



Title	結合レーリー振動子の挙動
Author(s)	阿部, 雄太; ABE, Yuhta; 前田, 亙 他
Citation	北海道大学地球物理学研究報告, 67, 241-249
Issue Date	2004-03-15
DOI	https://doi.org/10.14943/gbhu.67.241
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/14347
Type	departmental bulletin paper
File Information	67_p241-249.pdf



結合レーリー振動子の挙動

阿部 雄太・前田 亙

北海道大学理学研究科地球惑星科学専攻

(2003年12月20日受理)

Behaviour of Coupled Rayleigh Oscillators

Yuhta ABE and Itaru MAEDA

Division of Earth and Planetary Sciences, Graduate School of Science, Hokkaido University

(Received December 20, 2003)

Dynamics of coupled Rayleigh oscillators each of which consists of a spring-block system driven by a nonlinear frictional force is analyzed by means of Lorenz map. The nonlinear friction law given by Rayleigh is expressed by a third order algebraic curve of velocity. The nonlinear friction is exerted by a mechanism like belt-conveyer with constant velocity which we call the driving velocity. The two oscillators are coupled by a linear spring and a slider of linear friction.

A single limit cycle which a Rayleigh oscillator has when the driving velocity is less than a certain critical value transforms to a chaotic orbit as the velocity goes higher. On Lorenz map, a simple closed (dotted) curve becomes a complex folded curve. On the bifurcation diagrams as a function of the driving velocity, multi-periodic states and single periodic states appear in a very complex manner. The multi-periodic states can be classified into two categories. When the driving velocity is slow, the multi-periodic states have a simple closed curve on Lorenz diagram.

When the driving velocity is neither too slow nor too fast, the bifurcation diagram shows the period doubling pattern and Liapunov exponent takes a large positive value. These two facts indicate that the complex orbit in that range is really chaotic.

I. はじめに

地震は地殻の破壊或いはすべり現象であると考えられている。Brace等(1966)の固着すべりの考えはプレートテクトニクス説と調和し、Burridge and Knopoff(1967)以来これに基づいた地震シュミレーターが非常に沢山提出されてきた。基本的には地震活動の統計的性質を満たすモデルを作り様々な基準を導入して大地震を予測しようとしている(例えば、Keilis-Borok and Soloviev 2003)。残念ながら物理的な運動方程式を明確に提示しているモデルではブロックの運

動が、変位に依存するエネルギー注入型外力とエネルギー散逸機構としての摩擦により制御されている。すべり発生は数値的に与えられた臨界応力によって決定される。この様なモデルは解析的に扱いやすいとは言えない。

摩擦自体の研究は実用的な機械の構成の為に非常に精力的に行われているが、物理的に見て地震現象にそのまま適用出来るようなモデルは殆ど存在しない。余りに微視的モデルを基礎にするのは現状では実際的ではないと考えられる。それよりも固着すべりの現象としての共通性を取り出して、それを再現する、所謂、現象論的方程式を考えた方が現実的であろう。共通認識として、固着すべりは、定方向の（即ち、振動的でない）外力により系が振動的挙動をする現象である。ただし振動的挙動は必ずしも方程式の周期解を意味しない。また、定外力は運動方程式には単に定数としてしか現れないから、方程式の単なる制御パラメーターになる。従って、運動方程式はある意味の自励系を記述する事になる。この定義の範疇にある固着すべりの運動方程式は既に19世紀に Rayleigh により提出されている (Rayleigh, 1894)。以後、これをレーリー振動子と呼ぶ。

Rayleigh は、通常の散逸型摩擦では決して振動を維持出来ない事を数学的に示し、解決策として速度に比例するエネルギー注入型の摩擦を導入した。明らかに、これだけでは系の振動は無制限に増大し物理的ではないので、ある程度の振幅に達すると散逸が効いてくるように速度の高次の項を付け加えた。勿論、この高次項の具体的な形は不明であるから、可能な最も簡単な形として速度の3乗を採用した。出来た運動方程式は後に van der Pol によって解析された van der Pol の非線形方程式と等価である事が判っている (Drazin, 1992)。

van der Pol 方程式は詳しく解析されておりリミットサイクルを持つ。同程度の簡単な2階の非線形微分方程式で表される非線形振動子では周期的外力が与えられるとその周期によってはカオス的な振る舞いが現れる事が知られている (Drazin, 1992)。しかし周期的な外力を必要とする系は我々の地震問題では興味ある研究対象とは言えない。Brace 流の考えによる地震モデルとしての固着滑りの非線形モデルでは、複数のレーリー振動子の相互作用で、互いに一定でない力を及ぼす事に依りカオスの挙動を示す可能性を追求した方が自然である。

