HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	2006年度 グラフ理論講義ノート
Author(s)	井上, 純一; Inoue, Jun-ichi
Description	http://www005.upp.so-net.ne.jp/j_inoue/index.html http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/
Issue Date	2006
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/15412
Rights(URL)	https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/
Type	learning object
File Information	GraphTheory06_6.pdf, 第6回講義ノート

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

グラフ理論 配布資料 #6

担当：井上 純一 (情報科学研究科棟 8-13)
URL：http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j _inoue/

平成 18 年 5 月 15 日

目 次

演習問題 5 の解答例

ハミルトングラフはハミルトン閉路を含み, その閉路 C は●○を互い違いに並べてできる輪であるから, 完全二部グラフ $K_{s,s}$ で表すことができる ($s = 2, 3, \cdots$). 従って, G はこの閉路を構成する辺と他の接続辺からなる図 88 のようなグラフであると考えてよい. ここで, G の中から任意の k 個の点を取り出して構成さ

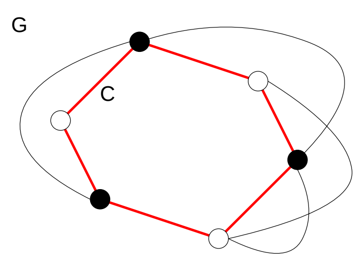

図 88: ここで考えるハミルトングラフ. 閉路 C がここでのハミルトン閉路.

れる集合 S を G から引いてできるグラフの成分数は, k 個の点が全て隣接する場合には明らかに 1 であり, これが G − S の成分数の最小値を与える (図 89 参照). しかし, ここで問題とするのは G − S の成分の最大値である. この最大値を与えるような集合 S の選び方は明らかに S **を構成する** k **個の点が全て隣接しない場合**であるから, その場合の G − S の成分数を評価すればよい. このために, 閉路 C 上の k 個の点をを 2 つずつ組んでペアにし (こうしたペアの総数は $l = k/2$), C 上にこのペアが一つできるごとに G − S の成分がどのように変化していくのかを調べる. すると図 90(左) を参考にした考察より, ペア数が 1 の場合には成分数は 2, ペア数が 2 の場合には成分数が 4, ..., ペア数が l の場合には成分数が $2l$ となり, この $2l$ は S の点の総数 k であったから, 結局

$$\text{G} - \text{S の成分数} \quad \leq \quad k$$

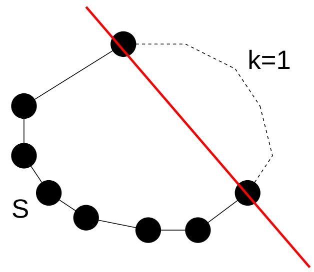

図 89: S の要素が全て隣接する場合の例．実線の部分でグラフ G を切断することになり，得られる G − S の成分数は明らかに 1 である．

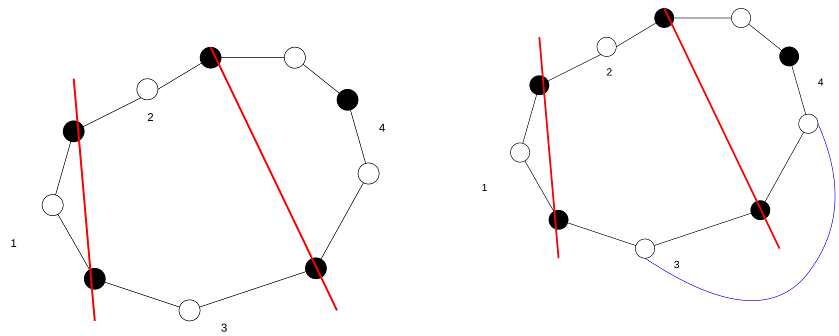

図 90: S の成分が全て隣接しない場合で，|S| = 4 の場合．得られる G − S の成分数は 4 である．また，ハミルトン閉路を構成する辺以外に接続辺ができたとしても，この成分数は減りこそはするが，決して増えない (右図)．

となり，題意を満たすことになる．ところで上記の議論では G の中の閉路 C に関して考え，この閉路を構成する辺以外の接続辺をひとまずは考えなかったわけだが，図 90(右) のような接続辺が加わったとしても，G − S の成分数は減りこそはするが，決して増えることはない．よって，この場合にも題意は満たされることになる．

※ 前回 (5/8) の補足事項

Ore の定理はハミルトン・グラフであるための十分条件であるため，Ore の定理を満たしていれば，つまり，完全グラフのように十分な辺数があれば，ハミルトン閉路があることが示せますが，Ore の定理を満たさない場合，一般的に言ってハミルトン・グラフか否かを証明することはとても難しくなります．この手の「判定問題」では重宝になる必要条件もいくつかあるようですが，それは十分条件と比べて数が少なく，実用的なものもさほど無さそうです．必要十分条件についてはまだ何も見つかっていません．

従って，ハミルトン・グラフか否かの証明はグラフの特性に応じてケース・バイ・ケースで取り組まなければならないのですが，おおまかに言えば，まずあたってみる価値のある方法は 2 つあり，一つは前回の演習問題で紹介した「グラフを二部グラフで表し，その点数が奇数であることで非ハミルトン性を示す」やり方 (**方法 1**)．もう一つは辺数に関して背理法で矛盾を導くという方法 (**方法 2**) です．

ここでは，この**方法 2** を説明しておきましょう．まず，例として図 91 のような点数 11，辺数 15 のグラフに対し，「ハミルトン閉路 C が存在する」と仮定します．その閉路 C 上では各点には必ず 2 本の辺が接続

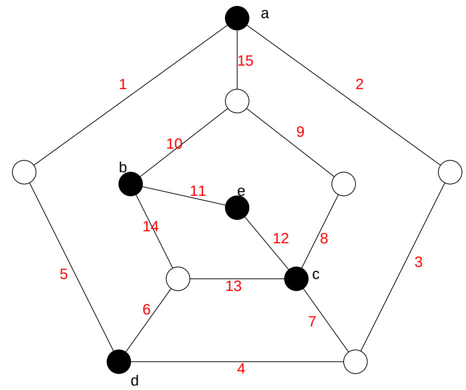

図 91: 背理法を用いて非ハミルトングラフであることを示すのに例として用いるグラフ.

