



Title	最大エントロピーとなる複雑な地震活動
Author(s)	小山, 順二; KOYAMA, Junji; 本谷, 義信 他
Citation	北海道大学地球物理学研究報告, 60, 77-95
Issue Date	1997-03-31
DOI	https://doi.org/10.14943/gbhu.60.77
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/14250
Type	departmental bulletin paper
File Information	60_p77-95.pdf



最大エントロピーとなる複雑な地震活動

小山 順二

北海道大学大学院理学研究科地球惑星科学専攻

本谷 義信

北海道大学理学部地震予知観測地域センター

原 啓明

東北大学大学院情報科学研究科

(1997年1月16日受理)

Complex Activity of Earthquakes Characterized by the Maximum Entropy

Junji KOYAMA

Division of Earth and Planetary Sciences, Graduate School of Science, Hokkaido University

Yoshinobu MOTOYA

Research Center for Earthquake Prediction, Faculty of Science, Hokkaido University

Hiroaki HARA

Graduate School of Information Sciences, Tohoku University

(Received January 16, 1997)

The temporal and spatical activity of natural earthquakes is complex. The difference between the earthquake activity and the complex systems in general lies in the large size-effect on the component natural earthquakes, which composes the complex activity of earthquakes. Continual fracture of innumerable small-scale fault heterogeneities generates an earthquake faulting and many of earthquake faultings with variety of sizes form an earthquake activity. Particularly the earthquake swarm activity and the aftershock activity are characterized by substantial number of events and are difficult to be described by the theory of simple stochastic processes. We will investigate the fundamental property of this complex activity of earthquakes and derive a mathematical theory to represent the dynamics of the activity as a complex system. The discussion is further extended to understand the fundamental condition of actual earthquake activity determined preferentially by Nature.

I. はじめに

複雑な自然現象には、確率論的な複雑さと決定論的な複雑さが知られている。確率論的な複雑さには、ブラウン運動のような確率過程や自己相似性などによって生じる複雑な現象や図形がある (Koyama and Feng, 1995)。決定論的な複雑さには、基本方程式の非線型性から生じるカオスやスケール変換の繰り返しから作り出される高木-Weierstrass 関数などのフラクタル的な複雑な振る舞いがある (Feder, 1988; Hara *et al.*, 1994)。

近年我々は今まで知られていた複雑さのほかに、数多くの確率過程がスケール変換され、それらが重なりあって発生している複雑系を確率スケール変換の考えで定式化している (Koyama and Hara, 1993)。また、確率スケール変換から生じる複雑系がさらに重なりあい複合系を作る場合を非線形のスケール変換で定式化している (Hara *et al.*, 1996)。我々が考えている複雑系や複合系では、時間のべき乗に反比例するような Slow dynamics の性質を示すことが基本方程式から解析的に導かれる。

巨大浅発地震や大きな深発地震の発生時間間隔を調べると、地震は互いに独立でランダムに発生していることがわかる。Poisson 過程や Markov 過程で説明されるこのような性質は確率論的な複雑さに分類される地震活動の性質である。地震のサイズ分布が Gutenberg Richter の経験式 (G R 式) で近似されるのも確率論的な自己相似性によるものであることが知られている (高安, 1987; Turcotte, 1992)。火山性地震が地球潮汐の周期性に引き込まれたり、バースト的に発生したりする現象の中にはカオス現象として説明されるものもある (Ouchi, 1993)。

大きな地震に引きつづき発生する余震活動では大森-宇津の経験式で特徴づけられるように、余震の発生数は時間のべき乗に反比例して減衰する (Utsu *et al.*, 1995)。また、汎世界的な地震活動では、活動の自己相関関数が時間のべき乗に反比例するような長期記憶の性質を示す (Ogata and Abe, 1991)。これらは地震活動が Slow dynamics と呼ばれる複雑系の性質を示している証拠である。従来、これらの性質は、G R 式の b 値や大森-宇津式の p 値など経験的なパラメータのみ表わされきた。

実際、群発地震、前震、余震、火山性地震などいろいろな地震活動についてこれら経験的なパラメータは決められている。このようなパラメータが地震活動の複雑な活動を表わしているのであるが、どのような状態の地震活動でも実現され発生しているわけではない。個々の地震や地震群の大きさにあまり依存せず、経験的なパラメータは選択的に特定の値を取ることが知られている。たとえば、大森-宇津式の p 値は 1 前後の値を取ることが多く、局地的な群発地震、余震活動、巨大地震の G R 式などでは、 b 値が地震群の大きさにあまり関係せずに、それぞれ 1 程度である。では自然がもつこの選択性はどのようにして決まっているのだろうか。ここでは地震活動の普遍的な性質を、確率スケール変換と非線形スケール変換の考え方を用いて、複雑系の現象として一般的に考察することにしよう。

II. 地震活動の複雑さ

地震は地殻やマントル内での動的な断層破壊によって発生する。断層破壊の進行はぎくしゃくしたもので、小規模な断層面不均質領域（断層パッチ）が断続的にランダムに破壊する複雑な破壊過程をたどる。断層パッチは局所的な応力集中に依存し、その不均一さは、孤立した断層破壊、本震-余震型の地震群や群発地震など地震活動のいろいろ異なった性質と密接に関係している (Cheng and Knopoff, 1987; Koyama, 1996)。また断層面上にはいろいろな大きさの断層パッチが無数に存在し、それらが強震動などの短周期地震波の発生源になっていると考えられている (Koyama, 1994; Ruff, 1992)。

このような断層面の不均質領域（断層パッチ）はまた、余震発生の源になっていると考えられている (Yamashita and Knopoff, 1992)。したがって、大きな地震の余震活動はその断層破壊により2次的に生じる不均質領域の応力集中が緩和する現象であると考えられる。この応力緩和過程は大森-宇津の経験式として

$$n(t) \propto t^{-p} \quad (1)$$

のように、余震の発生数 $n(t)$ が時間 t のべき乗に反比例する式で表わされる。べき係数 p は世界中の多くの地震活動で調べられ、おおよそ 0.7 から 1.4 の範囲の値を取る (Utsu, 1969; Wang, 1994)。

Fig. 1 に 1988 年と 1989 年伊豆半島での群発地震の発生数の変化を示す。これらの場合、経験的べき係数 p は 1.6 と 1.7 と大きな値を示し、従来の粘弾性 (Burridge and Knopoff, 1967)、応力腐蝕 (Das and Scholz, 1981; Yamashita and Knopoff, 1992)、クリープ (Gu *et al.*, 1979) などのモデルから期待される理論的な p 値では説明が難しい。

一般的に群発地震活動では、徐々に活動が活発化し、その後時と共に減衰するのが普通である。しかし、ある一時期だけの活動を見ると、地震数が指数関数的に時間とともに減少したことが知られている (茂木, 1991)。佃 (1993) によれば、伊豆半島東方沖の群発地震でもこのような指数関数的な地震活動の減衰が見出されている。理論的には、活動の指数関数的な減衰はその活動が Poisson 過程にしたがうランダムな現象であることを示している。しかし、べき乗であったり指数関数的であったりする地震活動両者の関係やその消長の本質的な物理機構は解明されていない。

