



# HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	2006年度 グラフ理論講義ノート
Author(s)	井上, 純一; Inoue, Jun-ichi
Description	<a href="http://www005.upp.so-net.ne.jp/j_inoue/index.html">http://www005.upp.so-net.ne.jp/j_inoue/index.html</a> <a href="http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/">http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/</a>
Issue Date	2006
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/15412">https://hdl.handle.net/2115/15412</a>
Rights(URL)	<a href="https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/">https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/</a>
Type	learning object
File Information	GraphTheory06_11.pdf, 第11回講義ノート



# グラフ理論 配布資料 #11

担当：井上 純一 (情報科学研究科棟 8-13)

URL : [http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j\\_inoue/](http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/)

平成 18 年 6 月 26 日

## 目次

10 有向グラフ	142
10.1 有向グラフの定義・概念とその性質	142
10.2 オイラー有向グラフとトーナメント	146

### 演習問題 10 の解答例

まず, 点数が 4 の完全グラフ  $K_4$  を考え, この完全グラフから辺を 1 本ずつ削減していった場合, 彩色多項式はどのように振舞うのかを調べてみよう. 図 172 に載せるように, 辺を削除していくことにより, 彩色多

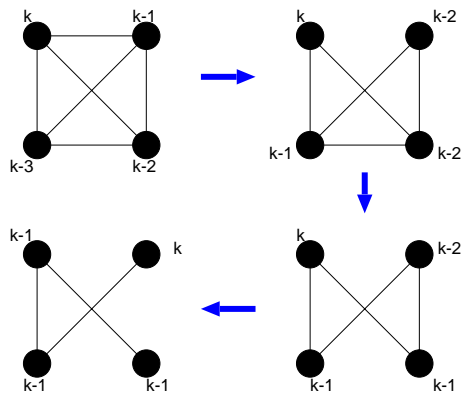


図 172: 完全グラフから辺を 1 本ずつ削除していくと最後には木が得られる.

項式は  $k(k-1)(k-2)(k-3) \rightarrow k(k-1)(k-2)^2 \rightarrow k(k-1)^2(k-2) \rightarrow k(k-3)^3$  のように単調に増加し, 最終的に得られるグラフは点数 4 からなる木  $T_4$  である. また, 完全グラフは全ての点が互いにつながっているのだから, 点彩色においては全ての点の色を他のどの全ての点の色とも異なる色で彩色しなければならず, 従って, 明らかに与えられた色の数  $k$  に対し, 完全グラフの点彩色の仕方の数は連結グラフ中で最も少ない. また, 上記の操作を繰り返して最終的にできあがる連結グラフは木であり, この事実は点数  $n$  によらない. 従って

$$P_{K_n}(k) \leq P_G(k) \leq P_{T_n}(k) \tag{204}$$

すなわち

$$k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1) \leq P_G(k) \leq k(k-1)^{n-1} \tag{205}$$

が成り立つ.

## 10 有向グラフ

今まで扱ってきたグラフは各辺に向きは無く, 例えば, オイラー小道などを考える際には, 辺のどちら向きに進んで道を作っても構わなかった. これに対し, この節からは各辺がそれぞれ向きを持っている「有向グラフ」について, その性質を調べて行くことにする.

### 10.1 有向グラフの定義・概念とその性質

弧集合 (arc family)  $A(D)$ : 点集合  $V(D)$  の元の順序対からなる有限族.

有向グラフ (digraph)  $D$ :  $V(D)$  と  $A(D)$  からなるグラフ (図 173 参照).

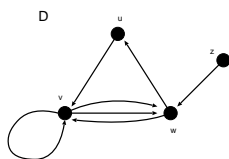


図 173: 有向グラフ  $D$  の一例.  $V(D) = \{u, v, w, z\}, A(D) = \{uv, vv, vw, wv, ww, wz\}$ .

$D$  の基礎グラフ (underlying graph): 有向グラフ  $D$  の矢印を取り除いたグラフ (図 173 参照).

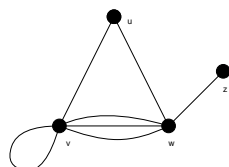


図 174: 図 173 の有向グラフに対する基礎グラフ.

単純有向グラフ (simple digraph):  $D$  の弧が全て異なり, ループが無いグラフ.