Maeda and Yokomori (1999) はこの考えに沿って、先ず通常のパネと摩擦で結合した2個のレーリー振動子を一定方向の一定力で起動した場合にカオス的な振る舞いが現れる事を見つけた。カオス的な振る舞いの状況証拠は制御パラメータを起動速度とした時、倍周期分岐系列がこの結合系にも見える事である。実際にはこの分岐図は4次元相軌道の1つの成分の時系列にローレンツ写像を用いて生成した。このカオスの挙動はばらつきはあるが、地震の最も安定した統計的性質であるマグニチュード-頻度関係（以下 M-F 関係）を再現する。このばらつきは多数のレーリー振動子を結合する事により減らす事が出来る。また、M-F 関係だけでなく地震発生の時間間隔に対しても、このモデルは観測で得られる逆ベキ則を算出する。

そこでこれらの関係を用いて実際の地震活動時系列とモデルのそれを比較する事が出来るようになった。現実の、北海道から東北にかけての幾つかの領域の地震活動との比較から、この多重レーリー振動子系は単に地震活動の統計的性質を再現するだけでなく、具体的な時系列も再現出

来る事が判った。このモデルの特徴はその他の多くのモデルが含んでいる確率的な項が無く、決定論的方程式に従っている事である。それゆえモデルによる予測はリアプノフ指数を時定数とする時間の範囲で決定論的である。言い換えればレーリー振動子系は地震活動の数理モデルとして高い可能性を持っているといえる。

この非線形モデルは十分解析されているとは言えない。モデルのパラメータ依存性は組織的には研究されておらず、例えば、Maeda and Yokomori (1999) では地震現象に使えるようなパラメータを試行錯誤で選択した。モデルのパラメータとしては振動子の質量、負の摩擦係数、正の摩擦係数、結合係数等であり、これらが制御パラメータである起動速度の関数として系の振る舞いにどの様に関わってくるかを調べておく必要がある。振動子の結合の仕方も通常のバネと摩擦だけでなく、色々の可能性がある。また、ローレンツ写像の分岐パターンからカオスの挙動を推定しているのであるが、例えばカオスの特徴である初期条件の忘却速度を表すリアプノフ指数の分岐図との関係等も調べておく必要がある。

本研究では、2個のレーリー振動子結合系のパラメータ依存性などを調べる。

II. モデル

モデルは Maeda and Yokomori (1999) と同じである。その概念図を Fig. 1 に示す。二つのブロックが夫々固定点に線形バネで繋がれていて、且つコンベヤーベルトの上に置かれているとする。ベルトは一定の速度 a で動いていてブロックに摩擦力を及ぼすが、その摩擦特性は Rayleigh が与えたものとする。更に、二つのブロックは互いに線形バネ（図では S 字状曲線として書いてある）と通常の線形摩擦で相互作用しているものとする。この運動方程式は以下のようなものである；

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= -y_1 + u_1 - u_1^3 - \eta(u_1 - u_2) \\ &\quad + k(y_2 - y_1) \\ \dot{y}_1 &= \varepsilon_1(u_1 + a) \\ \dot{u}_2 &= -y_2 + u_2 - u_2^3 - \eta(u_2 - u_1) \end{aligned}$$