Poisson 過程に従うランダム現象の場合、引きつづく 2 つのイベントの時間間隔の確率密度分布は、時間間隔を τ 、平均発生率を λ とすると、 $P(\tau) = \lambda \exp(-\lambda|\tau|)$ で表わされる。Fig. 2 と Fig. 3 にそれぞれ巨大浅発地震と大きな深発地震の発生時間間隔の観測値を示す。古くから知られているように、これら観測値は上に述べた Poisson 過程の確率密度分布で説明される。したがって、巨大地震の発生はランダムであることがわかる。これに反し、汎世界的な地震活動の自己相関関数は指数関数的ではなく、 $|\tau|^{2H-2}$ ($0 < H \leq 1$) のようなべき関数で近似される (Ogata and Abe, 1991)。後に詳しく示すが、このような地震活動の時系列としての振る舞いもやはり複雑系として

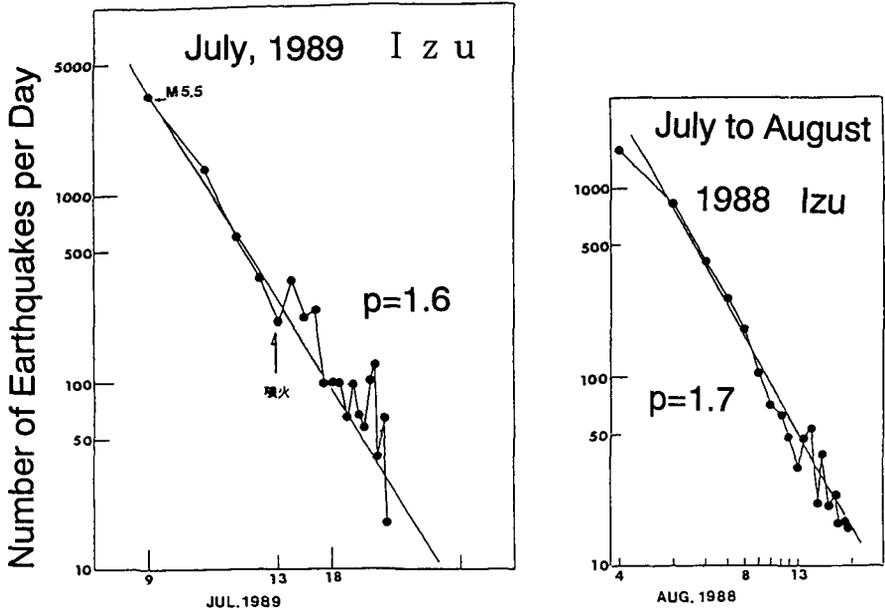


Fig. 1. Time-decay of Izu earthquake swarm, Japan in July of 1989 and in July to August of 1988 (Tokyo University, 1989). Hyperbolic decay rate p of earthquake number is about 1.6 on the left and 1.7 on the right, respectively.

の性質を示している。

III. 地震活動の確率スケール変換

Poisson 過程や Markov 過程の簡単な理論を応用して、大きな地震や数多く発生する余震の統計的な性質が研究されて来た(安芸, 1956; Wu, 1990). このような研究では、大きさもエネルギーもない点とか単なる数として、要素(地震)を統計的に考えてきた。つまり地震発生の時系列を点過程として取扱ってきた。そのような立場は最近の研究(Ogata and Abe, 1991)においても同様である。しかし、それぞれの地震の断層破壊は有限な大きさを持ち、その大きさ分布は統計的に一様ではない。大きな地震と小さな地震のエネルギーには比較にならないほどの違いが存在する。このような地震活動のランダム性やべき関数で表されるサイズ分布などは地震現象の本質的な性質である。この研究では地震活動のランダム性とサイズ分布を物理的に考えることで、複雑な地震現象の確率過程のモデルを定量的に考える。

いま時刻 t から $t+dt$ の間に発生する余震の総数を $n(t)dt$ とすると、その中にはマグニチュードが異なるいろいろな大きさの余震が含まれている；

$$n(t) = \sum_{i=0}^M n_i(t) \quad (2)$$

ここで $n_i(t)$ は i 番目のマグニチュードをもつ余震の発生数である。 $i=0$ は最小マグニチュード、

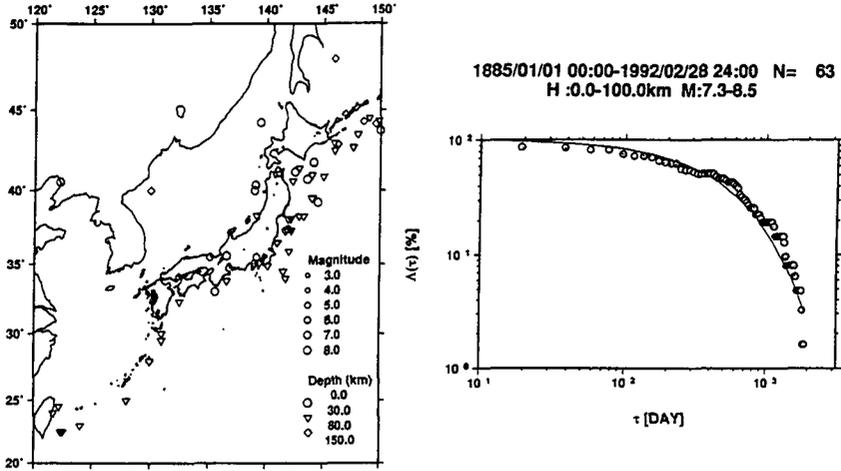


Fig. 2. Cumulative number of time-intervals of successive earthquakes in and near Japan. Large and great shallow earthquakes from 1885 to 1992 (earthquake magnitudes larger than or equal to 7.3) are analyzed. Epicenters are plotted by different symbols representing focal depths.

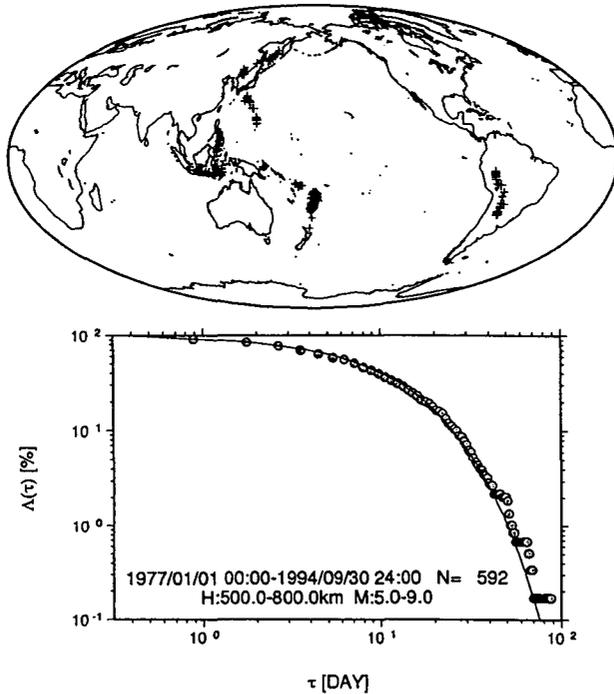


Fig. 3. Cumulative number of time-intervals of successive deep-focus earthquakes worldwide. Earthquakes from 1977 to 1994 are tabulated by the U. S. Geological Survey. Earthquakes are selected for the analysis, whose magnitudes are larger than 5.5 and focal depths more than 500 km.

