



Title	非線形制御系の離散化表現を用いた Lorenz model における Chaos 現象のシミュレーション
Author(s)	高橋, 勝; TAKAHASHI, Masaru; 島, 公脩 他
Citation	北海道大学地球物理学研究報告, 49, 191-199
Issue Date	1987-03-30
DOI	https://doi.org/10.14943/gbhu.49.191
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/14167
Type	departmental bulletin paper
File Information	49_p191-199.pdf



非線形制御系の離散化表現を用いた Lorenz model における Chaos 現象のシミュレーション

高橋 勝・島 公脩

北海道大学工学部精密工学科

(昭和 61 年 11 月 25 日受理)

A Simulation of Chaotic Phenomena in Lorenz Model Using Digital Expression for Nonlinear Control Systems

By Masaru TAKAHASHI and Masasuke SHIMA

Department of Precision Engineering, Faculty of Engineering, Hokkaido University

(Received November 25, 1986)

Using the discretized expression of nonlinear control systems developed recently by one of the authors, we studied the chaotic behaviour and the strange attractor of the Lorenz model, which may be of importance in the nonlinear digital control systems.

Our approximate expression of $O(\Delta\tau^4)$ with the computation time step $\Delta\tau$ reproduced satisfactorily the chaos and the strange attractor found in the papers by Lorenz (1963) and Lanford (1977). It is observed that the simulated results depend on input values, initial conditions and $\Delta\tau$ very sensitively, which not only requires the careful selection of computational schemes and the precision of data, but also reflects the complicated nature of the dynamics of the Lorenz model.

Though our approximate digital expression was useful in this study, there remains many problems to be solved for its applications to real systems.

I はじめに

1963 年, 気象学者 E. N. Lorenz は簡単な三つの非線形微分方程式の組が chaos のふるまいをすることを明らかにした。これは散逸系における deterministic chaos の最初の例である。その後, Lorenz model についていろいろな研究がなされたが, 1977 年 O. E. Lanford は Lorenz model の strange attractor を得た。又, chaos 現象の研究はその後も進んでいるが, Lorenz model の重要性は今日でも変わらない。

一方, 線形システムの制御論は, 1950 年代後半に, 状態空間の概念の導入により線形回路理論から独立した。その後, 構造論・安定論・最適制御論・同定・設計論の各分野において著しい発展を見せ, 情報処理技術の驚くべき進歩と相まって, 工業化社会を支える技術の要めの位置にあるといえよう。そうしてその広い応用分野より, 現在必要とされているのは, 非線形システムの制御理論とその実用化である。著者の一人(島)が研究している非線形システムの離散時間表現の方法は, この非線形デジタル制御系の設計に用いる近似モデルの開発が目的である。

ところが, 非線形システムのデジタル制御に伴う chaos 現象の発生は, 現代システム理論の創始者の一人である R. E. Kalman によって, 1956 年に発見されている。この chaos 現象は, システムを制御するという立場からはどちらかといえば望ましくない現象である。また, Lorenz model を 3 節で述べるよう

に入力, 状態, 出力を備えたシステムの表現とみなすとき, それは生態システム論に現われる Lotka Volterra 方程式と類似の, いわゆる双線形システムに属する. 双線形性はもっとも軽微な非線形性であるから, より複雑な非線形システムのデジタル制御を考える際には, いかにして chaos を発生させないようにするか, あるいはそのような考慮はしなくてもよいものであるのかを十分に研究しておかねばならないであろう.

そこで, 本稿では, 我々の方法を用いて Lorenz model より導かれた非線形システムの離散時間モデルがどの程度まで系の挙動を表現しうるかにつき考察する.

II. Lorenz model

Lorenz (1963) に従って Lorenz model の導き方を略述する.

Rayleigh (1916) は一様な深さ H をもった流体の層の上表面と下表面の間の温度差が一定値 ΔT に保たれているときの流れについて研究した. そのような系はいかなる運動もおこらない定常解をもち, そして温度は深さとともに直線的に変化する. としてもしもこの解が不安定ならば対流がおこる.

