



Title	井田火山モデルの数理解析
Author(s)	高橋, 良昌; TAKAHASHI, Yoshimasa; 前田, 亘 他
Citation	北海道大学地球物理学研究報告, 61, 133-140
Issue Date	1998-03-20
DOI	<a href="https://doi.org/10.14943/gbhu.61.133">https://doi.org/10.14943/gbhu.61.133</a>
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/14265">https://hdl.handle.net/2115/14265</a>
Type	departmental bulletin paper
File Information	61_p133-140.pdf



## 井田火山モデルの数理解析

高橋 良昌・前田 亙

北海道大学大学院理学研究科地球惑星科学専攻

(1997年12月6日受理)

### Mathematical Analysis of Ida Volcano Model

Yoshimasa TAKAHASHI and Itaru MAEDA

Division of Earth and Planetary Sciences, Graduate School of Science, Hokkaido University

(Received December 6, 1997)

The volcanic model proposed by Ida succeeded to explain cyclic nature of volcanic activities. The model consists of an elastic chamber replenished from below at a constant rate and a uniform vent which responds to pressure inside as a Newtonian fluid. Discharge of magma from the chamber is described as a Poiseuille flow. The model is expressed by a system of second order nonlinear differential equations, the solution of which is proved analytically to be periodic. We constructed an analytic expression of closed orbits on the phase space of this system, and investigated the period of the system as a function of the viscosity of magma,  $\eta_f$ , viscosity of the country rock,  $\eta_c$ , buoyancy,  $G$ , rigidity of the country rock,  $\mu$ , bulk modulus of the chamber,  $K$ , and magma supply rate,  $I$ . It turned out that the period of this system largely depends on  $\eta_c$ ,  $\mu$ ,  $K$  and  $I$ , but not on  $\eta_f$  and  $G$ . For example, the period of this system is in proportion to the square root of the viscosity of the country rock.

### I. はじめに

噴火や火山性微動は、斜面の周期的な傾斜変化をともなって、規則的な間隔で起こることがある。この傾斜変化は地下のマグマ溜まりの圧力の変化を表していると考えられ、その変化の様子はほとんど正弦波形のようなものからのこぎりの歯形のようなものまでさまざまである。

井田 (1996) はこのような周期的な噴火を説明するため簡単な力学モデルを構成し、1994年の雲仙普賢岳、1984年のKilauea、1989年の伊豆大島の各火山活動に適用できることを示した。また、モデルを表わす力学系の不動点近傍の線形近似解を求め、それが周期解になることを示し、その周期をマグマの粘性係数やマグマ溜まりへの下からのマグマの供給率等の物理パラメーターで表現した。

ここでは、井田モデルを表わす力学系が相空間上で大局的に周期解を持つことを示し、その周期軌道を解析的に求める。そしてその解を用いて、モデル中の物理パラメーターが解の性質、特に周期にどのように影響するかを調べる。

## II. モ デ ル

井田モデルは次のように記述される (Fig. 1).

体積  $V_r$  のマグマ溜まりに単位時間あたり一定の質量  $\rho I$  のマグマが下から供給されると考える。ここで、 $\rho$ 、 $I$  は各々マグマの密度と体積である。そしてマグマ溜まりから火道へと流出するマグマの流量を  $J$  とする。マグマ溜まりの体積の変動を  $v$  とすると、マグマ溜まりについて質量保存を考えて、

$$\rho dv/dt = \rho I - \rho J \quad (1)$$

マグマ溜まりとそれを取り囲む岩盤がそれぞれ弾性体として振る舞うと仮定するとマグマ溜まり内の余剰圧力  $p$  とマグマ溜まりの体積の変動の関係は線形近似の範囲で次のように表わせる。