(注): 単純有向グラフの基礎グラフは必ずしも単純グラフではない (図 175 参照).

有向グラフの同形: 基本グラフの間に同形写像があり, 各点の順序を保存する写像になっているとき.

例えば, 図 176 のグラフ  $A$  と  $B$  は同形ではない.  $wz$  の向きが異なるからである.

有向グラフ  $D$  の隣接行列  $A = (a_{ij})$ : 要素  $a_{ij}$  が  $v_i$  から  $v_j$  への「弧」の本数を表す, サイズ  $n$  のグラフに対して  $n \times n$  の行列.

(注): 無向グラフの場合と異なり, 行列  $A$  は非対称であることに注意されたい.

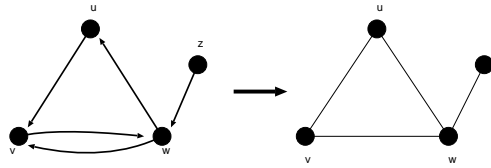


図 175: 図 173 の単純有向グラフの基礎グラフは必ずしも単純グラフではない.

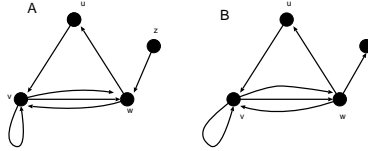


図 176: これら有向グラフ A と B は同形ではない. 辺 wz の向きが異なるからである.

図 177 の有向グラフ D の隣接行列 A は

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

で与えられる.

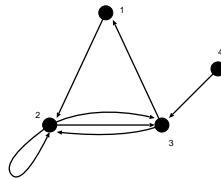


図 177: その隣接行列が で与えられる有向グラフ D.

強連結 (strongly connected) : 任意の 2 点,  $v, w$  の間に  $v$  から  $w$  への道がある.

向き付け可能 (orientable) : グラフ  $G$  の全ての辺を方向付けて強連結有向グラフが得られるとき (例として図 178 参照).

**定理 22.1**  
 連結グラフ  $G$  が向き付け可能であるための必要十分条件, グラフ  $G$  の各辺が少なくとも 1 つの閉路に含まれていることである.

(証明)

必要性は明らかなので十分性を示す.

まず, グラフ  $G$  の全てが閉路が含まれている場合には証明は終わる. 従って, 以下ではこれ以外の場合を考

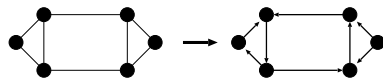


図 178: 向き付け可能なグラフの一例.

える.

さて、閉路  $C$  には含まれないが、 $C$  の各辺に隣接している辺  $e$  を選ぶ (図 179 参照). 「グラフ  $G$  の各辺

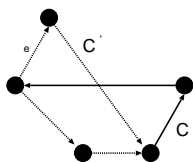


図 179: 閉路  $C$  と  $C'$ .

が少なくとも 1 つの閉路に含まれている」のであるから、 $e$  はある閉路  $C'$  に含まれている.  $C'$  の辺を  $C$  にも含まれている  $C'$  の辺の向きは変えないで向き付ける. この操作でできる有向グラフは強連結である.

従って、この操作を続けて、各ステップで少なくとも 1 つの辺を向き付ける. 各ステップで有向グラフは強連結なので、グラフ全体を向き付けた後にできるグラフは強連結である. (証明終わり).  
有向グラフの応用問題として、次の例題を見ておこう.

**例題 10.1**

図 180 のネットワークで点  $A$  から点  $G$  への最長路を見つけよ.

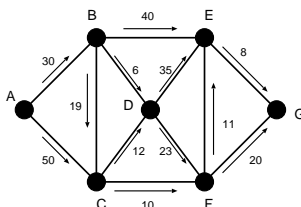


図 180: ここでの例題のネットワーク.

