approx \left\{ \frac{1}{\sqrt{X^2/Z + (\sqrt{Z} + 1/\sqrt{Z})^2}} \frac{\sqrt{(\sqrt{ZQ_1} + 1/\sqrt{ZQ_1}) + (\sqrt{Q_1} - 1/\sqrt{Q_1})^2}}{\sqrt{Z} + 1/\sqrt{Z}} \right\}^2 \quad (11.9)$$

$$\left(\frac{\operatorname{Re} Q}{X/\sqrt{Z}} \right)^2 - \left(\frac{\operatorname{Im} Q}{\sqrt{Z} - 1/\sqrt{Z}} \right)^2 \approx \left\{ \frac{1}{\sqrt{X^2/Z + (\sqrt{Z} - 1/\sqrt{Z})^2}} \frac{\sqrt{(\sqrt{ZQ_1} - 1/\sqrt{ZQ_1})^2 - (\sqrt{Q_1} - 1/\sqrt{Q_1})^2}}{\sqrt{Z} - 1/\sqrt{Z}} \right\}^2 \quad (11.10)$$

これらの双曲線はそれぞれ(10.14), (10.15)と同じ漸近線を持ち, 頂点の座標 $\operatorname{Re} Q = Q_s$ のみが近似の違いだけ異なる。

数値例(9.10)の Q_1 だけを変化させ, 図9.2を用いて Q_s と T_s との関係調べると図11.2のようになる。曲線上の数字は Q_1 を意味し, $Z = 1$ の場合は(9.20)によって明らかのように, Q_1 を $1/Q_1$ に変えても同じ結果が得られる。この図を見ると, (10.8), (11.4)等から期待される Q_s と T_s との単純な直線関係は厳密解においては $Q_1 \approx 1$ 付近においてしか成立しない。換言すると, (10.1)の厳密解は特に $Q = Q_s$ 近傍においてきわめて複雑な表現であることが知らされる。

あいにく, 波形の算出に大切なのは $Q \approx Q_s$ 近傍なので, その見地からすると上述の近似解(1), (2)はいずれも適当でない。

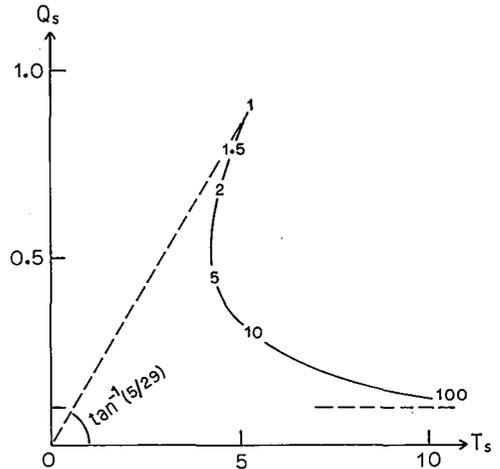


Fig. 11. 2. The relation between T_s and Q_s , being the parameter Q_1 . $X=5, Z=1$.

12. 透過波線パラメターのきわめて厳密に近い解(3)
波線パラメター p の実数部を \bar{p} , 虚数部を \hat{p} と略記し

$$p = \bar{p} + i\hat{p} \quad (12.1)$$

と書くと

$$p_j^2 - p^2 = \bar{p}_j^2 - \bar{p}^2 + \hat{p}_j^2 - 2i\bar{p}\hat{p}; \quad j=1, 2. \quad (12.2)$$

ゆえに

$$\rho_j^2 \cos 2\sigma_j = \bar{p}_j^2 - \bar{p}^2 + \hat{p}^2, \quad \rho_j^2 \sin 2\sigma_j = 2\bar{p}\hat{p} \quad (12.3)$$

とおくと, (12.2)は次のように表わされる

$$p_j^2 - p^2 = \rho_j^2 e^{-2i\sigma_j};$$

$$\rho_j^2 = |p_j^2 - p^2| = \{(\bar{p}_j^2 - \bar{p}^2 + \hat{p}^2)^2 + (2\bar{p}\hat{p})^2\}^{1/2}. \quad (12.4)$$

$$\therefore \sqrt{p_j^2 - p^2} = \rho_j (\cos \sigma_j - i \sin \sigma_j); \quad \rho_j = |\sqrt{p_j^2 - p^2}|. \quad (12.5)$$

しかも7において課したのと同じ条件

$$\operatorname{Re}\sqrt{p_j^2 - p^2} > 0 \quad (12.6)$$

を(12.5)に課すと

$$\rho_j \cos \sigma_j > 0. \quad (12.7)$$

ゆえに(12.3)の第2式により

$$\bar{p}\hat{p} \geq 0 \text{ に応じて } \sin \sigma_j \geq 0. \quad (12.8)$$

一方において

$$\sin^2 \sigma_j = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\sigma_j), \quad \cos^2 \sigma_j = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\sigma_j)$$

なので, これらの右辺に(12.3)の第1式を代入すると, (12.5)と(12.7)および(12.8)により

$$\rho_j \sin \sigma_j = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \{\rho_j^2 - (\bar{p}_j^2 - \bar{p}^2 + \hat{p}^2)\}^{1/2} \text{ for } \bar{p}\hat{p} \geq 0,$$

$$\rho_j \cos \sigma_j = \frac{1}{\sqrt{2}} \{\rho_j^2 + (\bar{p}_j^2 - \bar{p}^2 + \hat{p}^2)\}^{1/2}. \quad (12.9)$$

ゆえに

$$\bar{p}_j^2 - \bar{p}^2 + \hat{p}^2 \geq 0 \text{ に応じて } |\sin \sigma_j| \leq \cos \sigma_j. \quad (12.10)$$

次に(12.1)と(12.5)を(9.17)の右辺に代入すると

$$\tau = \bar{p}x + E\rho_2 \cos \sigma_2 + |z|\rho_1 \cos \sigma_1 + i(\hat{p}x - E\rho_2 \sin \sigma_2 - |z|\rho_1 \sin \sigma_1). \quad (12.11)$$

ゆえに

$$\operatorname{Im} \tau = 0 \text{ とすると } \hat{p}x = E\rho_2 \sin \sigma_2 + |z|\rho_1 \sin \sigma_1 \quad (12.12)$$

でなければならず, これに対応して次式が得られる

$$\tau = \operatorname{Re} \tau = \bar{p}x + E\rho_2 \cos \sigma_2 + |z|\rho_1 \cos \sigma_1. \quad (12.13)$$

今後は $\bar{p} > 0$ および $\hat{p} > 0$ の場合のみを問題とし

$$w_j = p_j^2 - \bar{p}^2 + \hat{p}^2 \quad (12.14)$$

とおくと、(12.8)と(12.9)により(12.12)および(12.13)はそれぞれ次のように表わされる

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{2} x \hat{p} &= E\{(w_2^2 + 4\bar{p}^2 \hat{p}^2)^{1/2} - w_2\}^{1/2} + |z|\{(w_1^2 + 4\bar{p}^2 \hat{p}^2)^{1/2} - w_1\}^{1/2}, \\ \sqrt{2} \tau &= \sqrt{2} x \bar{p} + E\{(w_2^2 + 4\bar{p}^2 \hat{p}^2)^{1/2} + w_2\}^{1/2} + |z|\{(w_1^2 + 4\bar{p}^2 \hat{p}^2)^{1/2} + w_1\}^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (12.15)$$

この連立方程式は (τ, \bar{p}, \hat{p}) の関数関係を与えるが、これを代数的に解くのはきわめて面倒である。ゆえにまず(9.8)、(9.19)のような無次元化を行うと、(12.14)および(12.15)はそれぞれ次のようになる

$$W_2 = 1/Q_1 - \bar{Q}^2 + \hat{Q}^2, \quad W_1 = Q_1 - \bar{Q}^2 + \hat{Q}^2 \quad (12.16)$$

および

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{2} X \hat{Q} &= \{(W_2^2 + 4\bar{Q}^2 \hat{Q}^2)^{1/2} - W_2\}^{1/2} + Z\{(W_1^2 + 4\bar{Q}^2 \hat{Q}^2)^{1/2} - W_1\}^{1/2}, \\ \sqrt{2} T &= \sqrt{2} \frac{X}{\sqrt{Z}} \bar{Q} + \frac{1}{\sqrt{Z}} \{(W_2^2 + 4\bar{Q}^2 \hat{Q}^2)^{1/2} + W_2\}^{1/2} + \sqrt{Z} \{(W_1^2 + 4\bar{Q}^2 \hat{Q}^2)^{1/2} + W_1\}^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (12.17)$$

連立方程式(12.17)に $\hat{Q} = 0$ を代入すると

$$1/Q_1 - \bar{Q}^2 > 0 \quad \text{および} \quad Q_1 - \bar{Q}^2 > 0 \quad (12.18)$$

の場合に第1式は必ず満たされ、しかも第2式は Q が実数の場合の(9.20)に一致する。ゆえに(12.18)は図9.3および図10.3の図式解における $\operatorname{Re} Q$ の上限を与える。

逆に言うと(12.18)が満たされない場合は(12.17)の第1式の右辺は0でない。すなわち Q は複素数である。

まず $1/Q_1 < Q_1 \ll |\bar{Q}^2 - \hat{Q}^2|$ の場合を考え、

$$W_j \approx -\bar{Q}^2 + \hat{Q}^2 \quad (12.19)$$

とすると、(12.17)は次のようになる

$$X\hat{Q} = (1+Z)\bar{Q}, \quad T = \frac{X^2 + (1+Z)^2}{X\sqrt{Z}} \bar{Q}. \quad (12.20)$$