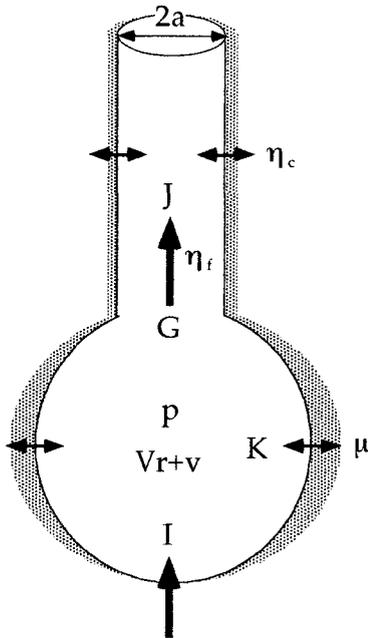
$$p = kv \quad (2)$$

ここで、球状のマグマ溜まりを仮定すれば、(2)式の見かけ上の弾性定数  $k$  は次のように書ける。

$$k = 4\mu K / \{(3K + 4\mu) V_r\} \quad (3)$$

$\mu$ 、 $K$  はそれぞれ、岩盤の剛性率、マグマ溜まり中のマグマの体積弾性率を表す。

火道について、無限の長さを持つ円筒状のパイプと考える。このモデルでは、火道の変化が準静的である様な場合について扱っている。余剰圧力  $p$  によって火道半径  $a$  が変化する。このとき、火道の



vent radius	:	a
viscosity of		
country rock	:	$\eta_c$
flux in the vent	:	J
viscosity of magma	:	$\eta_f$
buoyancy	:	G
pressure variation	:	p
initial volume		
of chamber	:	$V_r$
volume variation		
of chamber	:	v
bulk modulus		
of magma	:	K
magma supply rate	:	I

Fig. 1. A volcanic model (modified Ida(1996)). The chamber filled with magma responds elastically to pressure inside. The country rock surrounding the vent is assumed to be a Newtonian fluid. Magma is constantly supplied from below and flows out through the vent as a Poiseuille flow.

周囲の岩盤が粘性係数  $\eta_c$  の粘性流体として振る舞うものと考え、 $a$  の時間変化は次のように表わせる。

$$da/dt = ap/2\eta_c \quad (4)$$

火道のなかを流れるマグマはニュートン流体、その粘性係数  $\eta_f$  は場所によらず一定と考える。火道中の流れはPoiseuille流であると仮定すると、 $J$  は次のように表わせる。

$$J = (\pi G/8\eta_f)a^4 \quad (5)$$

ここで  $G$  は流れを駆動する力で、一般的にはマグマと周囲の岩盤との密度差による浮力と火道中の圧力勾配からなる。ここではマグマ溜まり中の余剰圧力  $p$  は十分に小さいと考え、 $G$  は浮力のみ定数と近似する。

井田モデルは以上の関係式で系を記述するが、これらのなかで時間依存の変数は、 $J$ 、 $v$ 、 $p$ 、 $a$  の4つで、そのうち  $a$ 、 $v$  を選んで(1)～(5)式をまとめると次のような2次元非線形力学系になる。

$$da/dt = (k/2\eta_c)av \quad (6)$$

$$dv/dt = I - (\pi G/8\eta_f)a^4 \quad (7)$$

(6)、(7)式は  $(a, v)$  相空間上の流れ(相流)を記述している。ただし物理的に意味があるのは  $a \geq 0$  の半平面のみである。この相流の不動点は

$$(a, v) = ({}^4\sqrt{8\eta_f I/\pi G}, 0) \quad (8)$$

である。井田モデルの振る舞いは相流の軌跡として表現できる。井田(1996)は不動点近くの局所的な相流の線形近似解を求め、それが周期解になる、すなわち相流の軌跡が閉軌道を描くことを示した。相空間全体での相流の大局的な構造について、次で議論する。

### III. 系の周期性

相流の大局的な構造を明らかにするため、火道半径  $a$ 、マグマ溜まりの体積変化  $v$ 、時間  $t$  を単位長さ  $a_u$ 、単位体積  $v_u$ 、単位時間  $t_u$  で無次元化する。 $v_u$ 、 $t_u$  を