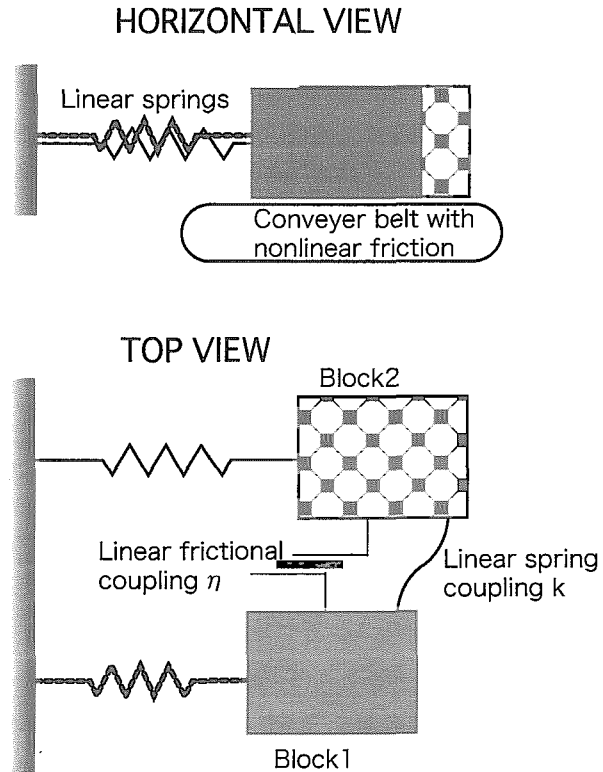


Fig. 1. Schematic diagram of the coupled Rayleigh oscillators. The upper figure shows the horizontal view and the lower the top view. Two blocks are coupled with each other through a linear (plate) spring and a linear slider. Friction law for the block-belt interaction is given by a third order algebraic curve.

$$+k(y_1 - y_2)$$

$$\dot{y}_2 = \varepsilon_2(u_2 + a)$$

ここで y_1, y_2 は二つのブロックの変位でバネの平衡状態での位置から測るものとする。 u_1, u_2 は起動ベルトに相対的な y_1, y_2 に対応する速度である。 η は二つのブロックの相対速度に比例する摩擦の係数、 k は相対変位に比例するバネ定数である。 また、 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ はベルトブロック間の非線形摩擦の非線形さを表すパラメータで、以後非線形パラメータと呼ぶ。 このモデルは単一のレーリー振動子の方程式を無次元化した後で相互作用の項を付加したものである。 これらの付加項は相対速度に比例する、或いは、相対変位に比例する、という意味では通常の摩擦とバネの意味を持つがその係数の大きさの物理的意味は通常と異なっている。 単に大小だけが意味を持つ。 以下、これらの項の係数を結合係数と呼ぶ。

計算は2倍精度のルンゲ・クッタ法で行った。 先ず、振動子の位置と速度の時系列を計算し、片方の振動子の位置の時系列からローレンツ写像(Strogatz, 1994)を作成した。 これを変位振幅だけの情報に圧縮し、起動速度の関数として並べて作成した図を分岐図と呼ぶ。 同様に初期条件を僅かに変えた計算との差からリアプノフ指数を計算し分岐図との比較を行った。 この指数の計算は十分多数の異なった初期値の計算から求めた訳ではないのでシステムの厳密に固有な指数とは言えないかも知れないが、多数の周期解が現れた場合にそれがカオス的か否かを判断出来るものと考えた。

パラメータは起動速度 a 、二つの非線形パラメータ $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 、結合係数 η, k 、である。 起動速度が $1/\sqrt{3}$ のところで相軌道はリミットサイクルと定常滑りの分岐点を持つ事は既に判っているので、起動速度の値はこれ以下の範囲で計算を行った。 その他のパラメータは依然適当に選んだ範囲に限られていて完全に網羅的ではない。

III. 計算結果

Fig. 2には結合係数 η と k を 0.1、非線形パラメータ ε_1 を 0.4 に固定したときの異なる ε_2 での分岐図を示した。 横軸は起動速度 a 、縦軸は片方のブロックの変位のピーク y_1 -peak である。 ε_2 が小さい時、 $a=0$ と $a=0.5$ 付近で多重周期状態が見られ、 ε_2 が大きくなるにつれて多重周期状態の範囲は広がっていくのがわかる。 $\varepsilon_2=0.25$ では分岐図全体が多重周期状態となっている。 しかし、 ε_2 が 0.25 と 0.30 の間で、 $a=0.4$ 付近に突然単周期が現れ、二つの非線形パラメータの差が小さくなるにつれ、多重周期状態は消えていく。 二つの非線形パラメータが等しくなると、ブロックの動きが同期し、どの起動速度においても完全に単周期状態になる。 ε_2 の値が ε_1 を超えると、再び多重周期状態が起り $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ のときと対称的な変化が見られる。