すると、これの第1式は双曲線(10.14)や(11.9)の漸近線と一致する。今度は単に

$$1/Q_1 < Q_1 \quad \text{および} \quad 1/Q_1 < \bar{Q}^2 \quad (12.21)$$

とすると、条件(12.18)は満たされず、近似(12.19)も許されない。止むをえず(12.17)を直接解くために、数値例(9.10)をこれに代入すると

$$\left. \begin{aligned} 5\sqrt{2} \hat{Q} &= \{(W_2^2 + 4\bar{Q}^2 \hat{Q}^2)^{1/2} - W_2\}^{1/2} + \{(W_1^2 + 4\bar{Q}^2 \hat{Q}^2)^{1/2} - W_1\}^{1/2}, \\ \sqrt{2} T &= 5\sqrt{2} \bar{Q} + \{(W_2^2 + 4\bar{Q}^2 \hat{Q}^2)^{1/2} + W_2\}^{1/2} + \{(W_1^2 + 4\bar{Q}^2 \hat{Q}^2)^{1/2} + W_1\}^{1/2}, \\ W_2 &= 0.5 - \bar{Q}^2 + \hat{Q}^2, \quad W_1 = 2 - \bar{Q}^2 + \hat{Q}^2 \end{aligned} \right\} \quad (12.22)$$

そこで \bar{Q} をパラメータとし、(12.22)の第1式
 右辺を \hat{Q} を変数として追跡し、左辺の直線との交
 点を求める。すると1組の解 (\bar{Q} , \hat{Q}) が決められ
 るので、この手順を繰返すと(12.22)の第1式の数
 値解が求められる。このようにして求められた数
 値解 (\bar{Q} , \hat{Q}) を厳密解とみなし、図10.2の破線の
 近似解双曲線に重ねると図12.1の白丸のよう
 になる。白丸は図10.2の破線(10.14)よりもむしろ
 点線(11.9)の方によりよく一致するがその違いは
 ここでは問わない。

図12.1を見ると、近似解双曲線の頂点の座標(10.12)や(11.6)が真の Q_0 (9.23)と喰い違うことから予期
 されたように、 $\text{Im}Q$ が大きい処で近似解双曲線(10.14)は厳密解と一致するが、 $\text{Im}Q$ が0に近づくにつれ
 て近似解は厳密解から大きくはずれる。ただし $\text{Im}Q \approx 0$ 近傍においては厳密解の数値の精度が落ちる。精
 度を上げるためには数値計算の桁数を大にしなければならない。

しかるに図12.1の厳密解を参考にして

$$\bar{Q}^2 \approx 1/Q_1 < Q_1 \text{ かつ } \hat{Q} \approx 0 \quad (12.23)$$

の付近に着目し、さらに

$$\hat{Q}^2 \ll Q_1 - 1/Q_1 \quad (12.24)$$

とすると

$$\frac{2\bar{Q}\hat{Q}}{W_1} \approx \frac{2Q_1^{1/2}Q}{Q_1 - Q_1^{-1} + Q^2} \approx \frac{2Q_1^{-1/2}\hat{Q}}{Q_1 - Q_1^{-1}} < 1 \quad (12.25)$$

を満たす $\text{Im}Q$ が存在する。

ただし不等式(12.24)および(12.25)の最後の不等式を独立
 に満たす $\text{Im}Q$ の上限はそれぞれ図12.2の破線および鎖線
 のようになる。ゆえに(12.25)の全体を成立させる $\text{Im}Q$ は破
 線および鎖線のいずれよりも下の領域になければならない。

とにかく(12.25)の全体が満たされる場合は

$$(W_1^2 + 4\bar{Q}^2\hat{Q})^{1/2} - W_1 \approx W_1 \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{2\bar{Q}\hat{Q}}{W_1} \right)^2 + \dots - 1 \right\} \approx \frac{2\hat{Q}}{Q_1^2 - 1}$$

$$\therefore \{(W_1^2 + 4\bar{Q}^2\hat{Q}^2)^{1/2} - W_1\}^{1/2} \approx \sqrt{2} (Q_1^2 - 1)^{-1/2} \hat{Q}. \quad (12.26)$$

これに反し、(12.23)の Q 付近において

$$2\bar{Q}\hat{Q}/W_2 = \text{不定}.$$

ゆえに W_2 に関しては(12.25)のような近似は成立せず、したがって(12.26)に対応する近似も成立しな
 い。

結局(12.23)の Q 付近において(12.17)の第1式は次のように近似される。

$$\sqrt{2} X \hat{Q} \approx \{(W_2^2 + 4\bar{Q}^2\hat{Q}^2)^{1/2} - W_2\}^{1/2} + Z \left(\frac{2}{Q_1^2 - 1} \right)^{1/2} \hat{Q}.$$

さらにこの式の根号を開いて整頓すると次の結果が得られる。

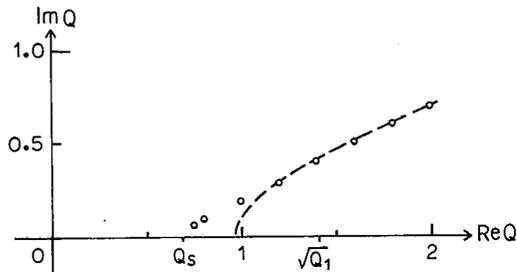


Fig. 12. 1. The comparison of the approximation of Q to the strict solution. $X=5$, $Z=1$, $Q_1=2$.

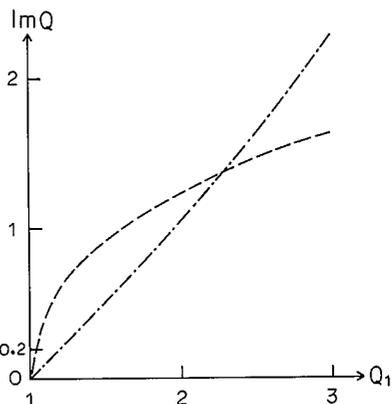


Fig. 12. 2. The permissible region of $\text{Im}Q$, satisfying whole relation (12.25).

$$\bar{Q} \text{ のいかんによらず } \hat{Q} \approx 0 \tag{12.27}$$

又は

$$\frac{\bar{Q}^2}{L^2} - \hat{Q}^2 \approx \frac{1}{Q_1} \frac{1}{L^2+1}; L = X - Z \sqrt{\frac{1}{Q_1^2-1}} \tag{12.28}$$

これらの解の中の(12.27)は、図 9.3 や図 10.3 において見たように、 $\text{Re}Q \leq 1/Q_1$ の実軸が(9.20)の解であったことに対応する。一方の(12.28)は

$$\hat{Q} = \pm \bar{Q}/L$$

を漸近線とする双曲線であって、この双曲線の頂点 Q_s は(12.28)に $\text{Im}Q = 0$ を代入すると得られ

$$Q_s = \sqrt{\frac{1-L^2}{Q_1 L^2+1}} \tag{12.29}$$

図 12.1 の数値例(9.10)および図 10.3 の数値例(10.20)に対して(12.29)はそれぞれ

$$Q_s = 0.690 \quad \text{および} \quad 0.858 \tag{12.30}$$

であって、これらはそれぞれ厳密解(9.23)および(10.21)の Q_s と一致する。

元来、厳密解の点 Q_s においては $\text{Im}Q = 0$ なので、 $Q_1 \neq 1$ の場合は図 12.2 に見られるような(12.25)の近似は必ずしも成立する。ゆえに(12.29)は厳密解とみなされる。

これに反し $Q_1 \approx 1$ の場合は $\text{Im}Q \gg 0$ において(10.6)や(11.2)の近似が良好である。

以上の経過を大観するために図 12.1 の点 Q_s 近傍を拡大し、双曲線(12.28)を点線で加筆すると図 12.3 (a) のようになる。すると数値例(9.10)に対する厳密解の白丸は破線の双曲線(10.14)の1部と点線の双曲線(12.28)の1部及びこれらの2つの双曲線に共通な切線上に分布しているように見られる。

式(9.20)を代数学的に厳密に解くのはきわめて厄介であるが、図式的には上述の3部分を連ねる太線によって解は大観される。

数値例(10.20)に対しては厳密解は算出されていないが、双曲線(10.14)、(12.28)およびこれらに共通な切線が図 12.3 (b) に示されている。

厳密解に対する近似の誤差は一般に

$$\left. \begin{array}{l} Q_1 \gg 1, \quad \hat{Q} \approx 0 \quad \text{において破線は大, 点線は小,} \\ Q_1 \approx 1, \quad \hat{Q} \gg 0 \quad \text{において破線は小, 点線は大} \end{array} \right\} \tag{12.31}$$

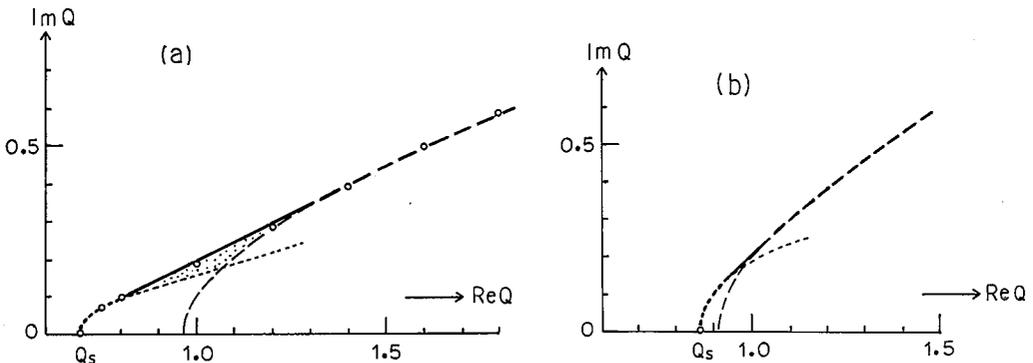


Fig. 12.3. The ray-parameter of the transmitted wave on the complex plane. (a) $X=5, Z=1, Q_1=2, 1/\sqrt{Q_1}=0.707$. (b) $X=5, Z=1.5, Q_1=1.2, 1/\sqrt{Q_1}=0.913$.