$$v_u = \frac{a_u^2}{2} \sqrt{\frac{\pi G \eta_c}{k \eta_f}} \quad (9)$$

$$t_u = \frac{4}{a_u^2} \sqrt{\frac{\eta_f \eta_c}{\pi G k}} \quad (10)$$

で与えれば、(6)、(7)式は次のように変換される。

$$da/d\tau = a\beta \quad (11)$$

$$d\beta/d\tau = \chi - \alpha^4 \quad (12)$$

$$\chi = 8I\eta_f/\pi G a_u^4 \quad (13)$$

ただし  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\tau$  は各々  $a$ 、 $v$ 、 $t$  を無次元化した変数、 $\chi$  は無次元化パラメーターで無次元化された単位時間あたりにマグマ溜まりへ供給されるマグマの体積を意味する。火道半径の尺度  $a_u$  は任意にとることができる。このため、変換の尺度が物理量によって一意に決まらない。これは、観測値に計算をあわせても物理量を一意に推定できないことを意味する。この変換では相空間上の流れの大局的な構造は変わらないので、(6)、(7)式で表わされる力学系(系Aとする)の代わりに、(11)～(13)式で表

わされる力学系 (系Bとする) について調べることにする。

Strogatz (1994) によれば, 2次元力学系

$$dx/dt=f(x, y) \quad (14)$$

$$dy/dt=g(x, y) \quad (15)$$

の不動点近くの局所的な線形近似解が周期解で, 系が変数変換  $y=-y, t=-t$  にたいして不変であるとき, 相流の軌跡は大局的に閉軌道を描く。系Bの不動点

$$(\alpha, \beta)=(\sqrt[4]{\chi}, 0) \quad (16)$$

近傍の線形近似解は井田 (1996) が求めたように周期解である。さらに, 系Bは変数変換  $\beta=-\beta, \tau=-\tau$  にたいして不変である。ゆえに系Bの相流の軌道は大局的に閉軌道を描く。

次にこの閉軌道の解析的表現を求める。閉軌道上で, 古典力学のハミルトニアンに相当する, 時間に対して不変な保存関数  $H(\alpha, \beta)$  を考える。  $H$  の関数形として(12)式に見られる閉軌道の  $(\alpha, \beta)$  相空間上での  $\alpha$  軸に対する対称性から,

$$H(\alpha, \beta)=\beta^2+X(\alpha) \quad (17)$$

を仮定する。ここで,  $X$  は  $\alpha$  のみの関数で, 以下のようにその関数形を求めることができる。  $H$  は時間に対して不変であるので,

$$dH/d\tau=0. \quad (18)$$

(18)式から(11), (12)式を用いて  $da/d\tau, d\beta/d\tau$  を消去すると  $X$  は

$$X(\alpha)=-2\chi \log(\alpha)+\frac{\alpha^4}{2}+const. \quad (19)$$

と定まる。ここで,  $const.$  は任意定数であるので0とおくと, 保存関数  $H$  は

$$H=\beta^2-2\chi \log(\alpha)+\frac{\alpha^4}{2} \quad (20)$$

と表わせる。そして閉軌道は次のように表わせる。

$$\beta^2-2\chi \log(\alpha)+\frac{\alpha^4}{2}=C \quad (21)$$

ここで  $C$  は初期条件から決まる定数である。

この閉軌道を用いて, 周期解の解析的表現を求める。(11)式を用いて(21)式から  $\beta$  を消去すると無次元化周期  $T$  は次のように表現できる:

$$T=\int_{\alpha_{min}}^{\alpha_{max}} \frac{2d\alpha}{\alpha\sqrt{2\chi \log(\alpha)-\frac{\alpha^4}{2}+C}} \quad (22)$$

ここで  $\alpha_{min}, \alpha_{max}$  は各々  $\alpha$  の最小値, 最大値である。初期条件として, 火道半径が最小, 及びマグマ溜まりの体積変化が0, 即ち,

$$\alpha=\alpha_{min}, \quad \beta=0 \quad (23)$$

を考えることにすれば, (21)式より  $C$  を  $\alpha_{min}, \chi$  で表わすことができ,  $T$  は次のようになる。

$$T = \int_{a_{min}}^{a_{max}} \frac{2da}{\alpha \sqrt{2\chi \log\left(\frac{\alpha}{a_{min}}\right) - \frac{1}{2}(\alpha^A - a_{min}^A)}} \quad (24)$$