Fig. 3では $\varepsilon_2=0.3$ 付近で単周期状態が起こる様子を、 ε_2 をより細かい刻みで示し、またそのときのリアプノフ指数 λ の変化も合わせて示した。 $\varepsilon_2=0.302 \sim 0.304$ の間では、起動速度が十分遅い時、即ち $a \sim 0$ の付近で多重周期が単周期に変わっているのがわかる。 またこのとき、 λ が正から

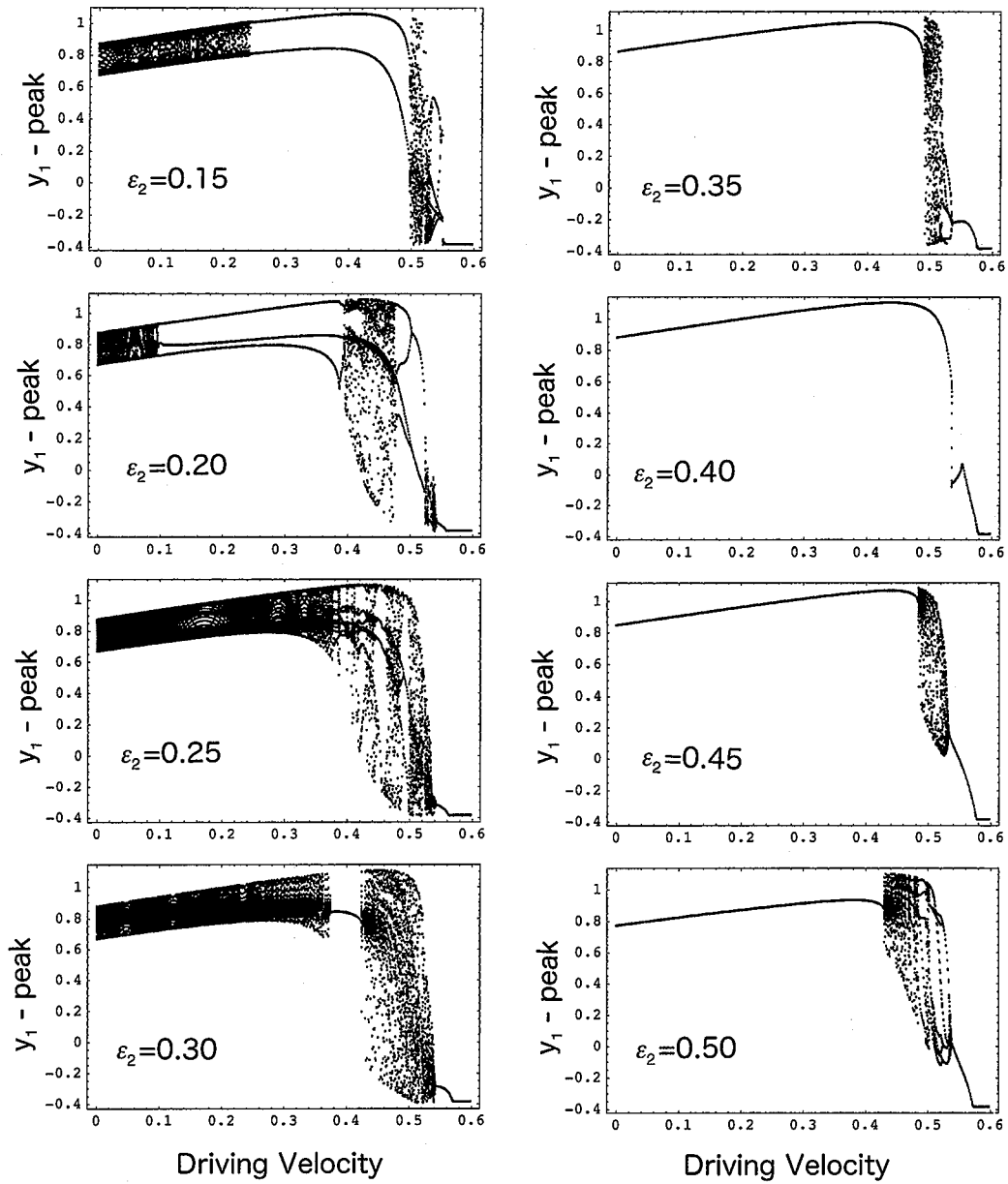


Fig. 2. Bifurcation diagrams for different nonlinear parameter ε_2 's with the fixed parameter $\varepsilon_1=0.4$ and the coupling constants $\eta=k=0.1$. Horizontal axis is the driving velocity a and the vertical axis is the peak displacement amplitude of the first block y_1 .