である。すなわち破線と点線とは長所と短所とが相反しているの、全般的にはお互いの欠陥を補償し合う結果になる。

$\hat{Q} \approx 0$ と $\hat{Q} \gg 0$ との中間部、たとえば図 12.3(a)の蔭を施こされた部分は、破線と点線とが双方の欠陥を補償しづらい部分であり、両双曲線に共通な切線が厳密解であるとの理論的根拠は乏しい。しかしこの共通切線は点線から破線に滑らかに移り変わる曲線の中で最も単純で、しかも厳密解にきわめて近い。

次に $\hat{Q} \approx 0$ から $\hat{Q} \gg 0$ までを単一の曲線で表現するために、(12.20)を漸近線とし、(12.29)を頂点に持つ双曲線を作ると

$$\frac{\bar{Q}^2}{X^2} - \frac{\hat{Q}^2}{(1+Z)^2} = \frac{1}{Q_1 X^2} \cdot \frac{L^2}{L^2+1} \tag{12.32}$$

これに数値例(9.10)を代入すると図 12.4 の鎖線の双曲線になる。点線および破線の双曲線はそれぞれ図 12.3(a)のものと同じであり、破線の直線は鎖線および破線の双曲線に共通な漸近線である。図 12.4 によると双曲線(12.32)は、点 Q_s のごく近傍を除き、他の双曲線よりも厳密解に対する近似が悪い。

ゆえに図 12.3 に戻ると、実は透過波を問題にする際に最も大切なのは点 Q_s 近傍であり、ここでは近似(12.28)がかなり厳密に成立する。

すると

$$d\hat{Q}/d\bar{Q} = (1/L^2) \bar{Q}/\hat{Q} \tag{12.33}$$

さらに(12.26)の近似と同程度に

$$\{(W_1^2 + 4\bar{Q}^2 \hat{Q}^2)^{1/2} + W_1\}^{1/2} \approx \sqrt{2} \left(W_1 + \frac{1}{Q_1^2 - 1} \hat{Q}^2 \right)^{1/2} \tag{12.34}$$

ゆえにこれを用いると、(12.17)の第2式は次のようになる

$$T \approx \frac{X}{\sqrt{Z}} \bar{Q} + \frac{1}{\sqrt{2Z}} \{(W_1^2 + 4\bar{Q}^2 \hat{Q}^2)^{1/2} + W_1\}^{1/2} + \sqrt{Z} \left(Q_1 - \bar{Q}^2 + \frac{Q_1^2}{Q_1^2 - 1} \hat{Q}^2 \right)^{1/2} \tag{12.35}$$

そこで(12.28)の $\text{Im} Q$ を(12.35)に代入して点 S 近傍の T と $\text{Re} Q$ との関係を求めると図 12.5 の点線

$$T - T_s \approx 4.6(\bar{Q} - Q_s) \tag{12.36}$$

になる。この図の実線の曲線は図 9.3 の1部であり、この図により(9.20)の Q の実根部分から複素根部分への移動が連続的に見られる。

ただし(12.36)は点 S においても

$$dT/d\bar{Q} \neq 0 \tag{12.37}$$

しかし(12.33)により

$$\frac{dQ}{dT} = \frac{d\bar{Q}}{dT} \left(1 + i \frac{d\hat{Q}}{d\bar{Q}} \right) = \frac{d\bar{Q}}{dT} \left(1 + i \frac{1}{L^2} \frac{\bar{Q}}{\hat{Q}} \right) \tag{12.38}$$

なので

$$\left| \frac{dT}{dQ} \right| = \frac{dT}{d\bar{Q}} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{L^2} \frac{\bar{Q}}{\hat{Q}} \right)^2 \right\}^{-1/2} \tag{12.39}$$

ゆえに(12.28)の $\text{Im} Q = \hat{Q}$ を上式に代入すると図 12.5(下)の点線 $|dT/dQ|$ になり、点 S において

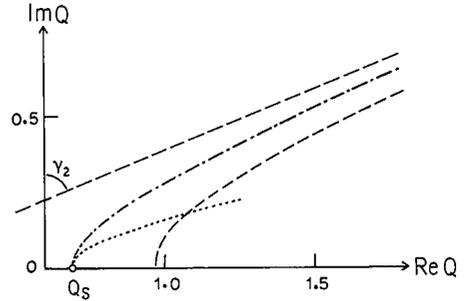


Fig. 12.4. The comparison of three hyperbolas which represent respectively a different part of the strict solution.

$|dT/dQ|=0$ であることがわかる。

しかるに

$$|dQ| = \sqrt{(d\bar{Q})^2 + (d\hat{Q})^2}$$

なので、

$$|Q| = \Sigma |dQ| = \int_{Q_s}^{\bar{Q}} \sqrt{1 + (d\hat{Q}/d\bar{Q})^2} d\bar{Q} \tag{12.40}$$

とおき、これに(12.33)および(12.28)の $\text{Im}Q$ を代入すると、頂点 Q_s を起点とする双曲線の分枝の長さ $|Q|$ が算出される。ただし定積分(12.40)の解析解は求めづらい。ゆえに図12.3を用いて図式解を求め、図12.5の横軸を $\text{Re}Q$ から $|Q|$ に変える。すると図の点線(12.36)は破線のように変形する。こうすると点 S の両側において T が連続であるのみならず、 T の傾斜も連続になる。

数値例(10.20)に対しても、今述べたのと同様に T と $\text{Re}Q$ および T と $|Q|$ の関係を求め、図12.6にそれぞれ点線および破線で示した。

実線は図10.3の一部である。

図12.5の上方および図12.6の点線は、図9.3(a)や図10.3(a)の点 S' から始まる理論直線のを思い出させ、いずれも直線に見える。しかし今度は直線であるとの理論的根拠は与えられていない。

ゆえにこれを調べるために

$$\Omega_j = \{(W_j^2 + 4\bar{Q}^2 \hat{Q}^2)^{1/2} + W_j\}^{1/2} / \sqrt{2} \tag{12.41}$$

とおき、(12.22)の第2式の右辺の演算の際に算出された Ω_1 と Ω_2 とを別々に示すと図12.7のようになる。すると図12.7(a)の点線 $(\Omega_1 + \Omega_2)/2$ は直線ではないが、 $d\{(\Omega_1 + \Omega_2)/2\}/d\bar{Q} = -0.20$ の細い実直線に近い。図12.7(a)と図12.5と比較すると前者は縦軸が10倍に拡大されているので、図12.5においてはきわめて良い直線性が見られ、その傾斜が $5 - 0.2 \times 2 = 4.6$ であったのである。図12.7(b)に示されているように、 $Q_1 = 1.2$ の場合も Ω_j は直線に近い。

一方(12.41)を $\text{Re}Q$ で微分し、(12.33)を代入すると

$$\frac{d\Omega_j}{d\bar{Q}} = \frac{1}{\sqrt{2} \Omega_j (W_j^2 + 4\bar{Q}^2 \hat{Q}^2)^{1/2}} \left\{ 2 \left(\frac{\bar{Q}}{L^2} + \hat{Q}^2 \right) - \left(1 - \frac{1}{L^2} \right) \Omega_j^2 \right\} \tag{12.42}$$

しかるに $\text{Re}Q = Q_s$ において $\text{Im}Q = 0$ なので

$$\begin{aligned} \Omega_j(Q_s) &= \sqrt{2W_j(Q_s)}. \\ \therefore \frac{d\Omega_j(Q_s)}{d\bar{Q}} &= \frac{Q_s}{\sqrt{W_j(Q_s)}} \left\{ \left(\frac{Q_s}{L\sqrt{W_j(Q_s)}} \right)^2 - \left(1 - \frac{1}{L^2} \right) \right\}. \end{aligned} \tag{12.43}$$

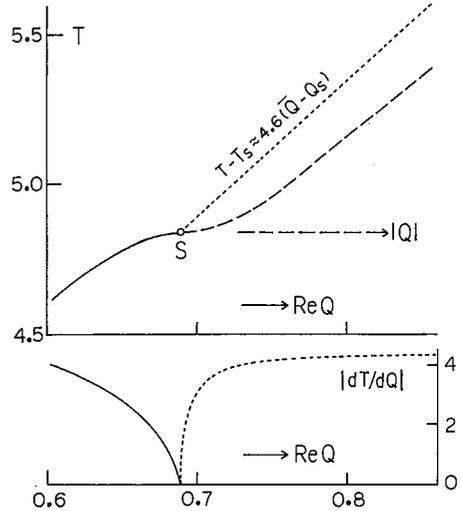


Fig. 12.5. The relation between T and Q near the stationary point S . $X=5, Z=1, Q_1=2$.