さらに(21)式より,  $\chi$ は $a_{min}$ ,  $a_{max}$ を用いて

$$\chi = (\alpha_{max}^A - \alpha_{min}^A) / 4 \log(\alpha_{max} / \alpha_{min}) \quad (25)$$

と書けるので,  $T$ も $a_{min}$ ,  $a_{max}$ により定まる.  $\delta\alpha = \alpha_{max} - \alpha_{min}$ として,  $T$ と $(a_{min}, \delta\alpha)$ ,  $\chi$ と $(a_{min}, \delta\alpha)$ の関係を図示する (Fig. 2).  $T$ は $a_{min}$ が小さいほど, また,  $\delta\alpha$ が小さいほど大きくなる. それとは逆に,  $\chi$ は $a_{min}$ が大きいほど, また,  $\delta\alpha$ が大きいほど大きくなる.

#### IV. 議 論

物理パラメターの噴火の周期に対する影響について考察する. 次元付周期は $t_u T$ で表わされる. 以後, 単に周期という場合は次元付周期 $t_u T$ を示す. 井田モデルで使用されるパラメターは, マグマの粘性係数 $\eta_f$ , 火道の周囲の地殻の粘性係数 $\eta_c$ , 浮力 $G$ , マグマ溜まりの見かけ弾性定数 $k$ , 単位時間あたりにマグマ溜まりへ供給されるマグマの体積 $I$ の5つで, さらに無次元化のために火道半径の尺度 $a_u$ を使用した. この6個のパラメターは関係式(10), (13)を通して各々時間の尺度 $t_u$ , 無次元化パラメター $\chi$ に影響する. この $\chi$ に影響するパラメターは初期条件(23), 関係式(25)により無次元化火道半径の最大値 $a_{max}$ に影響する. 各パラメターの周期に対する影響を調べるため, 他のパラメターはある基準値に固定して着目するパラメターのみを変化させた時, 井田モデルの周期がどのように変化するか計算する. この計算のための基準となるパラメターの値を, 井田 (1996) が雲仙普賢岳の活動 (1994年10月22日から28日) に適用した値をもとにして, Table 1に与えた. 各パラメターがこの基準値にあるとき, 周期は10.5日である.

パラメターのうち火道の周りの地殻の粘性係数 $\eta_c$ とマグマ溜まりの見かけ弾性定数 $k$ は時間の尺度 $t_u$ にのみ影響し, 関係式(10)より周期に対して各パラメターの平方根が比例, 反比例の関係にあることが容易にわかる. 例えば他のパラメターを基準値に固定した時,  $\eta_c$ を $3.8 \times 10^8 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ から $3.8 \times 10^{12} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ まで増加させると周期は1日から100日へと増加する. また,  $k$ を $3.3 \times 10^0 \text{ Pa/m}^3$ から $3.3 \times 10^4 \text{ Pa/m}^3$ まで増加させると, 周期は100日から1日へと減少する.

単位時間あたりにマグマ溜まりへ供給されるマグマの体積 $I$ は無次元化パラメター $\chi$ にのみ影響し,  $I$ と $\chi$ は比例関係にある. Fig. 2(b)に見られるように無次元化火道半径の初期条件 $a_{min}$ にある値に固定したとき, 無次元化パラメター $\chi$ が増加すれば無次元化火道半径の最大値 $a_{max}$ も増加し, その結果, 無次元化周期 $T$ は減少する. ゆえに $I$ が増加すれば噴火の周期は短くなり,  $I$ が減少すれば周期は長くなる. 他のパラメターを基準値に固定した時,  $I$ を $2.8 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$ から $2.8 \times 10^0 \text{ m}^3/\text{s}$ まで増加させると, 周期は100日から1日へと減少する (Fig. 3(a)).