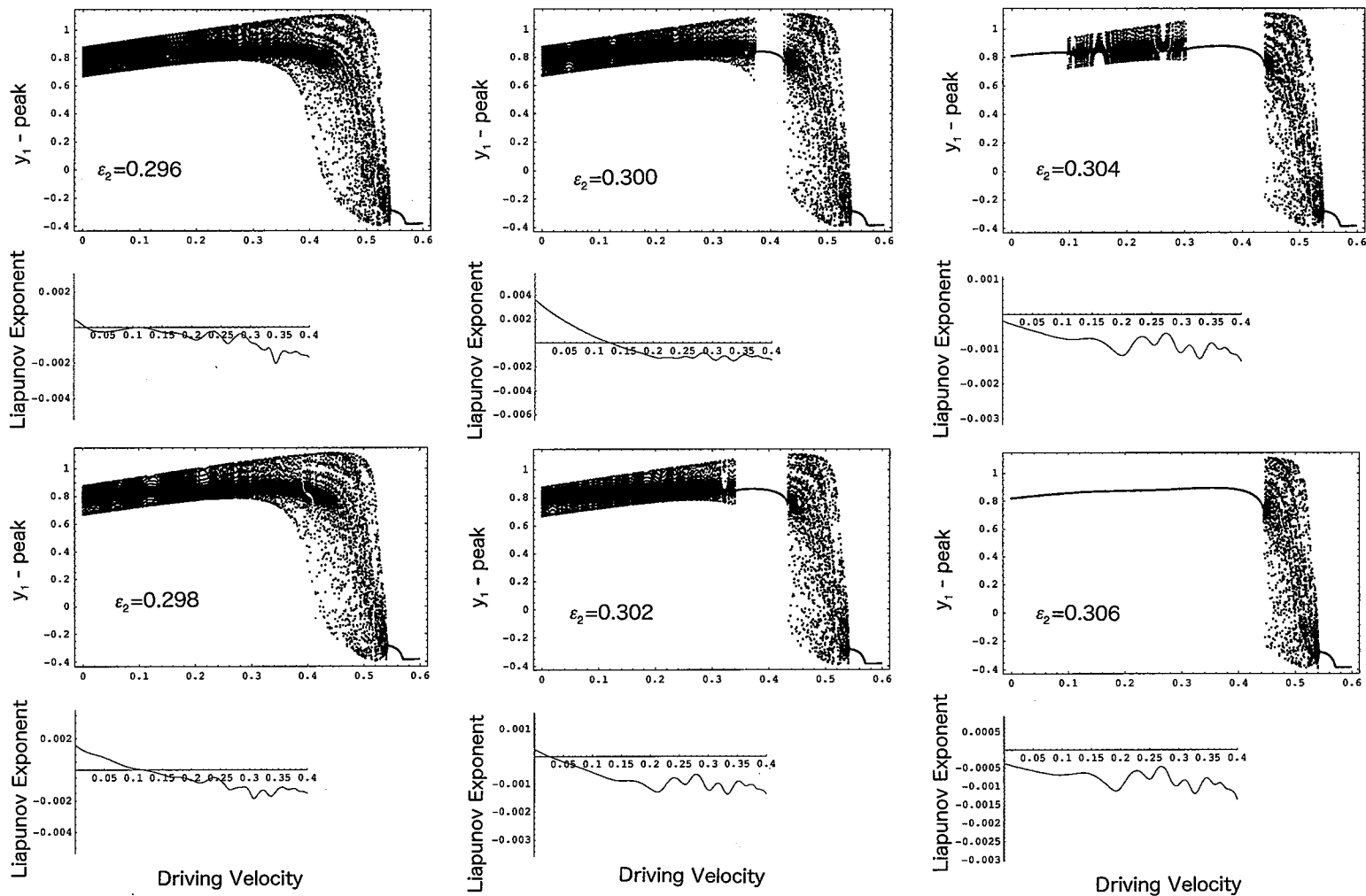


Fig. 3. The similar diagram as Fig.1 for narrower range of $\varepsilon_2=0.296\sim 0.306$ with the increment $\varepsilon_2=0.002$ and the variations of corresponding Liapunov exponent. Horizontal axis is α .