$i=M$ は最大マグニチュードを示すものとする。もちろん、 $n_i(t)$ と $n_j(t)$ はサイズ別余震群のランダムな発生を記述する関数だから厳密には確率関数であり、 $i \neq j$ なら、互いに独立である。各余震群の初期条件として、 $t=0$ で N_i^0 個の破壊可能領域があるものとする。それらが時間がたつとともに破壊して、破壊可能領域の数は時刻 t で $N_i(t)$ 個に減少する。これを形式的に微分方程式で表わせば、

$$n_i(t)dt = -dN_i(t) = \mu_i(t)N_i(t)dt \quad (3)$$

ここで $\mu_i(t)dt$ は1個の破壊可能領域が破壊する確率である。この確率は、一般的には、マグニチュードや時間に依存するだろう。厳密な議論をぬきにして、 $\mu_i(t)$ の関数形を仮定し、(3)式を考えることもできる。しかし、ここではそのような先見的な態度は取らずに、一般性を失うことなく簡単のために定数 μ_0 と仮定する。

確率関数 $N_i(t)$ や $n_i(t)$ がもつ確率的なサイズ効果を数少ない巨視的なパラメータで表わすことはできない。たとえ同じマグニチュードをもつ余震群が(3)式で表わされる同じ時間発展の方程式にしたがうとしても、異なるマグニチュードの余震群との関係を明らかにしておかなければ余震活動全体の議論はできない。Koyama and Hara(1993)は、確率関数や確率微分方程式にスケール関係を導入する確率スケール変換の考えを提唱した。ここでは破壊可能領域の数の時間変化に：

$$f_d: \frac{\alpha_d}{\beta_d} N_i(\beta_d t) \rightarrow N_{i+1}(t) \quad (4)$$

となる確率スケール変換を考える。ここで α_d と β_d はスケーリング係数とよばれる正の定数である。ともに1以下である。このスケール変換は関数形の自己相似性を規定しているのではなく、確率関数 $N_i(t)$ が持つ統計的性質のスケーリング関係を規定している。したがって、フラクタル幾何学などでしばしば現れるある関数 $f(x)$ に関するスケーリング関係： $f(ax) = a^H f(x)$ (Feder, 1988 ; Koyama and Feng, 1995) などとは違い、(4)のスケール変換は確率的である。

(2)と(3)の解は(4)の確率スケール変換をつかえばただちに求められる：

$$n(t) = -\frac{d}{dt} \left[\sum_{i=0}^M N_0^0 \left(\frac{\alpha_d}{\beta_d} \right)^i \exp(-\mu_0 \beta_d^i t) \right] \quad (t \geq 0) \quad (5)$$

これが余震数の時間減衰をあらわす。 $0 < \mu_0 t \ll 1$ なら、(5)は初期条件に強く依存する。また、 $M \gg 1$ で $t \gg 1/\mu_0$ なら、(5)の漸近表現が最急降下法をもちいて評価することができる (Koyama and Hara, 1992)：

$$n(t) \simeq A_d (\mu_0 t)^{-\epsilon_d}, \quad (6)$$

$$A_d = \mu_0 N_0^0 \sqrt{\frac{\pi}{2 \ln(\alpha_d/\beta_d) \ln \beta_d}} (\xi_d - 1) \exp([\xi_d - 1][\ln(\xi_d - 1) - 1]) \quad (7)$$

ただし、 ξ_a はスケーリング係数から決まるフラクタル次元

$$\xi_a = \frac{\ln \alpha_a}{\ln \beta_a} \quad (8)$$

である。

(6)の漸近形は、係数を別に考えれば、 α_a と β_a がともに1より大きい場合でも成り立つ。(5)の解は地震活動が指数関数的に減衰することを示している。また、(6)は時間のべき乗に反比例して減衰することを示している。したがって、ここに導いた複雑系としての地震活動は実際に観測される地震活動の性質を統一的に説明するものである。大森一字津の経験式と(6)式を比較することで、経験的なべき係数 p は確率スケール変換のフラクタル次元で

$$p = \xi_a \quad (9)$$

と表わされ、経験的にのみ知られていた p 値は地震活動の複雑さから決まる物理量であることが示される。

IV. ランダムな地震活動

1. 地震活動の長期記憶

Poisson 過程にしたがい発生するランダム事象の時間間隔の分布は

$$P_0(\tau) = \lambda_0 \exp(-\lambda_0 \tau) \quad (\tau \geq 0) \quad (10)$$

で表わされる。ここで λ_0 は単位時間あたりに発生する平均事象数である。Fig. 2やFig. 3では引き続き発生する巨大浅発地震や大きな深発地震の時間間隔の分布がPoisson分布で説明されることを示した。これは大地震の発生が時間や発生総数に依存しないランダムな現象であることを示している。Fig. 4には日本付近で発生した地震の時間間隔の分布を気象庁データを用いて調べた。その際、長期間のデータを扱うからできるだけ均一なデータセットとなるように、マグニチュードを5以上とし、震源の深さが60 km以下の浅発地震だけ解析に用いた。図を見てわかるように、特定の狭いマグニチュード帯の地震活動は(10)式のPoisson分布で説明される。この性質はマグニチュードが5程度の小さな地震の活動から、マグニチュードが8クラスの巨大地震の活動でも同様に見出される。Fig. 2やFig. 3で調べた大地震のマグニチュード帯があまり広がらないと考えれば、ここでの結果と調和的である。つまり、日本付近で発生するマグニチュードが5程度の小さな地震活動でも、8クラスの巨大地震の活動でも、ともにPoisson過程にしたがうようなランダムな活動であることを示している。

しかし、Fig. 4に示した日本付近のすべての地震活動から求めた時間間隔の分布はPoisson分布では説明できない。時間間隔の小さな範囲でも大きな範囲でもPoisson分布の傾きとははっきり異なっている。図中に引いた直線はべき分布を仮定したもので、単純なべき分布で説明することも難しいようだ。

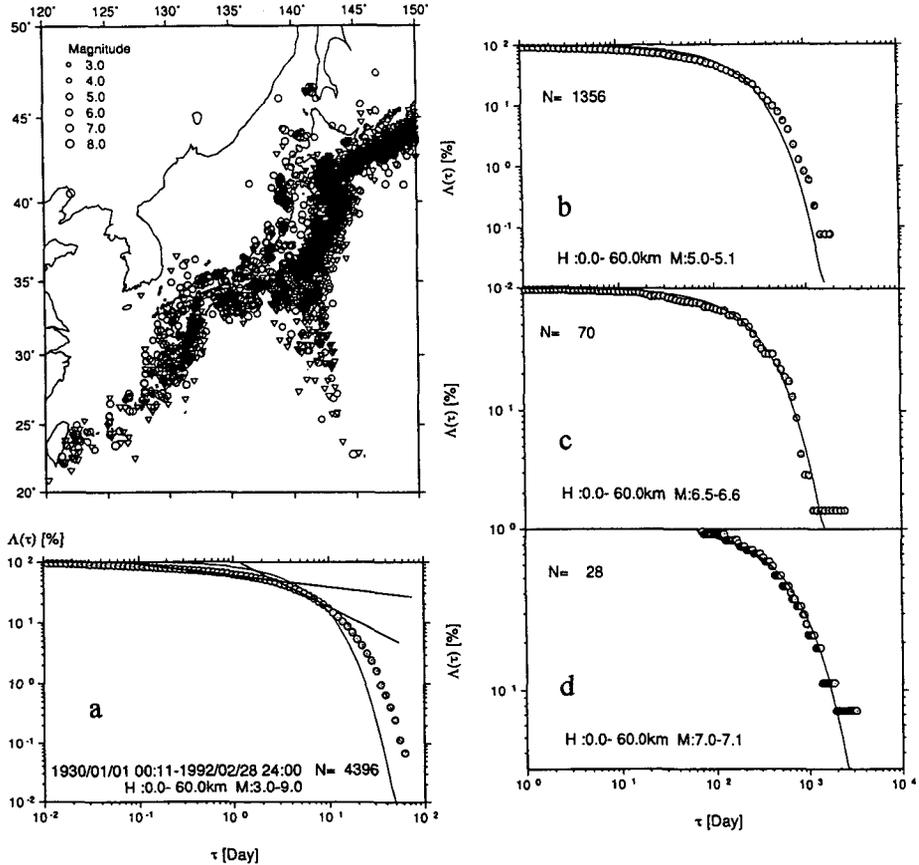


Fig. 4. Cumulative number of time intervals of successive shallow earthquakes in Japan and its vicinity. Number of earthquakes N is normalized to represent the probability distribution in %. The earthquakes are from the Japan Meteorological Agency catalog for the period from January 1st, 1930 to February 28th, 1992 and have focal depths less than or equal to 60 km. (a) All earthquakes in the analysis. The curve in the figure is the Poisson probability distribution calculated from the mean number of earthquakes. It does not fit the observed time-interval distribution. Two straight lines are for a power-law dependence between time interval and cumulative number in days. (b) Similar plot for earthquakes in the magnitude range from 5.0 to 5.1. (c) Earthquakes in the magnitude range from 6.5 to 6.6. (d) Earthquakes in the magnitude range from 7.0 to 7.1.