マグマの粘性係数 $\eta_f$ , 浮力 $G$ , 火道半径の尺度 $a_u$ は時間尺度 $t_u$ , 無次元化パラメター $\chi$ の両方に影響する.  $\eta_f$ を2倍, 3倍, ...すると,  $t_u$ は $\sqrt{2}$ 倍,  $\sqrt{3}$ 倍, ...,  $\chi$ は2倍, 3倍, ...になる.  $G$ ,  $a_u$ を2倍, 3倍, ...すると,  $t_u$ は $1/\sqrt{2}$ ,  $1/\sqrt{3}$ , ...,  $\chi$ は $1/2$ ,  $1/3$ , ...になる. これらの影響を計算する. 他のパラメターを基準値に固定した時,  $\eta_f$ を $10^8 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ から $10^{12} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ まで増加させると, 周期は10日から11日まで増加する (Fig. 3(b)). すなわち周期は $\eta_f$ にはほとんど依存しない. また他のパラメターを基準値に固定した時,  $G$ を $2 \times 10^1 \text{ Pa/m}$ から $2 \times 10^5 \text{ Pa/m}$ まで増加させるか, あるいは $G$ を固定して $a_u$ を $1.5 \times 10^4 \text{ m}^4$ から $1.5 \times 10^8 \text{ m}^4$ まで増加させると, 周期は11日から10日へと減少する (Fig. 3(c)). すなわち周期は $G$ または $a_u$ にはほとんど依存しない. 火道半径の尺度 $a_u$ は任意にとることができるので,