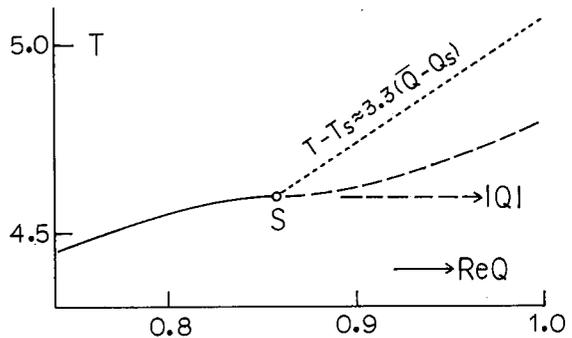


Fig. 12.6. The relation between T and Q near the stationary point S . $X=5, Z=1.5, Q_1=1.2$.

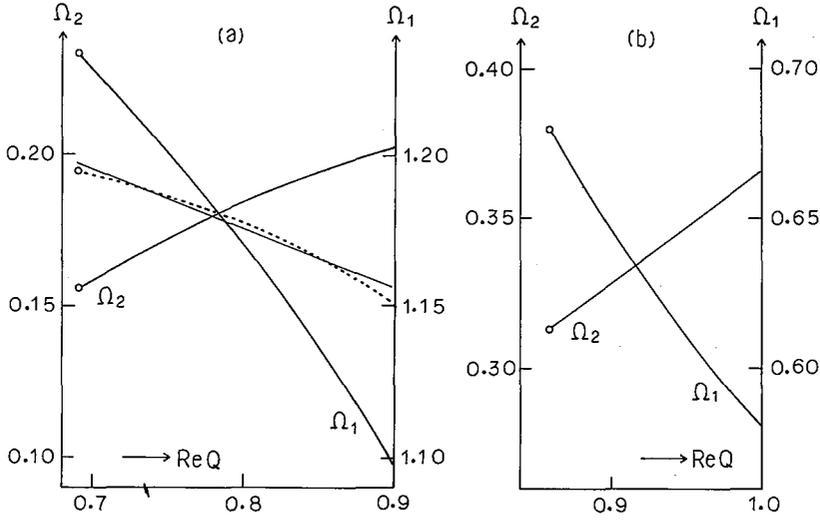


Fig. 12.7. $\Omega_1(\bar{Q})$ and $\Omega_2(\bar{Q})$. (a) $X=5, Z=1, Q_1=2$, (b) $X=5, Z=1.5, Q_1=1.2$.

これに数値例(9.10)を代入すると

$$d\Omega_2(Q_s)/d\bar{Q}=0.29 \quad (12.44)$$

となり、これは図12.7(a)において見積られる数値と合う。

13. 近似解についての吟味

振源から測定点までの透過波線の走時 τ は(9.17)のように波線パラメータ p の関数として表わされる。しかるに一般には p は複素数なので、(12.1)のように表わすと

$$dp = d\bar{p} + i d\hat{p}. \quad (13.1)$$

ゆえに

$$\text{Im } \tau(\bar{p}, \hat{p}) = 0 \quad (13.2)$$

とすると、 $d\hat{p}/d\bar{p}$ が決められるので

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{d\bar{p}} &= \frac{d\tau}{d\bar{p}} \left(1 + j \frac{d\hat{p}}{d\bar{p}}\right)^{-1} \\ \therefore \left| \frac{d\tau}{d\bar{p}} \right| &= \left| \frac{d\tau}{d\bar{p}} \left\{ 1 + \left(\frac{d\hat{p}}{d\bar{p}} \right)^2 \right\}^{-1/2} \right|. \end{aligned} \quad (13.3)$$

ゆえに

$$|d\tau/d\bar{p}| = 0 \quad (13.4)$$

であるためには

$$d\tau/d\bar{p} = 0 \quad \text{又は} \quad d\hat{p}/d\bar{p} = 0. \quad (13.5)$$

実は(13.4)を満足させる p は τ のサドルポイントである。

p を実数に限ると(13.5)の第1式を満たす p_s は図9.3や図10.3のように τ の極大値 τ_s を与える。しか

し τ_s よりも小さな τ に対応する波 (7.3) の積分値は (7.2) の演算の時のように 0 なので, $\tau < \tau_s$ の波は実在しない。

p が複素数になると, 図 12.5 や図 12.6 のように, p_s において τ は最小であって, これがスネルの法則を意味する。

さて近似式 (10.8) の両辺を Q について微分すると

$$\frac{X^2}{Z} + \left(\sqrt{Z} + \frac{1}{\sqrt{Z}}\right)^2 = \left\{ \frac{X}{\sqrt{Z}} + \frac{(\sqrt{Z} + 1/\sqrt{Z})^2 T}{\sqrt{\left\{ \frac{X^2}{Z} + \left(\sqrt{Z} + \frac{1}{\sqrt{Z}}\right)^2 \right\} \left(\sqrt{ZQ_1} + \frac{1}{\sqrt{ZQ_1}}\right)^2 - \left(\sqrt{Z} + \frac{1}{\sqrt{Z}}\right)^2 T^2}} \right\} \frac{dT}{dQ} \quad (13.6)$$

この式の右辺の根号内を 0 にする T を T_s と記すと

$$T_s = \frac{\sqrt{ZQ_1} + 1/\sqrt{ZQ_1}}{\sqrt{Z} + 1/\sqrt{Z}} \sqrt{\frac{X^2}{Z} + \left(\sqrt{Z} + \frac{1}{\sqrt{Z}}\right)^2} \quad (13.7)$$

であり,

$$\left[\frac{dT}{dQ} \right]_{\tau=\tau_s} = \left[\frac{X^2/Z + (\sqrt{Z} + 1/\sqrt{Z})^2}{(\sqrt{Z} + 1/\sqrt{Z}) T} \sqrt{T_s^2 - T^2} \right]_{\tau=\tau_s} = 0. \quad (13.8)$$

ただしこの時の Q_s は双曲線 (10.14) の頂点なので, (13.5) により (13.8) の成立はすでにわかっていた。そこで (9.8) により (13.7) の無次元化を解除し, 図 13.1 を参照すると

$$\tau_s = (E p_2 + |z| p_1) R_2 / (E + |z|) = (E p_2 + |z| p_1) \sec \gamma_2 = \overline{EN} p_2 + \overline{NP} p_1. \quad (13.9)$$

すなわち図 13.1 の ENP が近似解(1)の (Q_s, T_s) による透過波線の経路である。これに対しスネルの法則を満たす波線の経路は EMP のようになるべきである。すると近似解(1)の (Q_s, T_s) は (13.8) を満たすにもかかわらず, スネルの法則に従がわないかのようである。ただし, 近似解(1)は $c_1 = c_2$ の時に厳密解と一致するのであった。近似解(1)の ENP と厳密解と EMP とを同一視すると, 近似解(1)の (Q_s, T_s) もスネルの法則に従がうと言える。これに反し経路 ENP と EMP とを同一視しないなら, 近似解(1)の (Q_s, T_s) を厳密解と同一視することもできない。

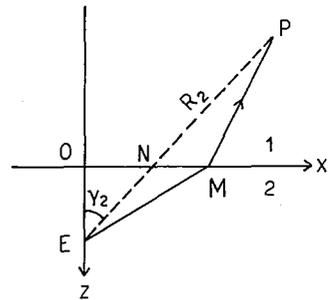


Fig. 13. 1. The transmitted ray-path of T_s in eq. (10.8).

近似解(2)の (Q_s, T_s) の波線経路を図示するのはむずかしいが, (11.4) によると

$$\tau_s(2) = \tau_s(1) \{ 1 + (\sqrt{Q_1} - 1/\sqrt{Q_1})^2 / (\sqrt{ZQ_1} + 1/\sqrt{ZQ_1})^2 \}^{1/2} \geq \tau_s(1). \quad (13.10)$$

ゆえに Q_1 が 1 から離れるにつれて近似解(2)の τ_s は近似解(1)の τ_s よりもさらに厳密解の τ_s から遠くなる。

次に近似解双曲線 (12.28) の頂点の座標 (12.29) を (12.17) の第 2 式に代入し, 無次元化を解くと

$$\tau_s = x p_2 \sqrt{\frac{L^2}{1+L^2}} + E p_2 \sqrt{\frac{1}{1+L^2}} + |z| p_1 \sqrt{1 - \frac{p_2^2}{p_1^2} \frac{L^2}{1+L^2}} \quad (13.11)$$

ゆえに

$$L = \tan \theta_2 \quad (13.12)$$

とおくと

$$L^2 / (1+L^2) = \sin^2 \theta_2, \quad 1 / (1+L^2) = \cos^2 \theta_2$$

なので, (13.11)は次のように書き変えられる.

$$\tau_s = x p_2 \sin \theta_2 + E p_2 \cos \theta_2 + |z| p_1 \sqrt{1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \sin \theta_2\right)^2}. \quad (13.13)$$

ゆえに

$$\sin \theta_1 = (p_2/p_1) \sin \theta_2 \quad (13.14)$$

とおき, 図 13.2 のように

$$x = \overline{OM} + \overline{MD} \quad (13.15)$$

と分解すると

$$\tau_s = \overline{EM} p_2 + \overline{MP} p_1. \quad (13.16)$$

しかるに (13.16) は (9.3) と同じであり, しかもこの時の条件 (13.14) はスネルの法則 (9.7) に他ならない. ゆえに (12.28) は近似解双曲線であるにもかかわらず, これの頂点の座標 (12.29) は解析的にも厳密解である.