全ての運動が $x-z$ 平面に平行で y 軸方向にいかなる変動もない場合には, その系を支配する方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi = - \frac{\partial (\psi, \nabla^2 \psi)}{\partial (x, z)} + \nu \nabla^4 \psi + g\alpha \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \theta = - \frac{\partial (\psi, \theta)}{\partial (x, z)} + \frac{\Delta T}{H} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \kappa \nabla^2 \theta \quad (2.2)$$

と書かれる (Saltzman, 1962). ここに ψ は 2 次元の運動に対する流れ関数, θ は対流のない状態における温度からの偏より, そして g, α, ν, κ は夫々, 重力の加速度, 体積膨脹率, 粘性係数, 熱伝導度である. 上部と下部が自由境界の場合, 問題はもっともとり扱いやすくなり ψ と $\nabla^2 \psi$ は両境界で消える.

Rayleigh はもしも Rayleigh number

$$R_a = g\alpha H^3 \Delta T \nu^{-1} \kappa^{-1} \quad (2.3)$$

が臨界値

$$R_c = \pi^4 a^{-2} (1 + a^2)^3 \quad (2.4)$$

をこえたならば

$$\psi = \psi \sin(\pi a H^{-1} x) \sin(\pi H^{-1} z) \quad (2.5)$$

$$\theta = \theta_0 \cos(\pi a H^{-1} x) \sin(\pi H^{-1} z) \quad (2.6)$$

の形の運動の場ができることをみいだした. R_c の最小値, つまり $27 \pi^4 / 4$, は $a^2 = \frac{1}{2}$ のときおこる. ここで

$$a(1 + a^2)^{-1} \kappa^{-1} \psi = X \sqrt{2} \sin(\pi a H^{-1} X) \sin(\pi H^{-1} Z) \quad (2.7)$$

$$\pi R_c^{-1} R_a \Delta T^{-1} \theta = Y \sqrt{2} \cos(\pi a H^{-1} X) \sin(\pi H^{-1} Z) - Z \sin(2 \pi H^{-1} Z) \quad (2.8)$$

とおく. ここに, X, Y, Z は時間のみの関数である.

表現 (2.7) と (2.8) を (2.1) と (2.2) に代入し (2.7) と (2.8) にある以外の三角関数を省略すると

$$X' = -\sigma X + \sigma Y \quad (2 \cdot 9)$$

$$Y' = -XZ + rX - Y \quad (2 \cdot 10)$$

$$Z' = XY - bZ \quad (2 \cdot 11)$$

を得る。これが Lorenz model である。ここに τ は無次元時間

$$\tau = \pi^2 H^{-2} (1 + a^2) x t \quad (2 \cdot 12)$$

による微分を表わし、 $\sigma = \alpha^{-1} \nu$ は Prandtl number, $r = R_c^{-1} R_a$, そして

$b = 4(1 + a^2)^{-1}$ である。 X は対流運動の強さに比例し、 Y は上昇する流れと下降する流れとの間の温度差に比例し、上昇する温い流れと下降する冷い流れは X と Y に同じ符号を与える。変数 Z は垂直温度曲線の直線性からのずれに比例する。(2・9), (2・10), (2・11) は定常解 $X = Y = Z = 0$ と $r > 1$ に対して他の二つの定常解

$$X = Y = \pm \sqrt{b(r-1)}, \quad Z = r - 1 \quad (2 \cdot 13)$$

をもつ。又、定常的対流の不安定性に対する臨界値は

$$r = \sigma(\sigma + b + 3)(\sigma - b - 1)^{-1} \quad (2 \cdot 14)$$

で与えられる。

III. シミュレーションモデル

Lorenz model において r を入力とみなすと

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma X + \sigma Y \\ -XZ - Y \\ XY - bZ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ X \\ 0 \end{pmatrix} r \quad (3 \cdot 1)$$

となる。出力としては、系の「状態量」(X, Y, Z) のすべてを考慮しておくと、Lorenz model を一つのシステムの表現とみなすことができる。これに島が開発したテーラー展開を用いた非線形系に対する離散時間化法を適用する。まずその方法を略述する。入力に関して線形な非線形制御系