伊豆で起こった群発地震活動も単純な Poisson 分布では説明できない。Fig. 5 は 1989 年 7 月から 12 月までに発生した約 2000 個の群発地震から求めた時間間隔の分布である。Poisson 分布の指数関数よりは、明らかに、図中に示したべき分布が観測を説明している。経験的に得られるべき係数は時間差が短い範囲で約 0.5, 長い範囲では 1.0 より少し小さい。

近年 Ogata and Abe (1991) により汎地球的な地震活動の自己相関関数が調べられ、地震活動には時間 t のべき関数 $|t|^{2H-2}$ で表わされる長期記憶の性質があることが明らかにされた。パラメー

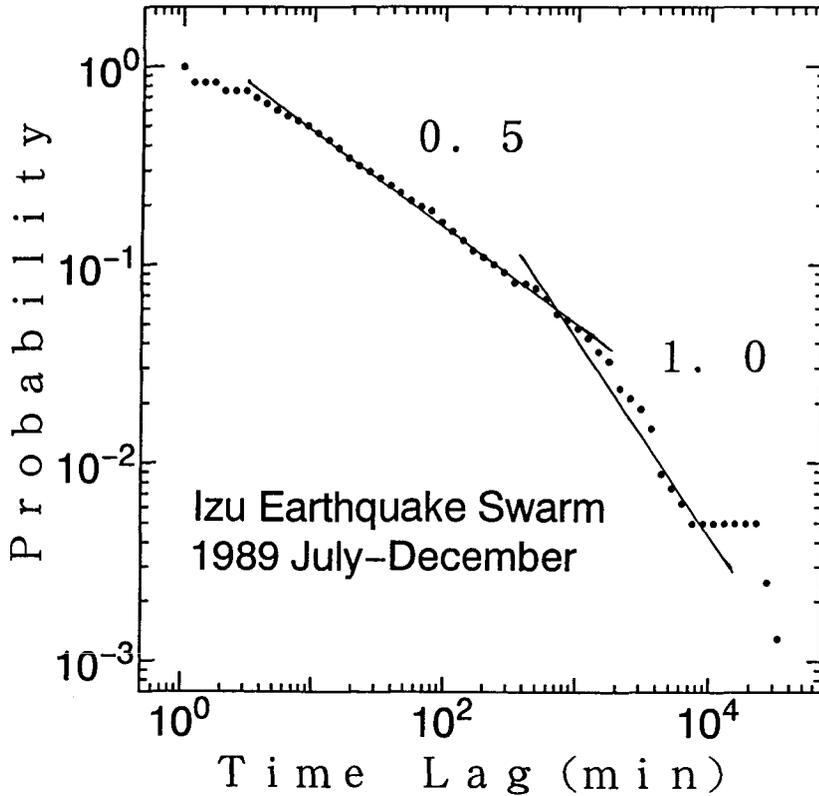


Fig. 5. Cumulative number of time-intervals of successive earthquakes in Izu peninsula, Japan for the period from July to December, 1989. Two straight lines indicate the power-law of cumulative number and time-interval in minutes.

タの H は理論的には0から1までの定数であるが、彼らの結果は約0.6である。彼らは日本付近で発生した地震の自己相関関数も計算している。その結果は世界中のデータから導いたべき関数形とほとんど同じであった。地震の大きさや地震数が全然違うにもかかわらず、二つの関数形がほぼ一致することは重要である。また、自己相関関数と時間間隔の分布関数は等価であることが示されるので (Koyama, 1994), Ogata and Abe (1991) の結果は Fig. 5 に示した結果と調和的である。

2. ランダムな地震活動のモデル

前に述べた確率スケール変換の考えから、(10)を最小マグニチュードを持つ地震群の活動が示す確率密度と考え、それより少し大きいマグニチュードを持つ地震群の活動は

$$f_s: \frac{\alpha_s}{\beta_s} P_i(\beta_s \tau) = P_{i+1}(\tau) \quad (i=0, 1, 2, \dots, M) \quad (11)$$

のスケール変換を満たす相対的な密度関数をもつものとする。 α_s と β_s はスケーリングパラメータ

で、正の値をとる。(11)のスケーリングも確率密度関数をスケール変換しているのだから、確率的である。 τ から $\tau+d\tau$ の時間間隔では、 i 番目のマグニチュードをもつ地震群は $P_i(\tau)d\tau$ の発生確率である。これは確率密度 P_0 に対して相対的に決まっている量で、 $i=0$ の地震群の総数を考えれば、相対的な場合の数と考えてもよい。したがって、十分数多くの地震が発生しているとすれば、何番目のマグニチュードの地震が発生するかは問題ではなく、いろいろな大きさの地震群全体としてどのような場合の数が期待されるかで、時間間隔の分布は決まる：

$$P_s(\tau) = \sum_{i=0}^M P_i(\tau) \quad (12)$$

ここで $P_i(\tau)$ は (10), (11) から

$$P_i(\tau) = \lambda_0 \left(\frac{\alpha_s}{\beta_s} \right)^i \exp(-\lambda_0 \beta_s^i \tau) \quad (\tau \geq 0) \quad (13)$$

いまスケーリングする毎に大きなマグニチュードの地震群を考えているとすれば、 $P_i(\tau)$ を τ で0から ∞ まで積分した量は

$$\frac{\alpha_s}{\beta_s^2} \leq 1 \quad (14)$$

となることが期待される。上の量は先のスケーリング係数 α_d , β_d にも関係し、GR式の b 値を用いて、

$$\frac{\alpha_s}{\beta_s^2} = \frac{\alpha_d}{\beta_d} = 10^{-b\Delta M} \quad (15)$$

と表わされる。ただし、 ΔM はスケーリングするときのマグニチュードの幅である。この式から経験量の b 値の物理的な意味が、いろいろな地震群発生の確率の複雑さとして理解される。

(12) 式の漸近表現も (6) と同様に計算され、

$$P_s(\tau) \approx A_s |\lambda_0 \tau|^{-\xi_s+1}, \quad (16)$$

$$A_s = \lambda_0 \sqrt{\frac{\pi}{2 \ln(\alpha_s/\beta_s) \ln \beta_s}} \exp([\xi_s - 1][\ln(\xi_s - 1) - 1]) \quad (17)$$