ただし (12.28) の第 2 式の無次元化を解くと

$$EL = x - |z| \{(p_1/p_2)^2 - 1\}^{-1/2}. \quad (13.17)$$

これに (13.12) を代入すると (13.15) は成立しない.

このムジユンを解決するために近似式 (12.26) の代りに次式を採用しよう.

$$\frac{2\hat{Q}^2 \hat{Q}^2}{W_1} = 2\hat{Q}^2 \frac{\hat{Q}^2}{Q_1 - \hat{Q}^2 + \hat{Q}^2} \approx 2\hat{Q}^2 \frac{Q_s^2}{Q_1 - Q_s^2}. \quad (13.18)$$

すると (12.28) の L は次のように変わる

$$L = X - Z \frac{Q_s}{\sqrt{Q_1 - Q_s^2}}. \quad (13.19)$$

これに (12.29) を代入し, 無次元化を解くと

$$EL = x - |z| \{(p_1/p_2)^2 (1 + L^2)/L^2 - 1\}^{-1/2}. \quad (13.20)$$

しかるに (13.12) および (13.14) によると

$$\{(p_1/p_2)^2 (1 + L^2)/L^2 - 1\}^{-1/2} = \{\operatorname{cosec}^2 \theta_1 - 1\}^{-1/2} = \tan \theta_1.$$

ゆえに (13.20) は (13.15) に一致する.

そこで (13.14) と (13.16) を同時に満足させ, しかも (13.15) を厳密に成立させる解を見付けるために (12.29) と (13.19) とを連立させると

$$Q_s^2 = \frac{1}{Q_1} \frac{L^2}{L^2 + 1}, \quad L = X - Z \left(\frac{Q_1}{Q_s^2} - 1 \right)^{-1/2}. \quad (13.21)$$

しかるにこの連立方程式を解いて (Q_s, L) を求めるのは (9.1) と (9.7) とを連立させて $(\theta_{2s}, \theta_{1s})$ を求めるのと同等であって, いずれにせよ 4 次方程式を解かねばならない難関にぶつかる.

そこで (12.28) の L を第 1 近似として

$${}_1L = X - Z(Q_1^2 - 1)^{-1/2} \quad (13.22)$$

と記し, これを (13.21) の第 1 式の L に代入した時の

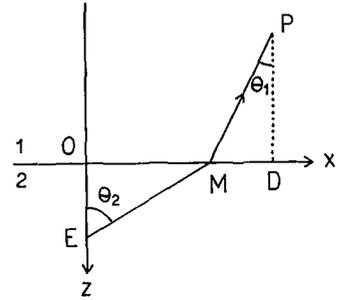


Fig. 13.2. The ray-path due to Q_s in eq. (12.29).

$${}_1Q = \left(\frac{1}{Q_1} \frac{{}_1L^2}{{}_1L^2 + 1} \right)^{1/2} \quad (13.23)$$

を Q_s の第1近似とする。

次に (13.23) の ${}_1Q$ を (13.21) の第2式の Q_s に代入し、

$${}_2L = X - Z \left(\frac{Q_1}{{}_1Q^2} - 1 \right)^{-1/2}, \quad {}_2Q = \left(\frac{1}{Q_1} \frac{{}_2L^2}{{}_2L^2 + 1} \right)^{1/2} \quad (13.24)$$

をそれぞれ L および Q_s の第2近似とする。

さらにこれを繰返すと L および Q_s の第 n 近似が次のように定義される。

$${}_nL = X - Z \left(\frac{Q_1}{{}_{n-1}Q^2} - 1 \right)^{-1/2}, \quad {}_nQ = \left(\frac{1}{Q_1} \frac{{}_nL^2}{{}_nL^2 + 1} \right)^{1/2} \quad (13.25)$$

このようにして

$${}_nL = {}_{n-1}L \quad (13.26)$$

とみなされるに至れば、(13.26) を真の L と考えることができる。すると ${}_nQ$ が真の Q_s である。

ただし図 13.3 を見ると、 $L > 3 \sim 4$ においては L の変化に対し Q_s は鈍感である。ゆえにこの場合は逐次近似 (13.25) を追求するまでもなく、第1近似 (13.23) を真の Q_s の代用にすることができよう。解 (12.30) が厳密解 (9.23) や (10.21) と一致したのはこのためである。

これに反し (13.19) の L は Q_s の違いに敏感なので、第1近似 ${}_1Q$ を用いると幾何学的関係 (13.17) が (13.15) に一致しないムジンを生じた。

一方、 $[dT/dQ]_{Q=Q_s} = 0$ なので、 Q_s の違いに対して T_s は鈍感である。ゆえに真の Q_s の代りに第1近似 ${}_1Q$ を用いても走時 T_s は厳密解からはずれず、(13.14) と (13.16) の同時成立が保証される。この際に真の L はダミーにすぎない。

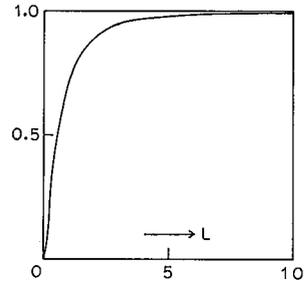


Fig. 13.3. $L^2/(L^2+1)$

14. 波線パラメター p から走時 τ への変数変換およびこれを用いた透過波の波形の演算式 一般に双曲線

$$(\operatorname{Re} p/A)^2 - (\operatorname{Im} p/B)^2 = 1 \quad (14.1)$$

を満足させる p の2次方程式を

$$p^2 - 2a\tau p + b(\tau) = 0 \quad (14.2)$$

とすると

$$p = a\tau \pm \sqrt{a^2\tau^2 - b(\tau)}. \quad (14.3)$$

ゆえに

$$d\tau(p_s)/dp = 0, \quad \tau_s = \tau(p_s)$$

とし

$$a^2\tau^2 - b(\tau) = k^2(\tau_s^2 - \tau^2) \quad (14.4)$$

とおくと、 $\tau > \tau_s$ の時に

$$\operatorname{Re} p = a\tau, \quad \operatorname{Im} p = k\sqrt{\tau^2 - \tau_s^2}. \quad (14.5)$$

ゆえに(14.5)の両式から τ を消去すると

$$\frac{k^2}{a^2} (\operatorname{Re} p)^2 - (\operatorname{Im} p)^2 = k^2 \tau_s^2.$$

これが(14.1)と一致するためには

$$a = A/\tau_s, \quad k = B/\tau_s.$$

ゆえにこれらを(14.4)と(14.3)に代入し, $\theta = \tau/\tau_s$ とおくと

$$p = A\theta + B\sqrt{1-\theta^2}, \quad \theta = \tau/\tau_s. \quad (14.6)$$

$$\therefore \frac{dp}{d\theta} = \frac{A\sqrt{1-\theta^2} - B\theta}{\sqrt{1-\theta^2}}. \quad (14.7)$$

しかるに(14.6)により

$$\sqrt{1-\theta^2} = (p - A\theta)/B$$

なので, これを(14.7)の分子に代入すると

$$A\sqrt{1-\theta^2} - B\theta = \{Ap - (A^2 + B^2)\theta\}/B. \quad (14.8)$$

一方において(14.6)を θ について解くと

$$(A^2 + B^2)\theta = pA \pm B\sqrt{A^2 + B^2 - p^2}. \quad (14.9)$$

ゆえにこれを(14.8)に代入すると

$$A\sqrt{1-\theta^2} - B\theta = \mp \sqrt{A^2 + B^2 - p^2}. \quad (14.10)$$

さらにこれを(14.7)の分子に代入すると

$$\frac{dp}{\sqrt{A^2 + B^2 - p^2}} = \mp \frac{d\theta}{\sqrt{1-\theta^2}} = \frac{\pm id\tau}{\sqrt{\tau^2 - \tau_s^2}}. \quad (14.11)$$

この式の右辺の \pm は, (14.9)に示されているように, $p=0$ における θ の正負に対応している.