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{\alpha=1}^r g_{\alpha}(x) u^{\alpha}(t) \quad (3 \cdot 2)$$

$$y = h(x) \quad (3 \cdot 3)$$

の離散時間表現について考える。ここに x は n 次元状態ベクトル、 u^{α} はスカラー入力、 y は m 次元出力ベクトル、 f, g_{α}, h は夫々、 n 次元、 n 次元、 m 次元のベクトル値解析関数である。区間 $[t_0, t_1]$ で入力 $u^{\alpha}(t)$ ($\alpha = 1, \dots, r$) がすべて定数であるものとし、

$$u^{\alpha}(t) = u^{\alpha} \text{ (定数)}, \quad \alpha = 1, \dots, r \quad (3 \cdot 4)$$

と表わしておき、 $x(t_1)$ を $x(t_0)$ における値で表現し、 u^{α} の中で整理すると次式を得る。すなわち、形式的幅級数表現として

$$\begin{aligned}
 x(t_1) &= x(t_0) \\
 &+ [A_f^0 + \sum_{q \geq 1} \sum_{|\beta|=q} (u^1)^{p_1} \cdots (u^r)^{p_r} A_f^q \otimes \Lambda^{\otimes q} \underbrace{g_1 \cdots g_1}_{p_1} \cdots \underbrace{g_r \cdots g_r}_{p_r}] f(x_0) \\
 &+ \sum_{a=1}^r [A_f^0 + \sum_{q \geq 1} \sum_{|\beta|=q} (u^1)^{p_1} \cdots (u^r)^{p_r} A_f^q \otimes \Lambda^{\otimes q} \underbrace{g_1 \cdots g_1}_{p_1} \cdots \underbrace{g_r \cdots g_r}_{p_r}] g_a(x_0) u^a
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

を得る。ここに、

$$A_f^q \triangleq \sum_{k \geq q} \frac{(t_1 - t_0)^{k+1}}{(k+1)!} \Lambda_f^{q, k-q}, \quad q=0, 1, 2, \dots \tag{3.6}$$

$$\Lambda_f^k \triangleq \frac{1}{k!} \Lambda_f^1 \otimes \cdots \otimes \Lambda_f^1 = \{D(f)\}^k \tag{3.7}$$

$$\Lambda_f^1 \triangleq D(f) \triangleq \sum_{i=1}^{\mu} f^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{3.8}$$

$$\Lambda_{f_{i_1}}^1 \times \Lambda_{f_{i_2}}^1 \otimes \cdots \otimes \Lambda_{f_{i_k}}^1 \triangleq \sum_{\sigma} D(f_{\sigma(i_1)}) D(f_{\sigma(i_2)}) \cdots D(f_{\sigma(i_k)}) \tag{3.9}$$

であり、 Σ は置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ \sigma(i_1) & \sigma(i_2) & \cdots & \sigma(i_k) \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

のすべてについてとるものとする。つまり対称化作用である。さらに

$$\Lambda^{\otimes q} \underbrace{g_0 \cdots g_0}_{p_0} \cdots \underbrace{g_r \cdots g_r}_{p_r} \triangleq \frac{1}{p_0! \cdots p_r!} \underbrace{\Lambda_{g_0}^1 \otimes \cdots \otimes \Lambda_{g_0}^1}_{p_0} \otimes \cdots \otimes \underbrace{\Lambda_{g_r}^1 \otimes \cdots \otimes \Lambda_{g_r}^1}_{p_r} \tag{3.11}$$

$$\left. \begin{aligned}
 P &= (P_1, \dots, P_r), \quad |P| = P_1 + P_2 + \cdots + P_r \\
 P! &= P_1! \cdots P_r!
 \end{aligned} \right\} \tag{3.12}$$

である。

導出と応用の詳細は省略するので文献を参照されたい。(3.6)式の作用素 A_f^k に $(t_1 - t_0)$ の巾があるの
で、 $t_1 - t_0$ が十分小さいならば表現(3.5)において高次の中は省略しても十分に系の特性を表わすことが
できるであろう。