ここで ξ_s はスケーリングパラメータ α_s と β_s から決まる

$$\xi_s = \frac{\ln \alpha_s}{\ln \beta_s} \quad (18)$$

である。これをスケーリング次元とよぶことにし、(8)のフラクタル次元と区別する。

(14)の不等式からスケーリング次元は $\xi_s \leq 2$ である。漸近表現の(16)は $\xi_s > 1$ でのみ成り立つのであるが、 $0 < \xi_s < 1$ の場合でも(16)式のようなべき分布になる(Koyama and Hara, 1992)。結局、それぞれのマグニチュード別地震群がPoisson過程で特徴づけられるものであっても、活動全体の時間間隔の分布はべき分布で表わされ、Slow dynamicsの性質を示す。したがって、Fig. 5などで観測量から経験的に求めたべき係数 d は(18)で定義される地震活動の複雑さを示

すスケーリング次元 ξ_s で

$$d = 2 - \xi_s \tag{19}$$

と表わされる。ここでの経験的べき係数とスケーリング次元との関係は一般的な議論から導かれた結果であるから、この理論は複雑な地震活動ばかりではなく、長期記憶を示す複雑系の現象に広く応用できる。

3. 対数正規分布と確率スケール変換

前震活動の性質を詳しく知ることは後に発生する本震を予測するためにも大変重要である。1975年中国海城地震では、300をこえる前震が発生し、地震予知が被害を最小限にいとめたことで知られる。このように数多くの前震活動が記録されることはまれである。Fig. 6 (a)に前震

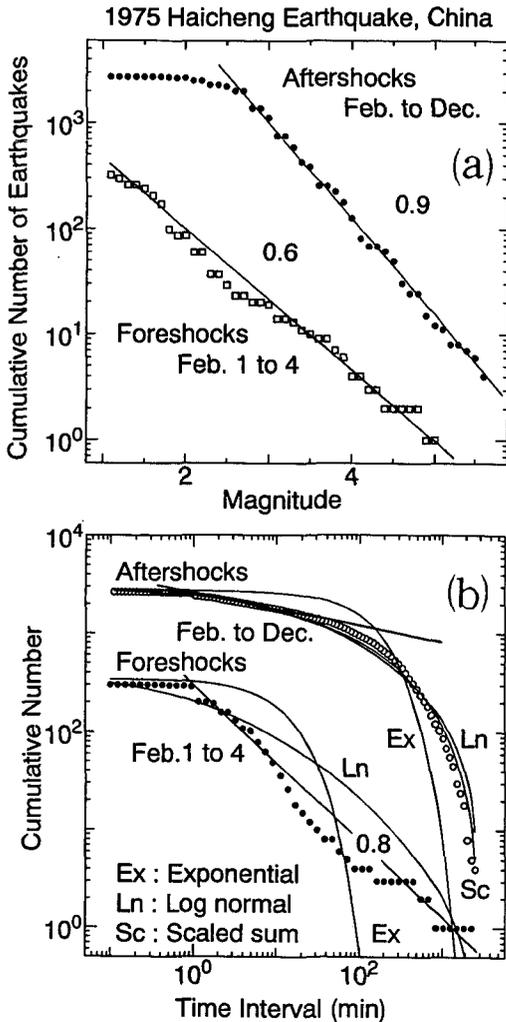


Fig. 6 (a) Cumulative number of foreshocks and aftershocks of the 1975 Haicheng earthquake in China as a function of magnitude. Empirical estimate of b -value is about 0.6 for foreshocks and about 0.9 for aftershocks. The original data was provided by the State Seismological Bureau of China. (b) Cumulative number of foreshocks and aftershocks of the 1975 Haicheng earthquake in China as a function of successive time-interval. Solid line indicates a power-law with coefficient of about 0.8 for foreshocks. Solid curves labeled Ex indicate exponential distribution and those labeled LN indicate log-normal distribution for foreshocks and aftershocks. Scaled sum probability (labeled Sc) by the stochastic scaling is also derived from the aftershock data.

活動と余震活動の b 値を求めた。それぞれ約0.6と0.9程度である(Wu, 1990)。Fig. 6 (b)に時間間隔の分布を示す。前震活動では係数が約0.8のべき分布が、Poisson過程の指数分布よりも観測をよりよく説明している。余震活動では、時間間隔が小さな範囲でも大きな範囲でも指数分布の傾きに比べて非常に小さく指数分布もべき分布もともに観測結果とは一致しない。

さらに、群発地震活動の性質を最近の北海道松前沖の群発地震活動を例にとり調べてみよう。1995年10月に始まった松前群発地震活動は96年7月始めまでに北海道大学理学部地震予知観測地域センターが震源を決めたものだけでも4500個をこえる。そのうち最大の地震は11月23日に発生したマグニチュードが4.6の地震である。Fig. 7に引き続き発生した地震の時間間隔の分布をしめす。指数関数型の分布やべき分布では観測結果を説明することは出来ないことが見てとれる。

Fig. 6やFig. 7の結果は分布が非対称であることを示している。非対称な確率分布の場合、対数正規分布がしばしば用いられる。対数正規分布は統計的なモーメントが定義され、長期記憶の性質も示すから、思いがけない例えば、年収金額の分布とか人の体重の分布など非常に広い範囲で用いられている。Fig. 6 (b)やFig. 7の結果を見れば、指数分布やべき分布で説明されない時間間隔の分布がLog normalと印された正規対数分布で説明され、ここでの結果も昔から知られている統計分布の一例にすぎないかのように見える。

もし、 $\ln x$ が正規分布をなすなら、確率変数 x は

$$g\left(\frac{x}{\bar{x}}\right) \frac{dx}{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{[\ln(x/\bar{x})]^2}{2\sigma^2}\right) \frac{dx/\bar{x}}{x/\bar{x}} \quad (20)$$

の確率密度分布をもつ。分散 σ^2 が大きい場合や変数 x が平均 \bar{x} に近い範囲では、分布関数 $g(x)$ は $1/x$ のべき分布に近い振る舞いをする(Montroll and Shlesinger, 1983)。分散が大きくなればなるほど、 $1/x$ 分布で近似できる範囲はより広くなる。

(16)式を見ればわかるように、確率スケール変換の考えでは $\alpha_s \rightarrow \beta_s^2$ となるとき、 $1/x$ 分布が得られる。したがって、対数正規分布は確率スケール変換のたし合わせ分布関数で近似できることが予想される。(16)式で $\alpha_s = \beta_s^2$ を仮定すれば、 $\beta_s (< 1.0)$ だけが分布を決めるパラメータとなる。実際、分散 σ^2 のいろいろな値の対数正規分布を数値的につくり、確率スケール変換のたし合わせ分布関数のパラメータを最小自乗法的に決めてやると、2つの確率分布は非常によく一致することが確かめられる。もちろん関数形が違うから、まれにしか起こらない確率の小さな範囲では、一致しないのは明らかである。

Fig. 6 (b)やFig. 7に観測されたデータの分布にあうように確率スケール変換のパラメータを決め、その分布関数を示した。対数正規分布と同じ程度に上に凸になる観測値の分布を確率にして2桁以上の範囲で説明していることがわかる。つまり、我々が新しく導入した確率スケール変換の考え方で、観測された時間間隔の非対称な分布を説明することができるのである。後に述べるが、 $\alpha_s = \beta_s^2$ となるべき物理的な意味もある。

対数正規分布は純粹統計学的な分布関数である。確率スケール変換によるたしあわせ分布関数はランダム現象の複雑さを考慮した物理的な分布関数である。したがって、従来対数正規分布で