(答え)

点  $A$  からの各点  $V$  への最長路の長さを示す数値  $l(V)$  計算すると

- A : 0
- B :  $l(A) + 30 = 30$
- C :  $l(A) + 50 = 50$
- D :  $\max\{l(B) + 6, l(C) + 12\} = \max\{36, 62\} = 62$
- F :  $\max\{l(D) + 23, l(C) + 10\} = \max\{85, 60\} = 85$

$$E : \max\{l(B) + 40, l(B) + 35, l(F) + 11\} = \max\{70, 97, 96\} = 97$$

$$G : \max\{l(E) + 8, l(F) + 20\} = \max\{105, 105\} = 105$$

となるから、最長路の長さは 105 であり、最長路を図 181 に載せる。

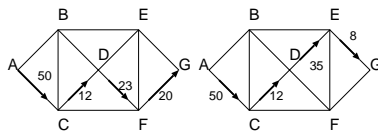


図 181: 最長路を与える 2 通りの経路。どちらも最長路の長さは 105 である。

**例題 10.2**

有向グラフ  $D$  の逆  $\bar{D}$  は  $D$  の辺の向きを反転して得られる。以下の問題に答えよ。

- (1) その逆と同形であるような有向グラフの一例を描け。
- (2)  $D$  と  $\bar{D}$  の隣接行列の間にはどんな関係があるか、答えよ。

(答え)

- (1) 互いに同形であるような有向グラフ  $D$  及び、その逆  $\bar{D}$  を図 182 に描く。



図 182: 互いに同形であるような有向グラフ  $D$  及び、その逆  $\bar{D}$  の一例。

- (2) 図 183 に載せた基礎グラフ  $G$  に対して有向グラフ  $D$  及び、その逆  $\bar{D}$  を作り、それぞれの隣接行列  $A_G, A_D, A_{\bar{D}}$  を書き下してみると

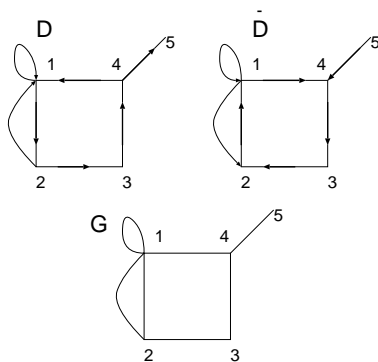


図 183: 例として考える基礎グラフ  $G$ , 有向グラフ  $D$  及び、その逆  $\bar{D}$ 。

$$A_G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A_D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_{\bar{D}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (206)$$

となる.  $A_D + A_{\bar{D}}$  を作ってみると

$$A_D + A_{\bar{D}} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (207)$$

が得られるが, これは一行一列成分 ( $[A_D + A_{\bar{D}}]_{11}$ ) だけが異なる以外は基礎グラフの隣接行列と一致する. この食い違いが生じた成分は基礎グラフの「ループ」に相当する. 従って, ループが無い基礎グラフに関しては関係式:

$$A_G = A_D + A_{\bar{D}} \quad (208)$$

が成立することがわかる. ループを含むグラフに関しても, 非対角成分に限れば上関係式が成り立つ.

ここでは図 183 に載せた特定のグラフに関して議論したが, これが一般のグラフに関しても成り立つのは明らかである. グラフの逆は辺の向きを逆転してできるわけであるから, 一方のグラフで弧  $vw$  が存在するならば, その逆のグラフでは  $wv$  は存在しない. 従って, ループが無い場合には関係式 (208) の非対角成分に関して  $[A_G]_{vw} = [A_D + A_{\bar{D}}]_{vw}$  が成り立つ. ループがある場合には各隣接行列に対して  $[A_D]_{vv} = [A_{\bar{D}}]_{vv}$  が成り立つわけであるから, 関係式 (208) の対角成分に関して  $2[A_G]_{vv} = [A_D + A_{\bar{D}}]_{vv}$  が成り立つ. ループが無い場合には隣接行列の対角成分はゼロであるから, 関係式 (208) を成分で書けば全ての場合に関して, 異なる任意の 2 点  $v, w$  に対し

$$[A_G]_{vw} = [A_D + A_{\bar{D}}]_{vw} \quad (209)$$

$$2[A_G]_{vv} = [A_D + A_{\bar{D}}]_{vv} \quad (210)$$

が成り立つ.

## 10.2 オイラー有向グラフとトーナメント

連結有向グラフ  $D$  の全ての弧を含む閉じた小道が存在する場合, その有向連結グラフ  $D$  をオイラーであると言う. 図 184 に載せた例は, オイラーではないが, その基礎グラフはオイラーである場合である.

出次数 (out-degree)  $\text{outdeg}(v)$ :  $vw$  の形をした有向グラフ  $D$  の弧数.