これを Lorenz model にあてはめ、時間きざみ $\Delta\tau = (t_1 - t_0)$ の三乗の項まで求めると

$$\begin{pmatrix} x(k+1) \\ y(k+1) \\ z(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(k) \\ y(k) \\ z(k) \end{pmatrix} = (k) + \Delta\tau \begin{pmatrix} -\sigma x(k) + \sigma y(k) \\ -x(k) - x(k)z(k) \\ x(k)y(k) - bz(k) \end{pmatrix} +$$

(以下、 $x(k), y(k), z(k)$ を単に x, y, z と書く)

$$+ \frac{\Delta\tau^2}{2!} \begin{pmatrix} \sigma^2 x - \sigma^2 y - \sigma y - \sigma x z \\ \sigma x z - \sigma y z + y + x z - x^2 y + b x z \\ -\sigma x y + y^2 - x y - x^2 z - b x y + b^2 z \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\Delta\tau^3}{3!} \begin{pmatrix} -\sigma^3 x + \sigma^2 x z + \sigma^3 y - \sigma^2 y z + \sigma^2 + 2\sigma y \\ + \sigma^2 x z + \sigma x z - \sigma x^2 y + b \sigma x z \\ -\sigma^2 x z - \sigma x z + 2\sigma x^2 y - b \sigma x z + \sigma^2 y z \\ + \sigma y z - 2\sigma x y^2 + b \sigma y z + \sigma y z - y + x^2 y \\ + \sigma x z^2 - x z + x^3 z \\ \sigma^2 x y + \sigma x y + 2\sigma x^2 z + b \sigma x y - \sigma^2 y^2 - \sigma y^2 \\ - 2\sigma x y z - b \sigma y^2 + \sigma y^2 - 2\sigma y^2 + x y \\ + b x y + \sigma x^2 z - 2\sigma x y z + x^2 z + b x^2 z \\ - x^3 y + b^2 x y - b^3 z + b x^2 z \end{pmatrix} + \Delta\tau \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ 0 \end{pmatrix} r + \frac{\Delta\tau^2}{2!} \begin{pmatrix} \sigma x \\ -\sigma x + \sigma y - x \\ x^2 \end{pmatrix} r \\
& + \frac{\Delta\tau^3}{3!} \begin{pmatrix} -2\sigma^2 x + \sigma^2 y - \sigma x \\ \sigma^2 x - \sigma^2 y - \sigma y - \sigma x z \\ + \sigma x - \sigma y - \sigma x z + x - x^3 \\ -3\sigma x^2 + 4\sigma x y \\ -x^2 - b x^2 \end{pmatrix} r + \frac{\Delta\tau^3}{3!} \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma x \\ 0 \end{pmatrix} r^2 \tag{3.13}
\end{aligned}$$

となる。 $\Delta\tau^2$ までのモデルでは chaos をとらえることができず、また $\Delta\tau^4$ までのモデルでは用いた計算機
 の能力からいって計算が無理であり、又、 $\Delta\tau^3$ の項までで十分であると思われる。

IV. シミュレーション結果

1. Chaos と strange attractor

Lorenz 自身の結果と比較する為、Saltzman (1962) が用いた $\sigma=10$, $b=8/3$ を用いる。この時、定常
 的対流を不安定にする Rayleigh number の臨界値は線形理論により

$$r = 470/19 \approx 24.74$$

と求められる。そして Lorenz と同じく臨界値より少し大きめの $r=28$ を入力として用いる。この時、定常
 的対流状態は位相空間上の点 $(6\sqrt{2}, 6\sqrt{2}, 27)$ と $(-6\sqrt{2}, -6\sqrt{2}, 27)$ に対応する。又、全く対流
 のおこらない状態は原点 $(0, 0, 0)$ に対応する。初期値も Lorenz と同じ $(0, 1, 0)$ とする。 $\Delta\tau=$
 0.001 でシミュレートした結果が図 1, $\Delta\tau=0.0001$ の場合が図 2, そして $\Delta\tau=0.01$ のものが図 3 である。