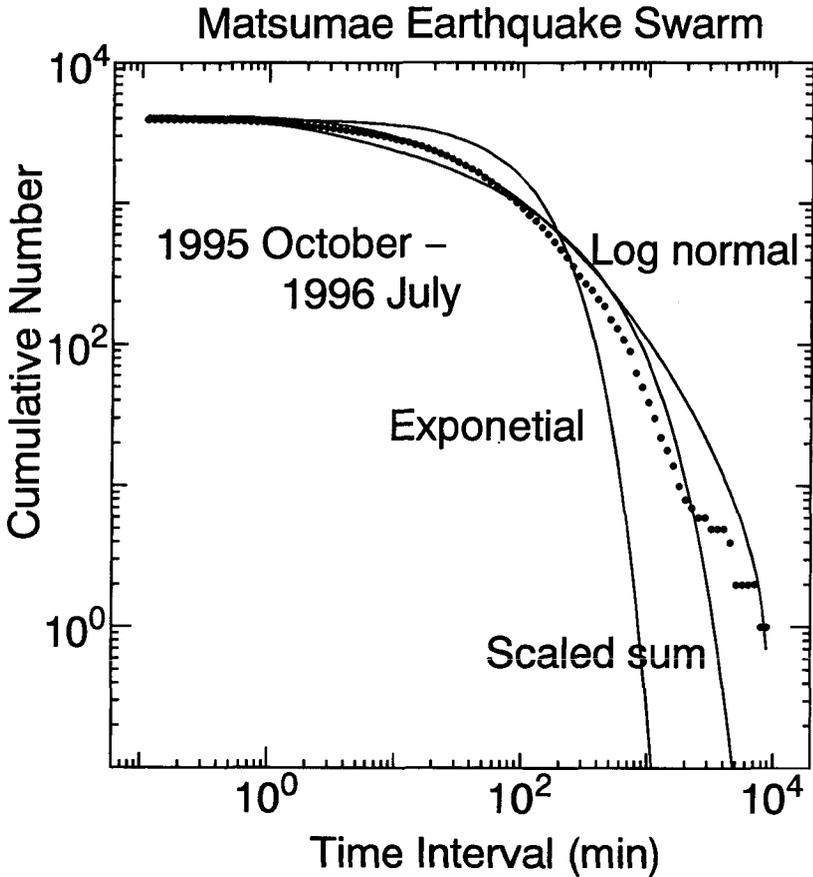


Fig. 7. Cumulative number of successive time-intervals from the 1995 Matsumae earthquake swarm, Hokkaido, Japan. All the events (more than 4500) from October of 1995 to early July of 1996 are analyzed, whose hypocenters have been determined by Research Center for Earthquake Prediction, Hokkaido University. Exponential and log-normal distributions as well as scaled sum distribution by the stochastic scaling are shown in the figure.

考えられてきた数多くのいろいろな現象の本質的な物理的性質を，確率スケール変換の考え方で明らかにすることもできるだろう。

V. 最大エントロピーとなる複雑な地震活動

1. 複雑な地震活動のエントロピー

実際の地震活動からGR式の b ，大森一字津式の p ，べき係数 d ， H が観測量として決められる。また，(15)式はスケーリング係数 α_d ， β_d やスケーリングパラメータ α_s ， β_s と b 値との関係を示している。したがって，それぞれの地震活動について，地震活動の複雑さを規定するスケーリング係数とスケーリングパラメータを決めることができる。地震の大きさや地震活動の数にはあまり関係せずに， b 値は普通 0.8 から 1.0 である。 p はだいたい 1.0 から 2.0 の値を取る。ではこ

のような普遍的にみえる経験的な値が自然のどのような性質によって決まっているのだろうか。

(16) 式に導いた漸近形は時間間隔が $1/\lambda_0 < \tau < 1/(\lambda_0 \beta_s^M)$ の範囲で、複雑系としての地震活動の性質を示す。この特徴的な時間をそれぞれ τ_0, τ_M とし、この時間範囲をスケーリング領域と呼ぶことにする。これは $a_s < \beta_s < 1$ の場合である。 $a_s > \beta_s > 1$ なら、 $\tau_M < \tau < \tau_0$ がスケーリング領域になる。このスケーリング領域に入る確率は、すべての場合の数から

$$P_T = \int_{\tau_0}^{\tau_M} P_s(\tau) d\tau / \int_0^{\infty} P_s(\tau) d\tau \tag{21}$$

と計算される。この地震活動の集まりが持つ確率から、系のエントロピーが定義される：

$$E_T = -P_T \ln P_T \tag{22}$$

スケーリングパラメータ a_s, β_s のいろいろな値について、複雑系としてのエントロピーが計算される。 Fig. 8 にスケーリング次元 ξ_s とスケーリングパラメータ β_s で複雑系のエントロピー (22) を計算し、図示する。 $a_s < \beta_s < 1$ の場合を右に、 $a_s > \beta_s > 1$ の場合を左に示した。どちらでも系全体のエントロピーが最大になる3つの場合が見出される。第1のケースは $\xi_s \rightarrow 1$ であり β_s が1.0に漸近する場合である。第2のケースは ξ_s が1.0から1.4の場合である。第3のケースは $\xi_s \rightarrow 2$ となる場合である。

第1のケースはすぐに理解される：この場合はスケーリングパラメータ a_s も1.0に漸近するから、スケーリングとは関係なく、系全体としては統計的性質の同じ活動が数多く集まっていることになる。それぞれの活動はランダムでしかも同じ確率で発生するわけだから、系全体のエントロピーが最大になるのはあたりまえである。ところが、第3のケースでは、 $a_s/\beta_s^2 \rightarrow 1$ となるから、(14) 式の等号が成り立つ場合にあたるのがわかる。つまりこのケースでは、スケーリングされたマグニチュード別の地震群の発生確率が (場合の数が) 等しくなっている。このケースも系

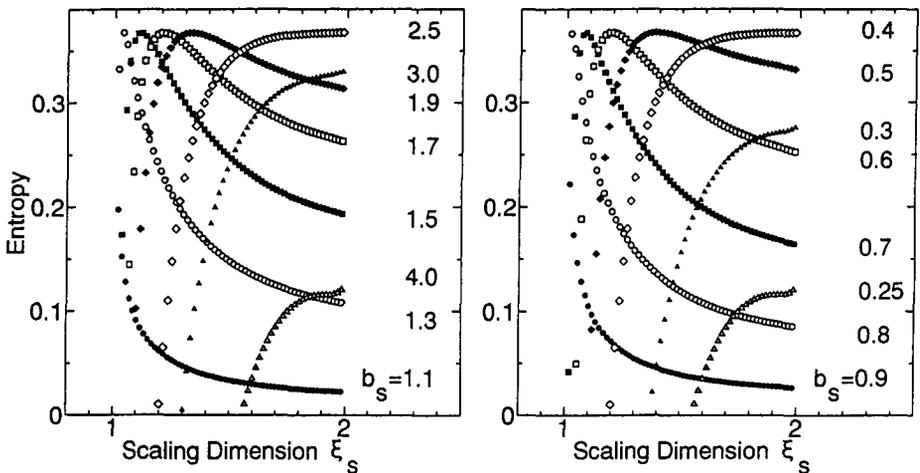


Fig. 8. Entropy of the complex earthquake activity in terms of scaling dimension. The scaling parameter b_s is also shown.