入次数 (in-degree)  $\text{indeg}(v)$ :  $wv$  の形をした有向グラフ  $D$  の弧数.

握手有向補題

有向グラフ  $D$  の全点についての入次数の合計と出次数の合計は等しい.

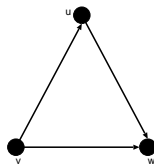


図 184: オイラー有向グラフではないが、その基礎グラフはオイラーであるグラフの一例.

**定理 23.1**

連結有向グラフ  $D$  がオイラーであるための必要十分条件は、 $D$  の各点で  $\text{outdeg}(v) = \text{indeg}(v)$  が成立することである.

ハミルトン有向グラフ (Hamiltonian digraph) : 全ての点を含む閉路がある有向グラフ.

半ハミルトン有向グラフ (semi-Hamiltonian digraph) : 全ての点を通る道があるグラフ.

**定理 23.2**

$D$  は強連結有向グラフであり、点が  $n$  個あるとする. 各点  $v$  に対し、 $\text{outdeg}(v) \geq n/2$ , かつ、 $\text{indeg}(v) \geq n/2$  ならば、 $D$  はハミルトン有向グラフである.

トーナメント (tournament) : 任意の 2 点がちょうど 1 本の弧で結ばれている有向グラフ (図 185 参照).

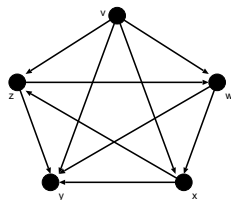


図 185: トーナメントの一例.

**定理 23.3**

- (i) ハミルトンでないトーナメントは全て半ハミルトンである.
- (ii) 強連結なトーナメントは全てハミルトンである.

(証明)

(i) 点  $n$  個のトーナメントは全て半ハミルトンであると仮定する.  $T'$  には点が  $n$  個あるので、半ハミルトン道がある (図 186 参照).

(1)  $vv_1$  が  $T$  の弧ならば、 $v \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_n$  が所望の道である.

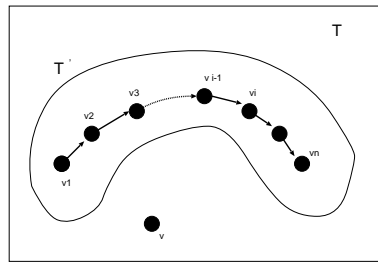


図 186:  $T'$  には半ハミルトン道がある.

(2)  $vv_1$  が  $T$  の弧ではなく,  $v_1v$  が  $T$  の弧であれば, 図 187 のように点  $v_i$  を選べばよい.

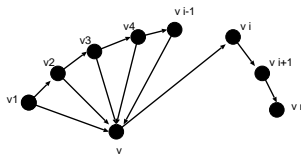


図 187:  $vv_1$  が  $T$  の弧ではなく,  $v_1v$  が  $T$  の弧であれば, 図のように点  $v_i$  を選べばよい.

(3)  $vv_i$  の形をした弧が  $T$  にないのであれば,  $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_n \rightarrow v$  が所望の道である. (証明終わり).

最後にトーナメント (「トーナメントが推移的である」という概念) に関する例題を一つ見ておこう.

**例題 10.3**

トーナメントが推移的であるというのは, 弧  $uv$  と  $vw$  があれば必ず弧  $uw$  があることである. 以下の問いに答えよ.

- (1) 推移的トーナメントの一例を描け.
- (2) 推移的トーナメントにおいては全てのチームに順位を付けられることを示せ. ただし, どのチームもそれより下位のチーム全てを負かしていなければならないものとする.
- (3) 点が 2 個以上ある推移的トーナメントは強連結になり得ないことを示せ.