負へ変化していることから、ここでの変化は λ の符号に依存していると考えられる。しかし、 $\varepsilon_2 = 0.298 \sim 0.30$ の間に起こる $a = 0.4$ 付近での単周期への変化については、リアプノフ指数との関係は見られない。

ここで、 ε_2 が変化するにつれて起こる単周期-多重周期の変化と、リアプノフ指数の関係を見るため、異なる起動速度 a における $\varepsilon_2 - y_1$ -peakの関係と $\varepsilon_2 - \lambda$ の関係をFig. 4に示した。小さい a においては、 $\varepsilon_2 = 0.3 \sim 0.5$ で周期が単周期となり、その外で多重周期になっている。またリアプノフ指数は、単周期のときには単調に下がり、多重周期のときには激しく変化しているのが分かる。また、 $a = 0.5$ 付近では起動速度が定常滑りとリミットサイクルとの分岐点に近いので、軌道がカオス的な振る舞いを見せ、 a が $1/\sqrt{3}$ を超えると、定常滑りに落ち着く。

また、起動速度が遅いとき($a = 0.1$)に見られる多重周期と、起動速度が速いとき($a = 0.5$)に見られる多重周期の性質の違いを調べるため、 $\varepsilon_1 = 0.4$ 、 $\varepsilon_2 = 0.3$ でのローレンツ写像をFig. 5に示した。図の横軸は n 回目の y_1 -peakの値 x_n 、縦軸は $n+1$ 回目の y_1 -peakの値 x_{n+1} である。 $a = 0.1$ ではローレンツ写像はきれいな周期になっているが、 $a = 0.5$ ではカオス的な振る舞いを見せており、これらの多重周期性は全く違う性質であることが分かる。 $a = 0.1$ でのローレンツ写像の $(x_{n+1}, x_n) = (0.83, 0.83)$ 付近で、 $x_{n+1} = x_n$ の直線に近接しているのが分かる。 a の値が大きくなるにつれ、その差はより縮まっていき、接した時に周期はリミットサイクルに入り、多重周期から単周期に変わると思われる。その後の変化(Fig. 5-(b))は単純な閉曲線の折り畳みによって複雑な閉曲線が生じるというスモール写像的な概念で説明出来る。

最後に結合係数の値を小さくしていった時の分岐図の変化をFig. 6に示した。結合係数が小さくなるということは、互いのブロックの影響が小さくなるということであるから、分岐図は徐々に単一レーリー振動子のときの分岐図に近付いていくことが予想される。実際、分岐図は結合係数が小さくなるにつれて、振幅の変化の幅が小さくなっていき、単一レーリー振動子の振る舞いに近付いているのが分かる。

IV. ま と め

レーリー型摩擦特性を持つコンベヤーベルトで起動された互いに相互作用するブロックの運動をローレンツ写像を用いて解析した。1ブロックの場合のリミットサイクルが相互作用により複雑な多重周期軌道になるが、それは2種類に分類される。起動速度が遅い場合には振幅の異なる変位の振動が順々に出現するのに対し、起動速度が大きくなると振幅の変化が不規則になり所謂カオス状態になる。この違いはリアプノフ指数の違いでも明瞭に認められる。

この性質の異なる多重周期状態の遷移はかなり突然に起こるが、その機構はローレンツ写像の単純な閉曲線(実際は点列)が折り畳まれる事による。定性的にはカオスの生じるスモール写像のような事が生じていると考えられる。このカオス状態の生じる起動速度の範囲は振動状態から定常滑りへの遷移の区間で起こるが、その範囲はパラメータによって色々と未だ系統的な関係が見いだされていない。