全体のエントロピーが最大になることは第1のケースと同様に容易に理解される。第2のケースでは地震活動の複雑さで系全体のエントロピーが最大になっていると考えられる。

2. 最大エントロピーとなる地震活動

群発地震活動など、局所的な狭い地域に発生する地震のマグニチュード範囲はせまい。このような活動の場合、スケーリングによる重ねあわせはそれ程重要ではなく、第1のケースの活動を示すことが期待される。スケーリング次元は $\xi_s \rightarrow 1$ となり、(19)よりべき係数 d は約1.0となる。

理論的に期待される第2の最大エントロピーのケースでは、例えば、 β_s が1.6の値をとるならスケーリング次元 ξ_s はおおよそ1.2である。先に述べたOgata and Abe (1991)による世界の地震活動やFig. 5の伊豆の群発地震活動の観測例では、べき係数 d が約0.8だから、期待されるスケーリング次元は約1.2である。また、 b 値が0.8と代表的な ΔM が0.2を用いれば、(15)、(18)式から予想されるスケーリングパラメータ α_s は約1.74で、 β_s は1.58である。この場合注意しなければならないのは、 $\beta_s > 1$ だから、より大きな地震の特徴的な時間は小さな地震のそれに比べてより短くなる。これは直感的な理解に反するように思えるが、別な表現で言えば、マグニチュードが大きな余震は充分時間が経てば非常に数少なく、ほとんどが小さなマグニチュードの余震であることを指している。

第3の最大エントロピーとなるケースでは $\xi_s \rightarrow 2$ となるから、(9)、(15)式の関係を用いると、 $p = \xi_s \rightarrow 1$ が導かれる。これは真に濃尾地震などに見られる地震活動のLong-tail behaviorに一致している。また、前節で議論した対数正規分布やそれを近似する確率スケール変換のたしあわせ分布関数で説明される複雑な地震活動もこのケースにあたるのが理解される。

このように安定に活動する複雑な地震活動は理論的に最大エントロピーとなる振る舞いを示していることがわかる。さて、1975年海城地震の前震活動などはどのように理解されるのだろうか。海城地震では約0.6と b 値は小さく、べき係数 d はおおよそ0.8であった。第2の最大エントロピーとなるケースでは $b=0.6$ 、 $d=0.9$ でスケーリング次元が $\xi_s \approx 1.1$ 、 $\beta_s \approx 1.4$ である。定量的に議論できる前震活動は数少ないので、はっきりとは結論できないのではあるが、Fig. 8から前震活動もまた最大エントロピーとなる性質を示すのかもしれない。それも、一般的な群発地震や余震、普通の地震活動とは異なる性質を示すようだ。

VI. 地震活動の非線形スケール則

べき分布で表される伊豆の群発地震、日本付近の地震、汎世界的な地震が示す複雑な地震活動の性質を調べて来た。局地的な地震活動がべき分布を示しても、それらが重なりあった日本の、世界の地震活動がべき分布となる必然性はない。GR式も局地地震活動、より広い地域的な、さらに世界的な地震活動と、いろいろなエネルギーの大きさ数の多さで、べき則が成り立っていることを示している。これは、べき則で特徴づけられる複雑系が数多く集り、それ全体がまた複雑な性質を示す複合系を構成していると考えられる。原・小山(1992)やHara *et al.* (1996)は局

所的 (local) な複雑系が大局的 (global) な複雑系を構成するスケーリング関係を一般的に導いている。ここではその新しい理論を進展させ、複雑な地震活動の普遍的な性質を考える。

複雑な系の自己相関関数が Ogata and Abe (1991) にあるようにべき関数；

$$C_j(\tau) \propto \tau^{-\eta_j} \quad (23)$$

で与えらるとしよう。大局的には、同じべき係数 η_j を持つ系が w_j 個存在するだろう。大局的な活動はこのようないろいろなべき係数で特徴づけられた数多くの局所的な活動の寄せ集めであるのだから、

$$C(\tau) = \sum_{j=0}^M w_j C_j(\tau) \quad (24)$$

と表わせる。このように和で表わせるのは、違う地域での局所的な活動が同じべき係数で特徴づけられていても、それらは互いに独立に発生しているからである。汎世界的な地震活動などでは(24)式が τ^{-q} のようなべき関数で表わされることを示している。

いま、いろいろな局所的な活動を η_j が大きくなる順に、 $0 \leq \eta_1 < \eta_2 < \dots < \eta_M$ 、並べかえることにする。新しい変数 x を $\eta = \eta_M x$ ($0 \leq x \leq 1$) とすれば、(24) 式は形式的に

$$\int_0^1 \tau^{-\eta_M x} w(x) dx \simeq \Phi \tau^{-q} \quad (25)$$

と表わされる。ここで Φ は大局的な活動のレベルを示すパラメータである。重み関数 $w(x)$ は

$$w(x) = \tau^{-q} \eta_M \ln \tau \cdot w(\eta_M x \ln \tau) \quad (26)$$

の関係を満たす。上式は $w(x)$ のスケーリング関係を示すものであり、結局

$$w(x) \propto x^{\kappa(\tau)} \quad (27)$$

となるような関数系で表わされる。

(25) 式の被積分関数は $x = x(\tau) / \eta_M \ln \tau$ ($0 \leq x < 1$) で最大値をとる。この被積分関数は $x > x(\tau) / \eta_M \ln \tau$ では単調減少で、 $x > 1$ では非常に小さい。したがって、(25) 式の積分を 0 から ∞ としても、一般性を失うことはない：

$$\int_0^{\infty} \exp(-\eta_M x \ln \tau) x^{\kappa(\tau)} dx = \tau^{-q} \int_0^{\infty} \exp(-X) w(X) dX \quad (28)$$

ここで

$$X = \eta_M x \ln \tau, \quad (29)$$

$$x(\tau) = \frac{q \ln \tau}{\ln |\eta_M \ln \tau|} - 1 \quad (30)$$

(28) 式右辺の積分は τ について変化が小さい。したがって、 $w(x) \propto x^{\kappa(\tau)}$ は非線形の重み関数では

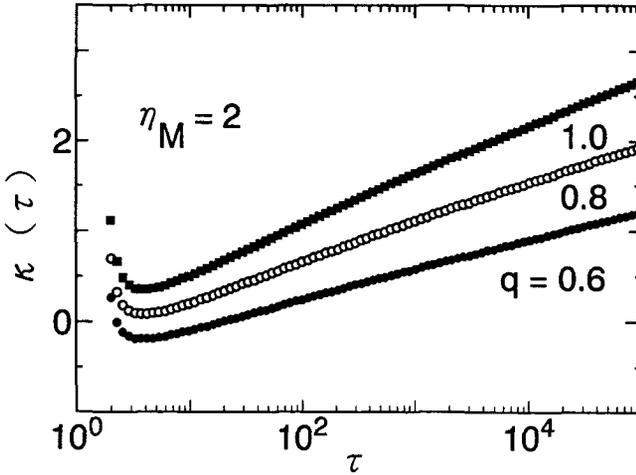


Fig. 9. Power coefficient $x(\tau)$ of the non-linear scaling law in terms of time-lag τ .