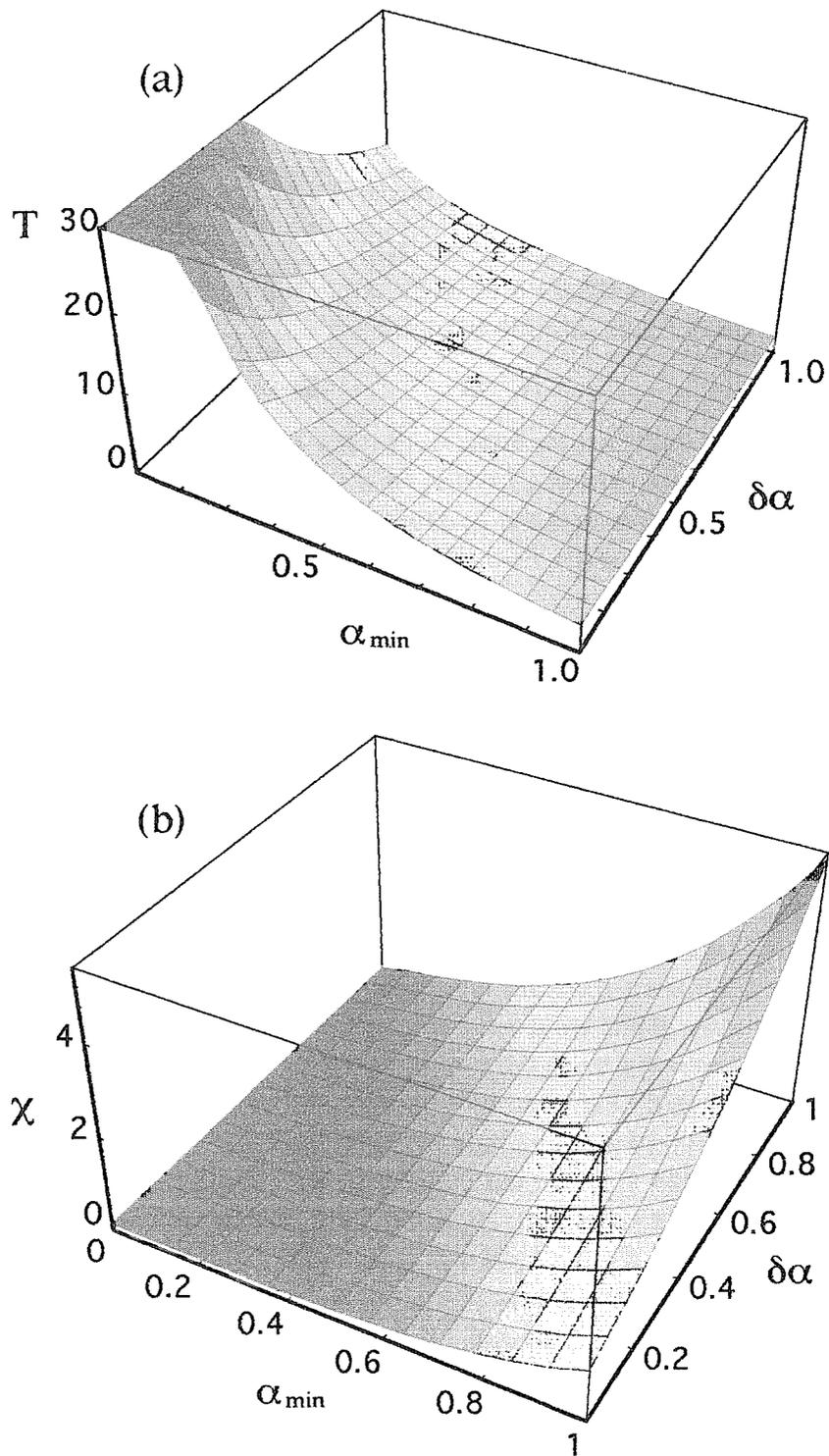
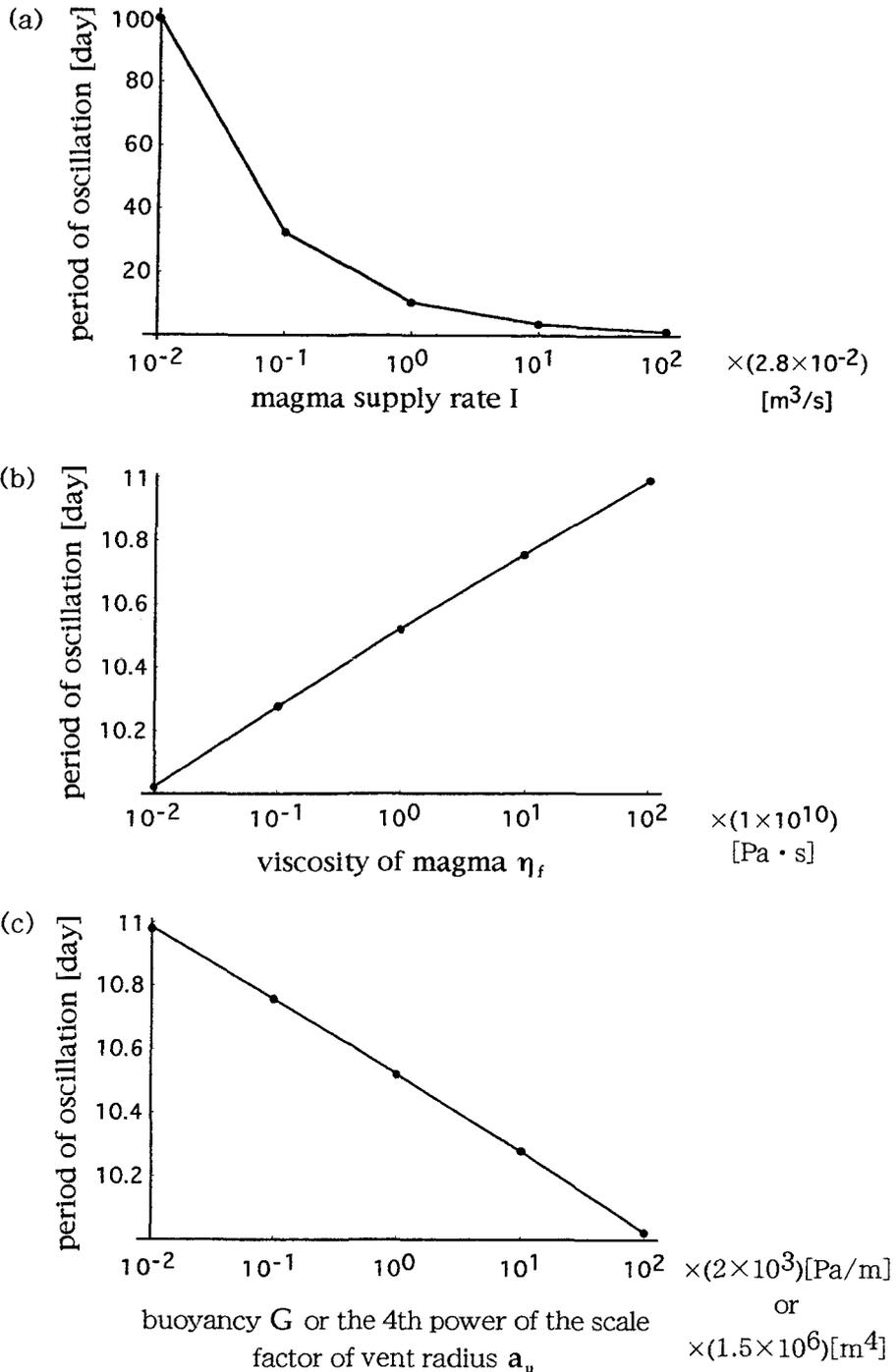