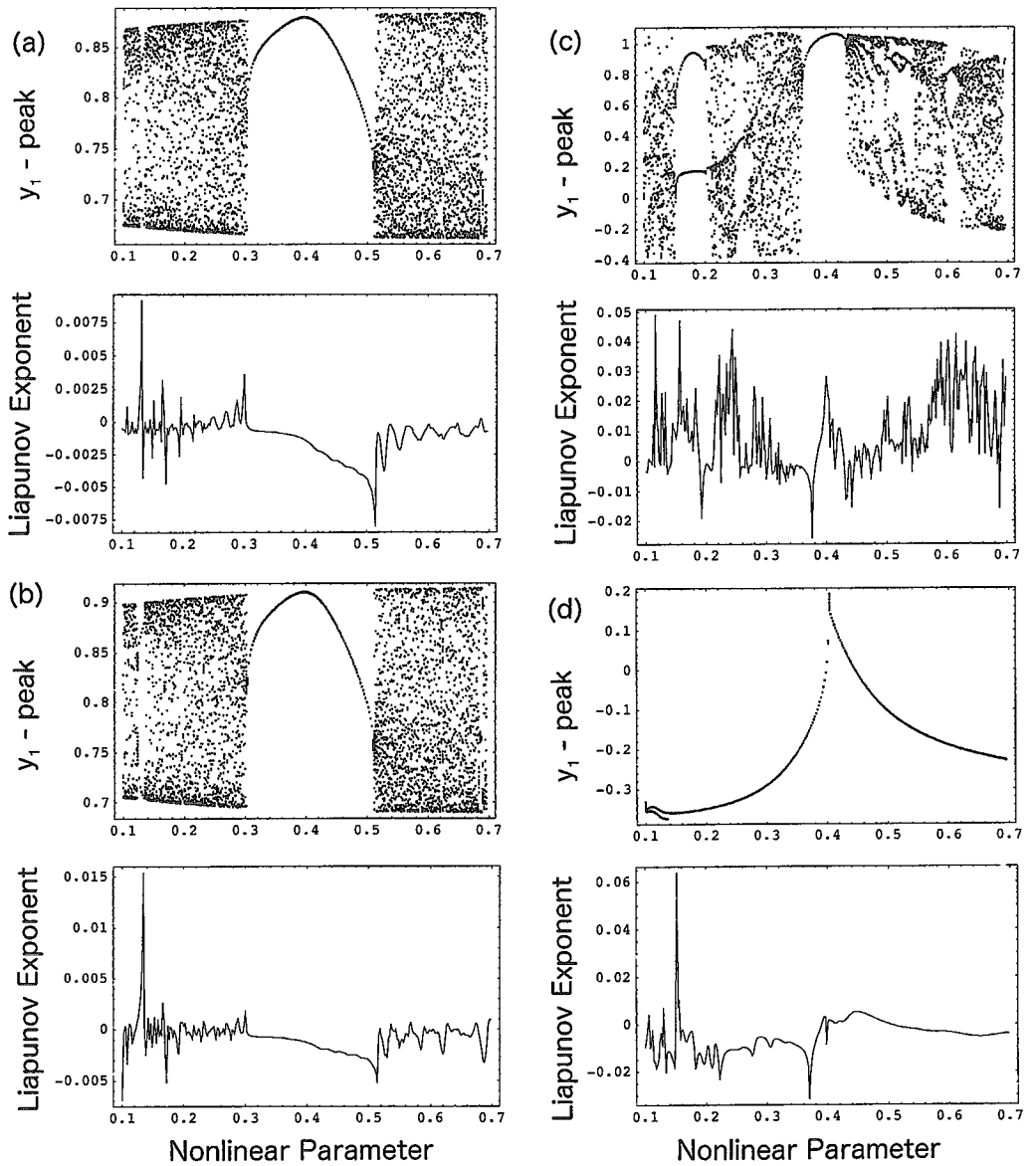


Fig. 4. Bifurcation diagrams and the variation of Liapunov exponents as a function of one of the nonlinear parameter ε_2 for various driving velocities a 's with fixed parameters $\varepsilon_1=0.4$ and $\eta=k=0.1$. For the driving velocities, (a) $a=0.01$, (b) $a=0.05$, (c) $a=0.5$, and (d) $a=0.55$.