これらの図をみると、Lorenz model の「応答」はある時間 (ほぼ $t=16$) が経過した後は、chaos と呼
 ばれている、有界かつ非周期的な運動をしていることがわかる。 $\Delta\tau=0.001$ あるいは $\Delta\tau=0.0001$ の場合
 の結果は Lorenz の結果に類似している。Lorenz は中心差分と前進差分を組合せた算法で $\Delta\tau=0.01$ で計
 算しているがその計算法でも $\Delta\tau$ をもっと小さくとったならいくぶん異なる結果となるであろう。時間の
 きざみ幅 $\Delta\tau$ をかえると $t=16$ 以後の挙動の時間的経過がかなり異なってくることは、(3.13) 式が O
 $(\Delta\tau^4)$ の近似であることにもよるが、基本的には Lorenz model の軌道が集積している領域においては
 計算誤差にきわめて敏感であることを示している。

しかしながら、これらの一見異なるかに見える挙動は、位相空間における軌道をしらべると Strange
 Attractor というある種の規則性(秩序)として現われる。上記のシミュレーション結果 ($\Delta\tau=0.001$, $t=$
 20 より $t=30$ まで) より得られる Strange Attractor を $X-Y$ 平面, $Y-Z$ 平面に射影したのが図 4, 図
 5 である。 $\Delta\tau=0.01$ の場合もほぼ同じ型の Strange Attractor が得られている。Lorenz の $t=14$ から

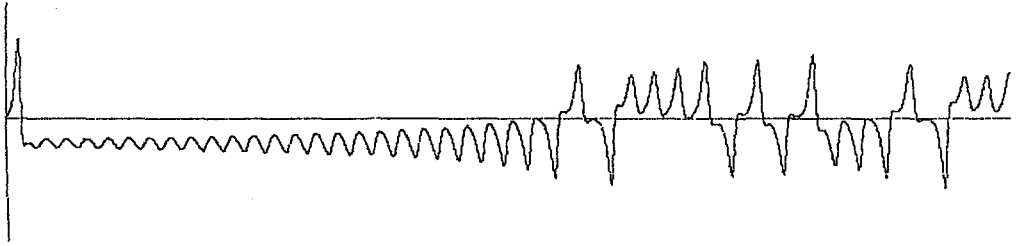


Fig. 1. The numerical result of Y from time 0 to 30 for the initial values $(0, 1, 0)$ and the input value 2 with time step 0.001

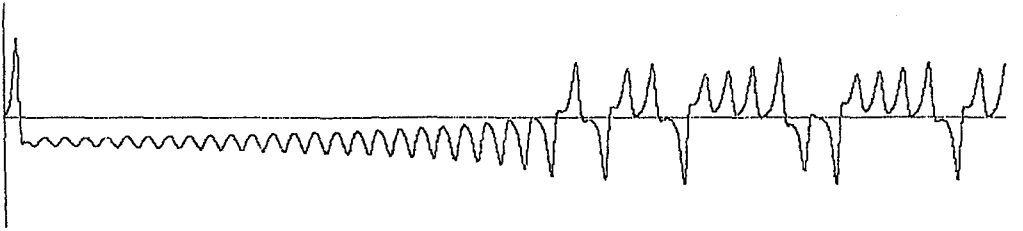


Fig. 2. The numerical result of Y from time 0 to 30 for the initial values $(0, 1, 0)$ and the input value 2 with time step 0.0001

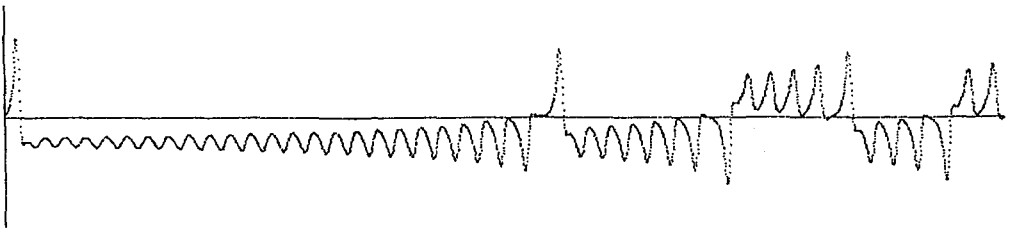


Fig. 3. The numerical result of Y from time 0 to 30 for the initial values $(0, 1, 0)$ and the input value 2 with time step 0.01