Fig. 2. 3D-plot of (a) dimensionless period  $T$ , and (b) dimensionless parameter  $\chi$  on  $(\alpha_{\min}, \delta\alpha)$  plane.



**Fig. 3.** Periods vs. (a) magma supply rate  $I$ , (b) viscosity of the magma  $\eta_f$  and (c) buoyancy  $G$  or the 4th power of the scale factor of vent radius  $a_u$ . The horizontal axes show the ratio of these parameters to their standard values which are given on Table 1. The vertical axes show the period of the system's oscillation, in the unit of a day.

**Table 1.** Standard values of physical parameters in the calculations for Fig. 3. These parameters are determined on the basis of the values which Ida (1996) prescribed in his calculation about Unzen Volcano (Oct 22–28, 1994). The initial condition is given at  $a_{min}=10^{-5}$ .

viscosity of magma $\eta_f$ [Pa · s]	$10^{10}$
viscosity of the country rock $\eta_c$ [Pa · s]	$3.8 \times 10^{10}$
buoyancy $G$ [Pa/m]	$2 \times 10^3$
initial volume of the chamber $V_r$ [m <sup>3</sup> ]	$3.3 \times 10^7$
rigidity of the country rock $\mu$ [Pa]	$3 \times 10^{10}$
bulk modulus of the magma $K$ [Pa]	$1.5 \times 10^{10}$
magma supply rate $I$ [m <sup>3</sup> /s]	$2.8 \times 10^{-2}$
scale factor of vent radius $a_u$ [m]	35

周期も任意に変化させられる。ただしこの時、火道半径の最大値、最小値も変化するので、モデルが表わす物理現象は同一のものではない。 $a_u$ を大きくとれば、大きな火道半径を持つ火山の短い周期の噴火をあらわし、 $a_u$ を小さくとれば、小さな火道半径を持つ火山の長周期の噴火をあらわす。これら3つのパラメーター ( $\eta_f, G, a_u$ ) を変化させた時は、時間尺度  $t_u$  と無次元化パラメーター  $\chi$  が互いの周期に対する影響を相殺するように変化するため、他の3つ ( $\eta_c, k, I$ ) を変化させたときに比べ、周期に与える影響が少ないことがわかる。

## V. 結 論

井田により提唱された火山モデルの解析解を構成し、その物理定数、パラメーターの依存性を調べた。その結果、このモデルの周期は、マグマ溜まりの周囲の岩盤の粘性係数、その岩盤の剛性率、マグマの体積弾性率、マグマ溜まりへの下からのマグマの供給率の4つのパラメーターに強く依存し、マグマの粘性係数、マグマと周囲の岩盤との密度差による浮力の2つのパラメーターにはそれほど影響されないことがわかった。また無次元化の際の火道半径の尺度の任意性より、モデルの周期は、火道半径の違いを度外視すれば、一意には定まらないことがわかった。

## 文 献

- Arnol'd, V. I., 1992. Ordinary Differential Equations, Springer-Verlag, Berlin, 152–267.
- Ida, Y., 1996. Cyclic fluid effusion accompanied by pressure change: Implication for volcanic eruption and tremor, Geophys. Res. Lett., **23** 1457–1460.
- 井田喜明, 1995. マグマや火山ガスの流れに伴う振動の発生機構, 地球惑星関連学会 1995年合同大会予稿集, 313.
- Strogatz, S. H., 1994. Nonlinear Dynamics and Chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering, Addison-Wesley, New York, 123–284.