(答え)

- (1) 推移的トーナメントグラフの一例を図 188 に載せる.
- (2) 図 188 に示したグラフにおいて, 点  $k = u, v, w$  出次数:  $\text{outdeg}(k)$  及び 入次数:  $\text{indeg}(k)$  と順位の間関係を書くと

$$\begin{aligned}
 \text{1 位 } (u) &: \text{outdeg}(u) = 2, \text{indeg}(u) = 0 \\
 \text{2 位 } (v) &: \text{outdeg}(v) = 1, \text{indeg}(v) = 1 \\
 \text{3 位 } (w) &: \text{outdeg}(w) = 0, \text{indeg}(w) = 2
 \end{aligned}$$

となる. 従って,  $\text{outdeg}$  の多い順 (あるいは  $\text{indeg}$  の少ない順) に 1 位から 3 位への順位が付けられる. また, 推移的トーナメントの定義から  $\text{outdeg}$  あるいは  $\text{indeg}$  の数が等しい点が見れることはあり得な

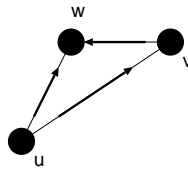


図 188: 推移的トーナメントグラフの一例.

いから, 全てのチームに順位をつけることができる.

- (3) 点が 2 個以上ある推移的トーナメントのグラフならば, 必ず  $\text{outdeg}(k) = 0$  となるような点  $k$  が存在するから, 強連結にはなり得ない.

**例題 10.4**

以下の問いに答えよ.

- (1) ハミルトン・グラフは全て向き付け可能であることを示せ.
- (2)  $K_n$  ( $n \geq 3$ ), および,  $K_{r,s}$  ( $r, s \geq 2$ ) は向き付け可能であることを, 個々のグラフの向き付けを具体的に見つけることにより示せ.
- (3) ピーターソン・グラフの向き付けを見つけよ.

(答え)

- (1) ハミルトン・グラフには全ての点を一度ずつ通って元に戻るハミルトン閉路が存在するので, この閉路に沿って各辺を向き付けすれば (この閉路に属さない辺への向き付けの仕方は任意), 任意の点  $v$  をスタートし, 任意の点  $w$  に到達できる道がこの閉路上にあることは明らか. 従って, ハミルトン・グラフは向き付け可能である.
- (2) 完全グラフ  $K_n$  ( $n \geq 3$ ) の場合には任意の点  $v$  の次数が  $\text{deg}(v) = n - 1$  であるから, Dirac の定理より, グラフ内の全ての点  $v$  に対し  $\text{deg}(v) \geq n/2$  が成立するのでハミルトン閉路が存在するハミルトン・グラフである. 従って, (1) の結果より, 向き付け可能である. 具体的にはハミルトン閉路に属する辺をまずその向きに向き付けし, 残りの辺に任意に向き付けを行えばよい (図 189(左) 参照). 次に完

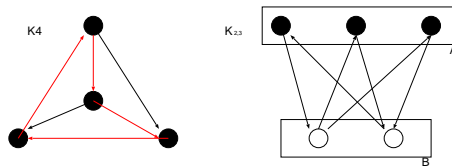


図 189:  $K_4$  の向き付け (左) と  $K_{2,3}$  の向き付け (右).

全二部グラフ  $K_{r,s}$  ( $r, s \geq 2$ ) の場合には, 必ず全ての辺が ABAB という長さ 4 の閉路に含まれるので (A, B とはそれぞれの点が決まるとともに含まれる 2 つのグループを指す), 定理 22・1 「連結グラフが向き付け可能であるための必要十分条件は, 各辺が少なくとも 1 つの閉路に含まれることである」よ

り、向き付けが可能であり、この順：ABAB に各辺に対し向き付けを行えば良い(図 189(右) 参照).

(3) 図 190 参照.

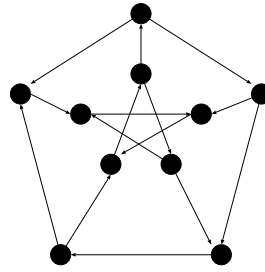


図 190: ピータースン・グラフの向き付け.

### 演習問題 11

$v_1, v_2, \dots, v_N$  を有向グラフ  $D$  の点とする. 成分  $a_{ij}$  を始点が  $v_i$ , 終点が  $v_j$  である  $D$  の弧の個数とするような  $N \times N$ - 行列  $A$  を有向グラフ  $D$  の隣接行列とすると,  $A^k$  の  $(i, j)$  成分は  $D$  における長さ  $k$  の有向  $(v_i, v_j)$  歩道の個数となることを示せ.

### 連絡事項

次回 7/3 は担当者 (井上) 出張のため, 坂本先生の CG の補講となります. 今回のレポート締め切りは 7/10 の講義開始時までとします.