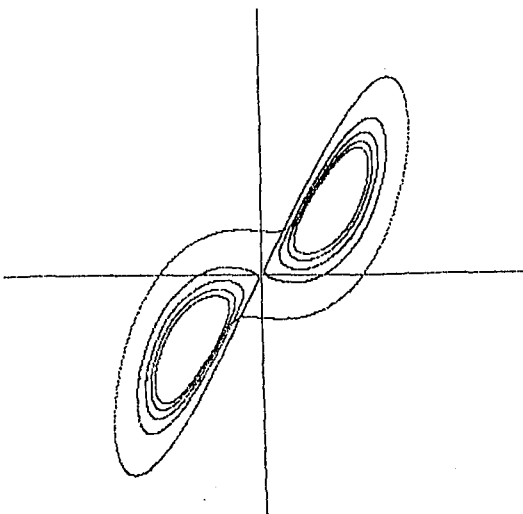


Fig. 4. The strange attractor of $X-Y$ from time 20 to 30 for the initial values $(0, 1, 0)$ and the input value 28 with time sep 0.001

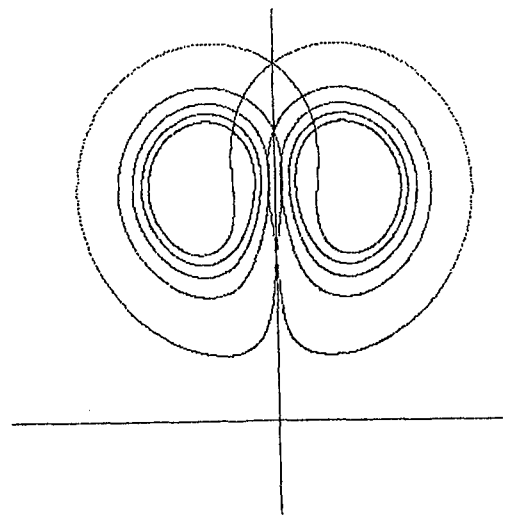


Fig. 5. The strange attractor of $Y-Z$ from time 20 to 30 for the initial values $(0, 1, 0)$ and the input value 28 with time step 0.001

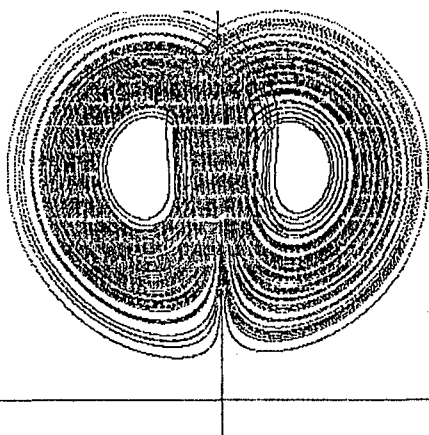


Fig. 6. The strange attractor of $Y-Z$ from time 20 to 100 for the initial values $(0, 1, 0)$ and the input value 28 with time step 0.001

$t=19$ までの数値を用いた図では Strange Attractor になっていないが、我々の得たものは Lanford の得た Strange Attractor と形状は同じである。 $t=20$ から $t=100$ までの挙動を $Y-Z$ 平面に射影したのが図 6 である。

この “Strange Attractor” を chaos とみるか order とみるかは、見解の分かれるところではなからうか。 2次元位相空間における Poincaré-Bendixson の定理が3次元以上の空間ではなりたたないことにより現われる現象—規則性のひとつであるとみなすこともできよう。注意すべきことは、さきに述べた軌道の集積する領域において系に作用する外乱の影響は、その後の時間的経過を全く異なるものとしてしまうことである。

2. 入力臨界値の確認

次に r の臨界値 24.74 以下の入力に対して chaos がおこるか否かを見るために $r=24$ として同じ初期条件で計算した結果が図 7 である。この場合は規則正しい周期的振舞を示し chaos はおこらないことがわかる。次に $r=25$ とした時の結果が図 8 である。これを見ると時間の経過とともに次第に chaos の様相を呈している。この二つの結果により $r=24$ と $r=25$ の間に chaos をひきおこす入力の臨界値があり線形