あるが、局所的な活動のべき分布と大局的な活動のべき分布を理論的に結び付けている。

非線形の重み関数を特徴づける $x(\tau)$ を Fig. 9 に数値で示す。ここで最大値 η_M は 2 とした。これはもともと $\eta = 2 - 2H$ であり、 H は $0 < H \leq 1$ だからである。べき定数 q は 0.6, 0.8, 1.0 を仮定した。Ogata and Abe (1991) の場合では $q = 0.8$ となる。この q 値で Fig. 9 を見れば、 τ が 100 から 10000 へ変化するとき、 $x(\tau)$ は約 0.7 から 1.5 とかわる。大きなラグの範囲では、例えば $\ln \tau$ が 10 程度の値で変化するようなとき、 $C(\tau)$ を構成する局所的な活動の重みは、 x が 0.8, 0.4, 0.2 のときそれぞれ、 $0.689\tau^{-1.6}$ 、 $0.216\tau^{-0.8}$ 、 $0.068\tau^{-0.4}$ と計算される。ラグの大きな範囲では大きなべきで早く減衰する $\tau^{-1.6}$ の密度はおそい $\tau^{-0.4}$ の密度の 10 倍も多い。ところが、ラグが小さな範囲では、例えば $\ln \tau$ が 5 程度の値で変化するようなとき、活動の重みは、 $0.848\tau^{-1.6}$ 、 $0.5909\tau^{-0.8}$ 、 $0.305\tau^{-0.4}$ であり、その密度差はファクターで 3 より小さい。つまり、ラグが大きければ、自己相関関数の減衰の早い項が支配的で、ラグが小さければ、減衰の遅い項が支配的になっていることを示している。実際の観測例では Fig. 5 に見たようなべき係数の変化としてしばしば目に見える現象である。

VII. 結 論

1つの地震活動をエネルギー別の活動に分解し、それぞれの活動の基本方程式を確率過程で考えた。活動相互間にスケーリング則（確率スケール変換）を考えることで、複雑系としての地震活動の性質を2つのスケーリング係数、2つのスケーリングパラメータで定量的に表現した。確率スケール変換の考え方は一般的で、先見的な確率分布や複雑さを仮定していないため、複雑系としての地震活動のエネルギーやエントロピーを定量的に表現できる。この定式化で始めて、実際の活動がどのような物理的な状況下で発生しているのか議論できた。複雑系として見た地震活

動では、系のエントロピーが最大となる3つのケースが明らかにされた。その第1番目は確率的なサイズ効果あまり効かない群発地震群である。第2番目は世界の地震活動や b 値の小さな前震活動、第3番目は Long tail の振る舞いを示す地震活動や対数正規分布で説明される活動などである。

この研究では複雑な自然現象を理解するために確率スケール変換の考えを新たに導入し、地震活動のスケーリング則がどのようなものであり、自然がそれをどのように選択しているかを議論した。またさらに、複雑な複合系についても非線形のスケール変換で議論した。このように複雑な現象、複雑系としての現象、複合系としての複雑な現象を一般的に、基礎方程式から定式化したことになる。したがって、ここでの議論や定式化は複雑系としての地震活動だけを記述するものではなく、より一般的に複雑な物理系に応用できるものとする。その例として、ここでは時系列としての地震活動だけを議論してきたが、GR式に代表される地震規模の複雑な振る舞いも同様に理解することができる。近年 Pacheco *et al.* (1992) が指摘しているが、GR式の b 値は大きな地震ほどより大きな値をとる。これは真に非線形のスケーリング則から導かれる帰結であると考えている。

しかし、なぜこのようなスケーリングが生じるかについての本質的な物理機構に関してはなんら答えてはいない。物理現象の数多くの複雑系ではスケーリング則が一般的に見いだされている。確率スケール変換も複雑な物理現象を説明するスケーリング則の基本的な考えの1つであることに間違いはない。この本質機構に関しては、非線形のスケール変換の場合も含めて、今後考えていかなければならない問題である。

文 献

- 安芸敬一, 1956. 地震統計の現状. 地震II, 8, 205-228.
- Burridge, R. and L. Knopoff, 1967. Model and theoretical seismicity. *Bull. Seism. Soc. Am.*, **57**, 341-371.
- Cheng, Y. T. and L. Knopoff, 1987. Simulation of earthquake sequences. *Geophys. J. Roy. astr. Soc.*, **91**, 693-709.
- Das, S. and C. H. Scholz, 1981. Theory of time-dependent rupture in the earth. *J. Geophys. Res.*, **86**, 6039-6051.
- Feder, J., 1988. *Fractals*. Plenum Press, New York, 283pp.
- Gu J. C., X. B. Xie and L. Zhao, 1979. On time distribution of large aftershocks of the sequence of a major earthquake and preliminary theoretical explanation (in Chinese). *Acta Geophys. Sinica*, **22**, 32-45.
- 原啓明・小山順二, 1992. 複雑な系の活性化と相関関数. 統計数理, **40**, 217-226.
- Hara, H., T. Obata and J. Koyama, 1994. Information processing of a complex system: Response behaviors specified by the Weierstrass function. *Phys. Rev.*, **E 49**, 5823-5829.
- Hara, H., S. S. Lee, J. Koyama and S. Fujita, 1996. Scaled Langevin equation for complex systems: New linear scaling relation for weight factor. *Chaos, Solitons & Fractals*, **6** in press.
- Koyama, J., 1994. General description of the complex faulting process and some empirical relations in seismology. *J. Phys. Earth*, **42**, 103-148.
- Koyama, J., 1996. *The Complex Faulting Process of Earthquakes*. Kluwer Publishers, Dordrecht, 194pp.
- Koyama, J. and D. Y. Feng, 1995. *Advance in Mathematical Seismology*. Seismological Press, Beijing, 193pp.

- Koyama, J. and H. Hara, 1992. Scaled Langevin equation to describe $1/f^a$ spectrum. *Phys. Rev.*, **A 46**, 1844–1849.
- Koyama, J. and H. Hara, 1993. Fractional Brownian motions described by scaled Langevin equation. *Chaos, Solitons & Fractals*, **3**, 467–480.
- 茂木清夫, 1991, 近年の伊豆半島東部の地殻変動の非可逆的变化, 月刊地球, **13**, 55–62.
- Montroll, E. W. and M. F. Shlesinger, 1983. Maximum entropy formalism, fractals, scaling phenomena, and $1/f$ noise : A tale of tails. *J. Stat. Phys.*, **32**, 209–230.
- Ogata, Y. and K. Abe, 1991. Some statistical features of the long-term variation of the global and regional seismic activity. *Intern. Stat. Rev.*, **59**, 139–161.
- Ouchi, T., 1993. Population dynamics of earthquakes and mathematical modeling. *PAGEOPH*, **140**, 15–28.
- Pacheco, J. F., C. H. Scholz and L. R. Sykes, 1992. Changes in frequency-size relationship from small to large earthquakes. *Nature*, **355**, 71–73.
- Ruff, L. J., 1992. Asperity distribution and large earthquake occurrences in subduction zones. *Tectonophysics*, **211**, 61–84.
- 高安秀樹, 1987, フラクタル科学, 朝倉書店, 東京, 258 pp.
- 佃為成, 1993, 時系列として見た西表島群発地震. 月刊地球, **15**, 218–224.
- Turcotte, D. L., 1992. *Fractals and chaos in geology and geophysics*. Cambridge University Press, Cambridge, 221pp.
- Utsu, T., 1969. Aftershocks and earthquake statistics (I). *J. Fac. Sci., Hokkaido University*, **3**, 129–195.
- Utsu, T., Y. Ogata and R. S. Matsuura, 1995. The centenary of the Omori formula for a decay law of aftershock activity. *J. Phys. Earth*, **43**, 1–33.
- Wang, J. H., 1994. On the correlation of observed Gutenberg-Richter's b value and Omori's p value for aftershocks. *Bull. Seism. Soc. Am.*, **84**, 2008–2011.
- Wu, K. T., 1990. *An Introduction to Earthquake Sequences* (in Chinese). Peking University Press, Beijing, 250pp.
- Yamashita, T. and L. Knopoff, 1987. Models of aftershock occurrence. *Geophys. J. Roy. astr. Soc.*, **91**, 13–26.
- Yamashita, T. and L. Knopoff, 1992. Model for intermediate-term precursory clustering of earthquakes. *J. Geophys. Res.*, **97**, 19873–19879.