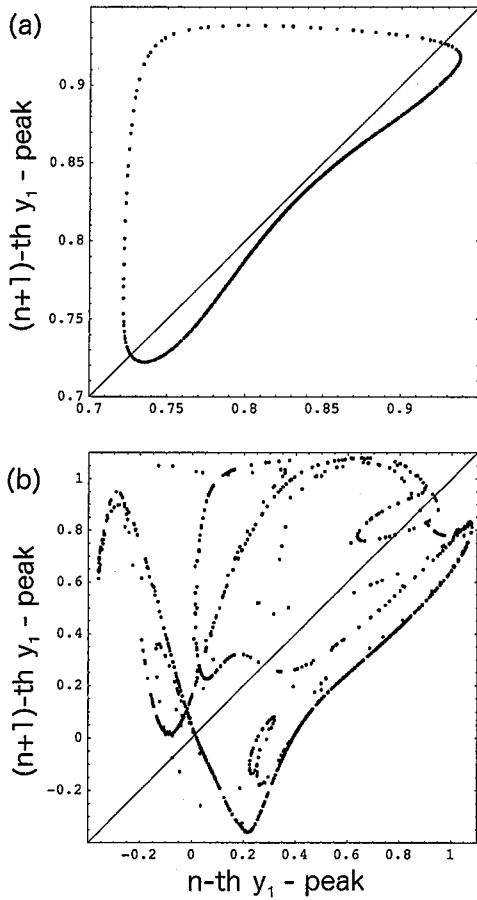


Fig. 5. Lorenz maps for the displacement orbit y_1 with fixed nonlinear parameters, $\varepsilon_1=0.4$, $\varepsilon_2=0.3$, and the coupling constants $\eta=k=0.1$. The driving velocity is $a=0.1$ for (a) and $a=0.5$ for (b).

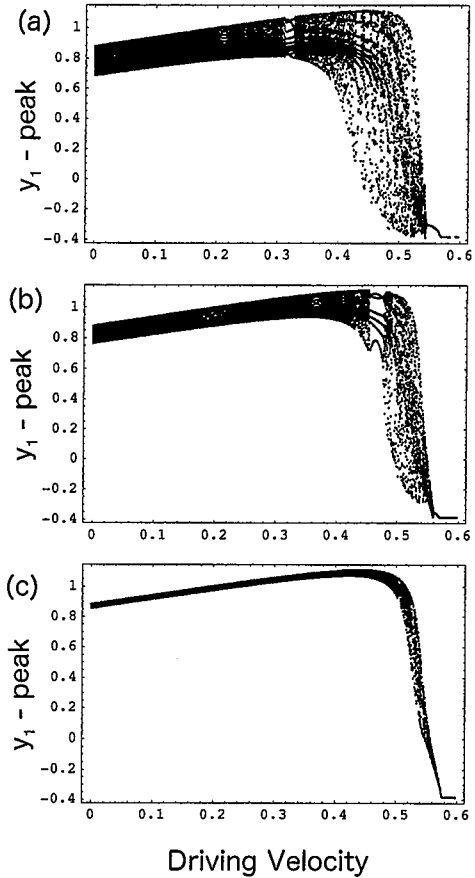


Fig. 6. Effect of the coupling constants on the variance of the displacement amplitudes depicted as bifurcation diagrams. The values of these constants are (a) $\eta=k=0.09$, (b) 0.05 , and (c) 0.01 . The nonlinear parameters are fixed as $\varepsilon_1=0.4$ and $\varepsilon_2=0.295$.

文 献

- Brace, W.F. and J.D. Byerlee, 1966. Stick-slip as a mechanism for earthquakes, *Science*, **153**, 990–992
- Burridge, R. and L. Knopoff, 1967. Model and theoretical seismicity, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **57**, 341–371.
- Drazin, P.G., 1992. *Nonlinear systems*, Cambridge, 317pp.
- Keilis-Borok, VII, and A.A. Soloviev (Edis), 2003. *Nonlinear dynamics of the lithosphere and earthquake prediction.*, Springer, 337pp.
- Maeda, I. and M. Yokomori, 1999. Systems of multiply connected nonlinear oscillators and their application to seismic phenomena., *J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. Ser. VII(Geophysics)*, **11**, 633–655.
- Rayleigh, J.W.S., 1894. *The theory of sound*, Macmillan (reprint Dover, 1945)
- Strogatz, S.H., 1994. *Nonlinear dynamics and chaos*, Addison Wesley, 498pp.