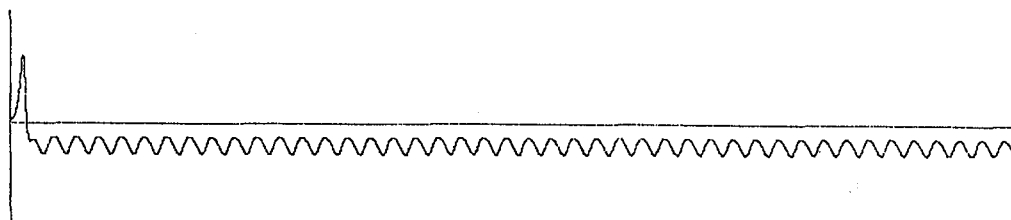


Fig. 7. The numerical result of Y for the input value 24 and the initial values $(0, 1, 0)$ from time 0 to 30 with time step 0.001

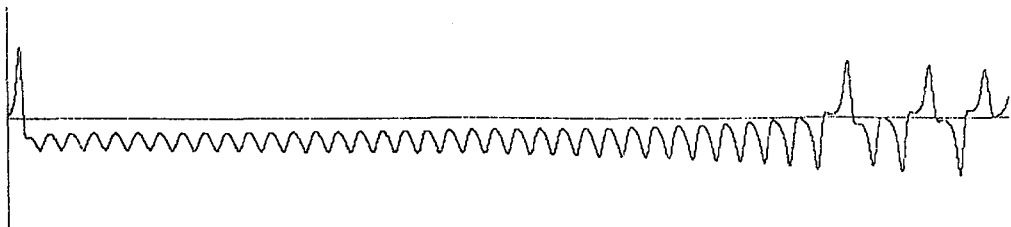


Fig. 8. The numerical result of Y for the input value 25 and the initial values $(0, 1, 0)$ from time 0 to 30 with time step 0.001

理論より求められた $r=24.74$ という値は妥当なものと思われる。

3. chaos の初期値に対する感度

つぎに同じ入力 $r=28$ に対して初期値を $(0, 0.000001, 0)$ としたときの結果が図 9 である。これで見ると初期値が全く対流のおこらない定常点 $(0, 0, 0)$ からほんのわずかにずれただけで chaos が生じることがわかる。

つぎに入力 $r=28$ に対する定常点 $(6\sqrt{2}, 6\sqrt{2}, 27)$ に対する様子を示したのが図 10 である。これは全くの定常状態を表わしている。これに対しわずかに初期値をずらして $(9, 9, 27)$ としたのが図 11 である。これで見ると初期値が定常点からわずかにずれただけで chaos となることがわかる。もう一つの定常点 $(-6\sqrt{2}, -6\sqrt{2}, 27)$ に対しても同様の結果が得られた。

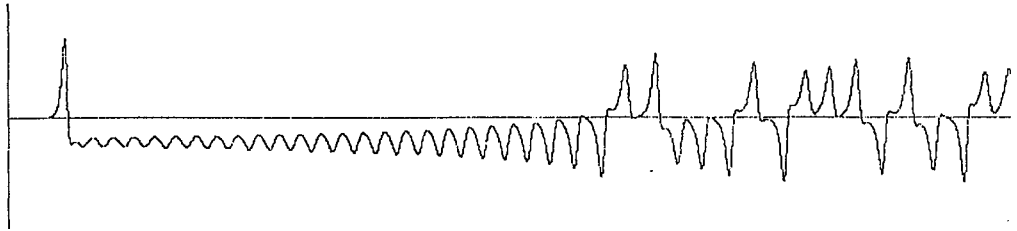


Fig. 9. The numerical result of Y for the initial values $(0, 0.000001, 0)$ and the input value 28 from time 0 to 30 with time step 0.001