さて(12.28)の無次元化を解除すると

$$(\bar{p}/L)^2 - \hat{p}^2 = p_s^2/(1+L^2). \quad (14.12)$$

そこで, これと(14.1)とを比較すると

$$\begin{aligned} A^2 &= p_s^2 L^2 / (1+L^2), \quad B^2 = p_s^2 / (1+L^2). \\ \therefore A^2 + B^2 &= p_s^2. \end{aligned} \quad (14.13)$$

ゆえにこれを(14.11)に代入し, $\theta(p=0) > 0$ を考慮に入れると

$$dp/\sqrt{p_s^2 - p^2} = id\tau/\sqrt{\tau^2 - \tau_s^2}. \quad (14.14)$$

これは(7.8)の $d\tau/dp$ と同じ表現形式である. ゆえに(7.3)の演算を(7.2)と同様に実行することができる. すなわち(7.3)に(9.17)を代入すると

$$V_{tr}(x, \omega) = \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{1 + K_{21}(p)\} e^{i\omega\tau(p)} \frac{dp}{\sqrt{p_s^2 - p^2}};$$

$$\tau(p) = px + E\sqrt{p_s^2 - p^2} + |z|\sqrt{p_1^2 - p^2}.$$
(14.15)

さて図7.2にならって、積分路を図14.1の曲線 Cp_sD のように変形する。曲線 Cp_s は図12.3のように、双曲線(10.14)と双曲線(12.28)およびこれらの共通切線から合成される。図10.1のように γ_2 は振源Eから見た測定点の仰角の余角であると同時に、図10.2のように γ_2 は双曲線(10.14)の漸近線と p の虚軸との間の角である。曲線 p_sD は p の実軸に対して p_sC と対称である。

しかも $|p| = \infty$ の円周上において(14.15)は(7.2)と同じになる。すなわちそこでは図14.1は図7.2と同様になり、図3.3の点線と同じ半円周上の積分値は0である。ただし図13.1に示されているように、図14.1の γ_2 は図7.2の θ_2 に対応する $\angle OEM$ とは違う。

すると(7.12)の時のように、(14.15)の積分路は次のように変えられる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{\eta_2} = \left(\int_C^{p_s} + \int_{p_s}^D \right) \frac{dp}{\eta_2}.$$
(14.16)

ゆえに $\text{Im}p < 0$ に対しては(14.11)の虚数部が負であることに留意し、(14.14)により積分変数を p から τ に変えると、(14.15)は次のようになる

$$V_{tr}(x, \omega) = \frac{i^2}{4\pi} \left(\int_{\infty}^{\tau_s} - \int_{\tau_s}^{\infty} \right) \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2 - \tau_s^2}} = \frac{1}{2\pi} \int_{\tau_s}^{\infty} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2 - \tau_s^2}}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \{1 + K_{21}(\tau)\} \frac{Y(\tau - \tau_s)}{\sqrt{\tau^2 - \tau_s^2}} e^{i\omega\tau} d\tau.$$
(14.17)

この式は(7.14)に酷似していて、(14.17)の逆フーリエ変換の実数部

$$v_{tr}(x, t) = \text{Re}\{\overline{\mathcal{F}} V_{tr}(x, \omega)\} = \frac{1}{2\pi} [\text{Re}\{1 + K_{21}(t)\}] \frac{Y(t - \tau_s)}{\sqrt{t^2 - \tau_s^2}}$$
(14.18)

が $t \approx \tau_s$ 近傍の透過波の波形である。

次に $\eta_j = \sqrt{p_s^2 - p^2}$ も(12.1)のように

$$\eta_j = \bar{\eta}_j + i\hat{\eta}_j$$
(14.19)

と略すると、(7.4)により

$$-K_{21} = K_{12} = \frac{\mu_1^2(\bar{\eta}_2^2 + \hat{\eta}_2^2) - \mu_2^2(\bar{\eta}_2^2 + \hat{\eta}_2^2) + 2i\mu_1\mu_2(\hat{\eta}_1\bar{\eta}_2 - \bar{\eta}_1\hat{\eta}_2)}{\mu_1^2(\bar{\eta}_1^2 + \hat{\eta}_1^2) + \mu_2^2(\bar{\eta}_2^2 + \hat{\eta}_2^2) + 2\mu_1\mu_2(\bar{\eta}_1\bar{\eta}_2 + \hat{\eta}_1\hat{\eta}_2)}.$$
(14.20)

この時 $\bar{\eta}_2(\tau)$ 、 $\hat{\eta}_2(\tau)$ はすでに(14.10)と(14.13)に求められている。

次に(12.5)、(12.9)および(12.14)によると

$$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ (w_1^2 + 4\bar{p}^2\hat{p}^2)^{1/2} + w_1 \}^{1/2} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \{ (w_1^2 + 4\bar{p}^2\hat{p}^2)^{1/2} - w_1 \}^{1/2}.$$
(14.21)

ゆえに(12.26)の近似式を用いると

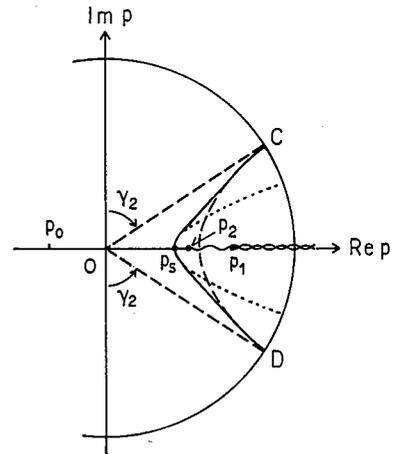


Fig. 14. 1. The path of the integration for the transmitted wave.

$$\operatorname{Im} \eta_1 \approx -\frac{\hat{p}}{\sqrt{Q_1^2-1}}, \quad \operatorname{Re} \eta_1 \approx \left\{ p_1^2 - \bar{p}^2 + \hat{p}^2 \frac{Q_1^2}{Q_1^2-1} \right\}^{1/2}. \quad (14.22)$$

これに(14.6)の p を代入すると $\bar{\eta}_1(\tau)$ および $\hat{\eta}_1(\tau)$ が算出される。

ただし、図 12.3 において見たように、双曲線(14.12)を厳密解として通用させるためには p に上限を設けなければならない。ゆえに次の制限を設ける。

$$p \leq \bar{p}_a + i\hat{p}_a. \quad (14.23)$$

しかるに(14.2)を(14.11)に代入すると

$$\frac{p}{p_s} = \frac{\tau}{\tau_s} + \frac{i}{L} \sqrt{\frac{\tau^2}{\tau_s^2} - 1}. \quad (14.24)$$

$$\therefore \tau/\tau_s \leq \bar{p}_a/p_s \quad (14.25)$$

でなければならない。

さらに注意すべきは双曲線(14.12)は $Q_1 = p_1/p_2 > 1$ に対して得られたことである。ゆえに $Q_1 < 1$ に対しては(14.12)を基礎とするこの節の議論はこのままでは通用しない。しかし $Q_1 < 1$ に対しては E と z および添字 1 と 2 とを交換すると、すべての情況が以前と同じになる。

連立方程式(13.21)を代数的に解くのは困難であるが、(9.10)のように図を用いて正解を知ることはできる。

15. 2つの双曲線に共通な切線の方程式

よく知られているように(渡辺, 1939), 有心2次曲線

$$Ax^2 + By^2 = 1 \quad (15.1)$$

に対する方向係数 m の切線の方程式は

$$y = mx \pm \sqrt{\frac{m^2}{A} + \frac{1}{B}}. \quad (15.2)$$

同様に

$$Cx^2 + Dy^2 = 1 \quad (15.3)$$

に対する同じ方向係数の切線の方程式は

$$y = mx \pm \sqrt{\frac{m^2}{C} + \frac{1}{D}}. \quad (15.4)$$

ゆえに(15.1)と(15.3)に共通な切線は(15.2)と(15.4)とが一致する場合に得られ

$$m = \pm \sqrt{\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{B}\right) / \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{C}\right)}. \quad (15.5)$$

これを(15.2)又は(15.4)に代入すると、共通な切線は次のように表わされる

$$y = x(\operatorname{sgn} m) \sqrt{\frac{1/D-1/B}{1/A-1/C}} + (\operatorname{sgn} y_0) \sqrt{\frac{1/(AD)-1/(BC)}{1/A-1/C}}. \quad (15.6)$$

ただし $(\operatorname{sgn} m)$ および $(\operatorname{sgn} y_0)$ は m および $y_0 = y(x=0)$ の正又は負の符号である。さらに(15.6)の右辺が実数であるためには

$$1/A-1/C, \quad 1/D-1/B \quad \text{および} \quad 1/(AD)-1/(BC) \quad \text{は同符号} \quad (15.7)$$

でなければならない。

さて(15.6)の両辺を2乗すると

$$y^2 = \frac{1}{\frac{1}{A} - \frac{1}{C}} \left\{ x^2 \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{B} \right) + (\operatorname{sgn} m)(\operatorname{sgn} y_0) 2x \sqrt{\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{B} \right) \left(\frac{1}{AD} - \frac{1}{BC} \right)} + \frac{1}{AD} - \frac{1}{BC} \right\}$$

なので、これを(15.1)に代入すると(15.1)と(15.6)との接点の座標 (x_a, y_a) が次のように求められる。まず

$$x_a = -(\operatorname{sgn} m)(\operatorname{sgn} y_0) \frac{1}{A} \sqrt{\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{B} \right) \left\{ \frac{1}{AD} - \frac{1}{BC} \right\}}. \quad (15.8)$$

次にこれを(15.6)の x に代入すると

$$y_a = (\operatorname{sgn} y_0) \frac{1}{B} \sqrt{\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{C} \right) \left\{ \frac{1}{AD} - \frac{1}{BC} \right\}}. \quad (15.9)$$

同様にして(15.3)と(15.6)との接点の座標 (x_b, y_b) を求めると

$$x_b = -(\operatorname{sgn} m)(\operatorname{sgn} y_0) \frac{1}{C} \sqrt{\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{B} \right) \left\{ \frac{1}{AD} - \frac{1}{BC} \right\}}, \quad (15.10)$$

$$y_b = (\operatorname{sgn} y_0) \frac{1}{D} \sqrt{\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{C} \right) \left\{ \frac{1}{AD} - \frac{1}{BC} \right\}}.$$

さらに(15.8)~(15.10)によると、次の関係が得られる

$$x_a/x_b = C/A, \quad y_a/y_b = D/B. \quad (15.11)$$

さて(15.1)が双曲線の場合は

$$A > 0 \quad \text{かつ} \quad B < 0 \quad (15.12)$$

なので、(15.8)および(15.9)によると

$$x_a \text{ の符号} = -(\operatorname{sgn} m)(\operatorname{sgn} y_0) \text{ および } y_a \text{ の符号} = -(\operatorname{sgn} y_0).$$

ゆえに $x_a > 0$, $y_a > 0$ に対しては

$$\operatorname{sgn} m > 0, \quad \operatorname{sgn} y_0 < 0. \quad (15.13)$$

逆に(15.13)の場合は、 $x_a > 0$, $y_a > 0$ であるのみならず、 $C > 0$ かつ $D < 0$ なる双曲線(15.3)と(15.4)との接点の座標も $x_b > 0$, $y_b > 0$ である。

以上の諸結果によると、(15.1), (15.3)および(15.6)に

$$A = \frac{1}{a^2}, \quad B = -\frac{1}{b^2}, \quad C = \frac{1}{c^2}, \quad D = -\frac{1}{d^2} \quad (15.14)$$

を代入し、(15.13)を採用すると、2つの双曲線

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{d^2} = 1 \quad (15.15)$$

に共通な切線の方程式は

$$y = x \sqrt{\frac{b^2 - d^2}{a^2 - c^2}} - \sqrt{\frac{b^2 c^2 - a^2 d^2}{a^2 - c^2}}. \quad (15.16)$$

さらに(15.15)と(15.16)との接点の座標(15.8)~(15.10)はそれぞれ次のようになる

$$x_a = a^2 \sqrt{\frac{b^2 - d^2}{b^2 c^2 - a^2 d^2}}, \quad y_a = b^2 \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{b^2 c^2 - a^2 d^2}}, \quad (15.17)$$

$$x_b = c^2 \sqrt{\frac{b^2 - d^2}{b^2 c^2 - a^2 d^2}}, \quad y_b = d^2 \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{b^2 c^2 - a^2 d^2}}. \quad (15.18)$$

以上のように準備が整ったので、双曲線(12.28)、(10.14)の無次元化を解除し、(15.15)の第1式、第2式をそれぞれに対応させ、(13.12)を用いると、まず

$$a^2 = p_2^2 \sin^2 \theta_2, \quad b^2 = p_2^2 \cos^2 \theta_2. \quad (15.19)$$

次に図15.1の R_2, γ_2 を用いると

$$c^2 = \frac{(E p_2 + |z| p_1)^2}{R_2^2} \tan^2 \gamma_2, \quad d^2 = \frac{(E p_2 + |z| p_1)^2}{R_2^2}. \quad (15.20)$$

さらに点 $P'(x, Q_1, Z)$ を同図に設けて $\angle OEP'$ を σ_2 と記号すると

$$E + Q_1 |z| = R_2 \sin \gamma_2 \cot \sigma_2. \quad (15.21)$$

ゆえに(15.20)は次のように書き換えられる。

$$c^2 = d^2 \tan^2 \gamma_2, \quad d^2 = p_2^2 \sin^2 \gamma_2 \cot^2 \sigma_2. \quad (15.22)$$

そこで(15.19)と(15.22)を(15.16)に代入すると2つの双曲線(12.28)、(10.14)に共通な切線の方程式が次のように得られる。

$$\hat{p} = \bar{p} \sqrt{\frac{\cos^2 \theta_2 - \sin^2 \gamma_2 \cot^2 \sigma_2}{\sin^2 \theta_2 - \sin^2 \gamma_2 \cot^2 \sigma_2 \tan^2 \gamma_2}} - p_2 \sin \gamma_2 \cot \sigma_2 \sqrt{\frac{\cos^2 \theta_2 \tan^2 \gamma_2 - \sin^2 \theta_2}{\sin^2 \theta_2 - \sin^2 \gamma_2 \cot^2 \sigma_2 \tan^2 \gamma_2}}. \quad (15.23)$$

16. 解析的な近似解のまとめ

スネルの法則を満たす Q_s は(9.11)のように解析的に厳密に求められるので、(12.16)の $W_j (j=1, 2)$ および(12.17)の

$$E_j(\bar{Q}, \hat{Q}) = (W_j^2 + 4\bar{Q}^2 \hat{Q}^2)^{1/2}, \quad j=1, 2 \quad (16.1)$$

をそれぞれ $(Q_s, 0)$ 近傍においてテーラー展開しよう

$$W_j(\bar{Q}, \hat{Q}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\{ (\bar{Q} - Q_s) \frac{\partial}{\partial \bar{Q}} + \hat{Q} \frac{\partial}{\partial \hat{Q}} \right\}^n W_j(Q_s, 0), \quad (16.2)$$

$$E_j(\bar{Q}, \hat{Q}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\{ (\bar{Q} - Q_s) \frac{\partial}{\partial \bar{Q}} + \hat{Q} \frac{\partial}{\partial \hat{Q}} \right\}^n E_j(Q_s, 0). \quad (16.3)$$

しかるに

$$\begin{aligned} \partial W_j / \partial \bar{Q} &= -2\bar{Q}, & \partial W_j / \partial \hat{Q} &= 2\hat{Q}, \\ \partial^2 W_j / \partial \bar{Q}^2 &= -2, & \partial^2 W_j / \partial \hat{Q}^2 &= 2, & \partial^2 W_j / \partial \bar{Q} \partial \hat{Q} &= 0 \end{aligned} \quad (16.4)$$

なので、(16.2)の右辺の $n > 2$ の項は0である。

$$\therefore W_j = Q_j - Q_s^2 - 2(\bar{Q} - Q_s) Q_s - (\bar{Q} - Q_s)^2 + \hat{Q}^2, \quad Q_2 = 1/Q_1. \quad (16.5)$$

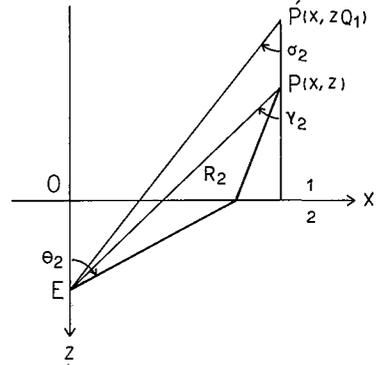


Fig. 15. 1. Geometrical relations between various angles. $c_1 < c_2$.

次に

$$\begin{aligned}
 \partial E_1 / \partial \bar{Q} &= 2(W_1^2 + 4\bar{Q}^2 \hat{Q}^2)^{-1/2} \bar{Q}(\bar{Q}^2 + \hat{Q}^2 - Q_1), \\
 \partial E_1 / \partial \hat{Q} &= 2(W_1^2 + 4\bar{Q}^2 \hat{Q}^2)^{-1/2} \hat{Q}(Q_1 + \bar{Q}^2 + \hat{Q}^2), \\
 \partial^2 E_1 / \partial \bar{Q}^2 &= -4\bar{Q}^2(\bar{Q}^2 + \hat{Q}^2 - Q_1)^2 (W_1^2 + 4\bar{Q}^2 \hat{Q}^2)^{-3/2} + 2(W_1^2 + 4\bar{Q}^2 \hat{Q}^2)^{-1/2} (3\bar{Q}^2 + \hat{Q}^2 - Q_1), \\
 \partial^2 E_1 / \partial \bar{Q} \partial \hat{Q} &= -4\bar{Q}\hat{Q}(\bar{Q}^2 + \hat{Q}^2 - Q_1)(W_1^2 + 4\bar{Q}^2 \hat{Q}^2)^{-3/2} (W_1 + 2\bar{Q}^2) + 4\bar{Q}\hat{Q}(W_1^2 + 4\bar{Q}^2 \hat{Q}^2)^{-1/2}, \\
 \partial^2 E_1 / \partial \hat{Q}^2 &= -4\hat{Q}^2(\bar{Q}^2 + \hat{Q}^2 + Q_1)^2 (W_1^2 + 4\bar{Q}^2 \hat{Q}^2)^{-3/2} + 2(W_1^2 + 4\bar{Q}^2 \hat{Q}^2)^{-1/2} (3\hat{Q}^2 + \bar{Q}^2 + Q_1). \\
 \therefore \partial E_1(Q_s, 0) / \partial \bar{Q} &= -2Q_s, \quad \partial E_1(Q_s, 0) / \partial \hat{Q} = 0, \quad \partial^2 E_1(Q_s, 0) / \partial \bar{Q}^2 = -2, \quad \partial^2 E_1(Q_s, 0) / \partial \bar{Q} \partial \hat{Q} = 0, \\
 \partial^2 E_1(Q_s, 0) / \partial \hat{Q}^2 &= 2(Q_1 + Q_s^2) / (Q_1 - Q_s^2).
 \end{aligned} \tag{16.6}$$