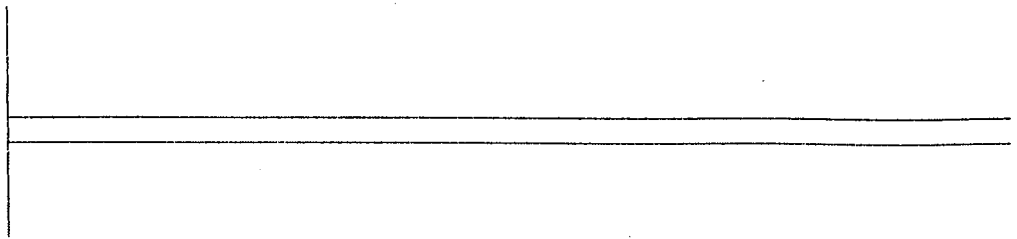


Fig. 10. The numerical result of Y for the initial values $(6\sqrt{2}, 6\sqrt{2}, 27)$ and the input value 28 from time 0 to 30 with time step 0.001

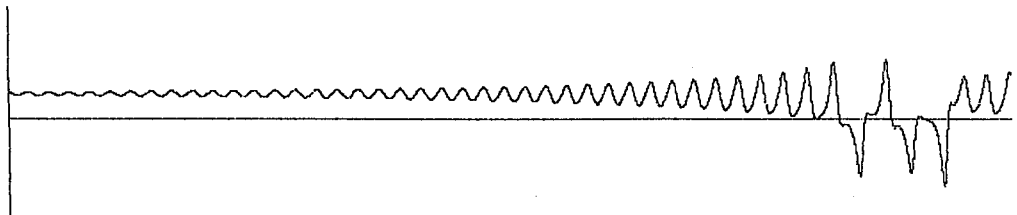


Fig. 11. The numerical result of Y for the initial values $(9, 9, 27)$ and the input value 28 from time 0 to 30 with time step 0.001

V. 考察及びまとめ

以上の結果より我々の用いた離散時間表現が Lorenz model のような chaos 現象の simulation にも有効であることがわかった。入力 of 臨界値付近のわずかな差や定常点付近の初期値のわずかな差によって chaos となることが確認された。又、非周期的振舞を示す chaos も長い時間スケールでみるとその軌道がひとつの order (秩序) をもった strange attractor を描く事が確認でき chaos (混沌) 現象は一見非周期的擬似ランダムなふるまいをするにもかかわらずその本質は非線形系特有のリミットサイクルを複雑にしたものを思わせる軌道を描くということにあるといえる。

シミュレーションが、用いる算法、時間のきざみ幅、計算機の精度に大きく左右されることが認められ計算機シミュレーションの難しさが感じられた。従って、我々の離散化表現より導かれる近似モデルを非線形デジタル制御システムの表現として用いる場合には、これらの点を十分考慮する必要がある。またここで用いた時間のきざみ幅が Real Time 制御において実用的に意味のある時間間隔に対応するかどうかは対象となる系に応じた考察が必要である。

我々の本来の目的は非線形システムのデジタル制御系の設計であるので、その場合必要となる時変的な入力に対する応答特性についても今後研究してゆくつもりである。

尚、シミュレーションにあたっては IBM 5550 を倍精度演算で用いた。

謝辞 計算を行うにあたり、北大工学部大学院生河部光宏君に貴重な助言をいただきました。ここに記して感謝致します。

文 献

- Kalman, R. E., 1956. Nonlinear aspects of sampled-data control systems. *Proc. Symposium on Nonlinear Circuit Analysis*, VI, April, Polytechnic Institute of Brooklyn, Interscience, 273-313.
- Lanford, O., 1977. Computer pictures of the Lorenz attractor. *Turbulence Seminar Berkley 1976/1977*. A. Dold & B. Eckmann eds., *Lecture Notes in Mathematics*, 615, Springer, 113-116.
- Lorenz, E. N., 1963. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20, 130-141.
- Saltzman, B., 1962. Finite amplitude free convection as an initial value problem-I. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 19, 329-341.
- Schuster, H. G., 1984. *Deterministic Chaos-An Introduction*, Physik-Verlag.
- 島 公脩・河合孝俊, 1986・非線形制御系の離散時間表現. 未発表