さて

$$Q_s < 1\sqrt{Q_1} < \sqrt{Q_1} \tag{16.7}$$

なので、 $Q_1 \approx 1$ でないかぎり $Q_1 - Q_s^2$ は 0 に近くない。ゆえに $\partial^2 E_1(Q_s, 0) / \partial \hat{Q}^2$ は極端に大きくなる恐れはない。 E_1 についてはさらに高階の微係数も $Q = Q_s$ において余り大きくならないので、(16.3)の展開を $n=2$ までに止めることにしよう。すると(16.3)は次のようになる。

$$E_1 - W_1 = 2\hat{Q}^2 / (Q_1 / Q_s^2 - 1). \tag{16.8}$$

これに反し、(16.6)によると

$$\partial^2 E_2(Q_s, 0) / \partial \hat{Q}^2 = 2(1/Q_1 + Q_s^2) / (1/Q_1 - Q_s^2) \tag{16.9}$$

であり、(16.7)の場合に(16.9)はきわめて大きくなる恐れがある。 E_2 については $n > 2$ の高階の微係数が $Q = Q_s \approx 1/Q_1$ において(16.9)よりもさらに大になる。ゆえに E_2 については(16.3)のようなテーラー展開は無理である。

そこで(12.17)の第1式の右辺に(16.8)のみを代入し、根号を開くと(12.28)の代りに次の結果が得られる

$$\frac{\bar{Q}^2}{L} - \hat{Q}^2 \approx \frac{1}{Q_1} \frac{1}{L^2 + 1}; \quad L = X - Z(Q_1 / Q_s^2 - 1)^{-1/2}. \tag{16.10}$$

この式の L は(13.19)の L と同じである。ただし今度は Q_s を既知と考えている。(16.10)の近似記号は E_1 の展開(16.3)を $n=2$ までに止めたことに対応している。

次に

$$(\bar{Q}^2 + \hat{Q}^2)^2 \gg 1/Q_1^2, \quad Q_1 > 1 \tag{16.11}$$

を仮定し、この場合に不等号 \gg の右辺を左辺に対して無視すると

$$W_1^2 + 4\bar{Q}^2 \hat{Q}^2 \approx (\bar{Q}^2 + \hat{Q}^2)^2 \left\{ 1 - \frac{2}{Q_1} \frac{\bar{Q}^2 - \hat{Q}^2}{(\bar{Q}^2 + \hat{Q}^2)^2} \right\}. \tag{16.12}$$

しかるに(16.11)によると

$$\frac{1}{Q_1^2} \frac{1}{(\bar{Q}^2 + \hat{Q}^2)^2} \left(\frac{\bar{Q}^2 - \hat{Q}^2}{\bar{Q}^2 + \hat{Q}^2} \right)^2 \ll 1$$

なので

$$\left\{ 1 - \frac{1}{Q_1} \frac{\bar{Q}^2 - \hat{Q}^2}{(\bar{Q}^2 + \hat{Q}^2)^2} \right\}^2 \approx 1 - \frac{2}{Q_1} \frac{\bar{Q}^2 - \hat{Q}^2}{(\bar{Q}^2 + \hat{Q}^2)^2}.$$

これを(16.12)の右辺に代入すると

$$(W_2^2 + 4\bar{Q}^2\hat{Q}^2)^{1/2} \approx (\bar{Q}^2 + \hat{Q}^2) \left\{ 1 - \frac{1}{Q_1} \frac{\bar{Q}^2 - \hat{Q}^2}{(\bar{Q}^2 + \hat{Q}^2)^2} \right\}.$$

$$\therefore (W_2^2 + 4\bar{Q}^2\hat{Q}^2)^{1/2} - W_2 \approx 2\bar{Q}^2 \left(1 - \frac{1}{Q_1} \frac{1}{\bar{Q}^2 + \hat{Q}^2} \right).$$

ただし又もや(16.11)によると

$$\left(1 - \frac{1}{2Q_1} \frac{1}{\bar{Q}^2 + \hat{Q}^2} \right)^2 \approx 1 - \frac{1}{Q_1} \frac{1}{\bar{Q}^2 + \hat{Q}^2}$$

$$\therefore \{(W_2^2 + 4\bar{Q}^2\hat{Q}^2)^{1/2} - W_2\}^{1/2} \approx \sqrt{2} \bar{Q} \left(1 - \frac{1}{2Q_1} \frac{1}{\bar{Q}^2 + \hat{Q}^2} \right). \quad (16.13)$$

上式の近似 \approx は仮定(16.11)のみによる。ゆえに(16.11)の他に仮定

$$(\bar{Q}^2 + \hat{Q}^2)^2 \gg Q_1^2, \quad Q_1 > 1 \quad (16.14)$$

を付加すると、 W_1 についても(16.13)と同様な結果が得られる

$$\{(W_1^2 + 4\bar{Q}^2\hat{Q}^2)^{1/2} - W_1\}^{1/2} \approx \sqrt{2} \bar{Q} \left(1 - \frac{Q_1}{2} \frac{1}{\bar{Q}^2 + \hat{Q}^2} \right). \quad (16.15)$$

ゆえに(16.13)と(16.15)を(12.17)の第1式に代入すると

$$X\hat{Q} \approx (1+Z) \left\{ 1 - \frac{1+ZQ_1^2}{2Q_1(1+Z)} \frac{1}{\bar{Q}^2 + \hat{Q}^2} \right\} \bar{Q}.$$

しかるに

$$(1/Q_1^2 + Z)/(1+Z) < 1, \quad Q_1 < 1 \quad (16.16)$$

なので、(16.14)によると

$$\left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{1/Q_1^2 + Z}{1+Z} \frac{Q_1}{\bar{Q}^2 + \hat{Q}^2} \right\}^2 \approx 1 - \frac{1/Q_1^2 + Z}{1+Z} \frac{Q_1}{\bar{Q}^2 + \hat{Q}^2}.$$

$$\therefore X^2 \hat{Q}^2 \approx (1+Z)^2 \left\{ 1 - \frac{1/Q_1^2 + Z}{1+Z} \frac{Q_1}{\bar{Q}^2 + \hat{Q}^2} \right\} \bar{Q}^2. \quad (16.17)$$

ここで(16.14)、(16.16)の不等号を強調して、さらに

$$\frac{1/Q_1^2 + Z}{1+Z} \frac{Q_1}{\bar{Q}^2 + \hat{Q}^2} \ll 1, \quad Q_1 > 1 \quad (16.18)$$

と仮定し、左辺を1に対して無視すると(16.17)は次のように簡単になる。

$$\bar{Q}/X = \pm \hat{Q}/(1+Z). \quad (16.19)$$

ただし条件(16.18)が満されるためには $\bar{Q}^2 + \hat{Q}^2$ がきわめて大でなければならない。ゆえに(16.17)の右辺第2項を無視しないで、(16.19)を(16.17)に対する第1近似とみなし、(16.19)を漸近線とする双曲線を(16.17)に当てはめよう。そのために(16.19)を(16.17)の右辺第2項の \hat{Q}/\bar{Q} に代入すると

$$X^2 \hat{Q}^2 \approx (1+Z)^2 \bar{Q}^2 - \frac{1}{Q_1} (1+Z)(1+ZQ_1^2) \frac{X^2}{X^2 + (1+Z)^2}. \quad (16.20)$$

さらに

$$\frac{1/Q_1 + ZQ_1}{1+Z} = \frac{(\sqrt{Z} + 1/\sqrt{Z})(\sqrt{Z}Q_1^2 + 1/\sqrt{Z}Q_1^2)}{(\sqrt{Z} + 1/\sqrt{Z})^2}, \quad (16.21)$$

$$\begin{aligned}
 (\sqrt{Z}+1/\sqrt{Z})(\sqrt{ZQ_1^2}+1/\sqrt{ZQ_1^2}) &= (\sqrt{ZQ_1}+1/\sqrt{ZQ_1})^2 \{1+(\sqrt{Q_1}-1/\sqrt{Q_1})^2/\sqrt{ZQ_1}\}^2 \\
 &\approx (\sqrt{ZQ_1}+1/\sqrt{ZQ_1})^2 \left\{1+\frac{(\sqrt{Q_1}-1/\sqrt{Q_1})^2}{2} \frac{1}{(\sqrt{ZQ_1}+1/\sqrt{ZQ_1})^2}\right\}^2.
 \end{aligned}
 \tag{16.22}$$

ゆえに(16.20)は(11.9)と一致し、さらに(10.6)により(16.22)の右辺の{ }内の第2項を無視すると、(11.9)は(10.14)と一致する。このことは図12.1の白丸が(10.14)よりもむしろ(11.9)とよりよい一致を見たことに対応している。

文 献

- AKI, K. and P.G. RICHARDS, 1980. *Quantitative Seismology*, Vol. 1, Freeman, San Francisco, pp. 557.
 HELMBERGER, D.V., 1968. The Crust-mantle Transition in the Bering Sea. *Bull. Seis. Soc. Am.*, 58, 179-214.
 岩村 聡, 石垣春夫, 鈴木文夫, 邦訳, 1971. SCHWARTZ 著 超関数の理論. 岩波書店.
 田治米鏡二, 1969, 円筒波が2媒質の境界平面で反射または屈折を行った後の波面, 地震探鉱実験グループ会報, 53, 1-6.
 田治米鏡二, 1984. 超関数理論の概観と波動論への応用. 自然災害科学北海道地区センター, pp. 109.
 渡辺孫一郎, 1939. 初等解析幾何学. 裳華房, 東京.