していなければならないことに注目すると, 互いに隣接していない a, b, c, d, 及び, e の 5 点のそれぞれの次数は $3, 3, 4, 3, 3$ であるので, C 上に無い辺数は少なくとも $(3-2)+(3-2)+(4-2)+(3-2)+(3-2)=5$ (本) であり, 従って, 閉路 C には高々$15-5=10$ (本) しか辺が無いことがわかります. しかし, 点数 11 でハミルトン閉路を作る場合にはその閉路の辺数は 11 となりますから, 辺数 10 ではこれは不可能ということになり, 我々が用いた「ハミルトン閉路が存在する」という仮定に矛盾が生じたので図 91 のグラフにはハミルトン閉路が無い, と結論付けることができます.

7 木とその数え上げ

今回と次回の 2 回の講義では系統図や分子構造, あるいはコンピュータのファイルシステム等, 多くの現象/対象を表現することのできる, 簡単な構造ではあるが重要なグラフである「木」, 及び, その数え上げ法 (Cayley の定理とその系）について学習する. なお, 教科書 pp. 72-82 の「応用の追加」に関しては, **情報工学演習 II(B)** で演習問題を通じて見て行く予定なので, この講義では触れない.

7.1 木の基本的な性質

ここでいう「木」とは次のようにグラフ「林」の特別な場合として定義される.

林 (forest)：閉路を含まないグラフ.
木 (tree)：連結な林.

例えば, 図 92 に載せたグラフが林であり, 3 つある成分のうちの各々が木である.

これらの木の基本的な性質は次の定理によりまとめられている. 証明は教科書 p.61 を読んでもらうことにして, 講義では説明しない. 各命題を例に挙げた木に当てはめて確認されたい.

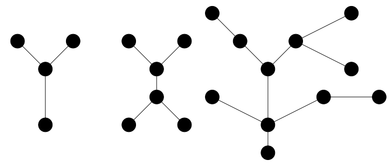

図 92: 林の例. 3 つある成分の各々が木に相当する.

定理 9.1
点 n 個からなるグラフ T を考えるとき, 次の各命題は同値である.

(i) T は木である.
(ii) T には閉路は無く, 辺が $n-1$ 本ある.
(iii) T は連結であり, 辺が $n-1$ 本ある.
(iv) T は連結であり, 全ての辺は「橋」である.
(v) T の任意の 2 点を結ぶ道はちょうど 1 本である.
(vi) T に閉路は無いが, 新しい辺をどのように付け加えても閉路ができ, しかも, 1 個の閉路である.

ここで, 上の定理の命題 (ii)(iii) より, 林 G の辺の数に関して次の系が得られる.

系 9.2
林 G には n 個の点と k 個の成分があるとする. このとき, 林 G には $n-k$ 本の辺がある.

(証明)
閉路が無く連結だとすると, $n-1$ 本の辺がある. これから辺を 1 本ずつ切断する操作を進めると

$$\begin{array}{rcl}
1\text{ 本辺を切断すると} & \Rightarrow & \text{成分数 } 2,\ n-2\text{ 本の辺} \\
2\text{ 本辺を切断すると} & \Rightarrow & \text{成分数 } 3,\ n-3\text{ 本の辺} \\
3\text{ 本辺を切断すると} & \Rightarrow & \text{成分数 } 4,\ n-4\text{ 本の辺} \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
k-1\text{ 本辺を切断すると} & \Rightarrow & \text{成分数 } k,\ n-k\text{ 本の辺}
\end{array}$$

となる. **(証明終わり)**.

さらに, **定理 9.1** の (ii) より木の端点数に関して次の系が得られる.

系 9.3
単点でない木は, 少なくとも 2 点の端点を含む.

(証明)

木 T : $V(\mathrm{T}) = \{v_1, v_2, \cdots, v_p\}$, $p \geq 2$, $E(\mathrm{T}) = \{e_1, e_2, \cdots, e_q\}$ とすると, **定理 9.1**(ii) より

$$q = p - 1$$

であり, 辺の総数の 2 倍はグラフの次数に等しい **(握手補題)** :

$$\sum_{i=1}^{p} \deg(v_i) = 2q$$

から直ちに

$$\sum_{i=1}^{p} \deg(v_i) = 2(p-1)$$

が得られる. 従って, 木の端点が 0, 1 だとすると, 上式右辺が負またはゼロとなり, 点の数が 2 以上のグラフに対する次数の定義に反する. **(証明終わり)**.

7.2　全域木

全域木 (spanning tree) : 連結グラフ G に対し, 閉路が無くなるまで辺を除去して残るグラフ (図 93 参照).

これを一般化すると

全域林 (spanning forest) : n 個の点と m 本の辺, k 個の成分があるとして, G の各成分に対して, 閉路が無くなるまで辺を除去する操作を繰り返して得られるグラフ.

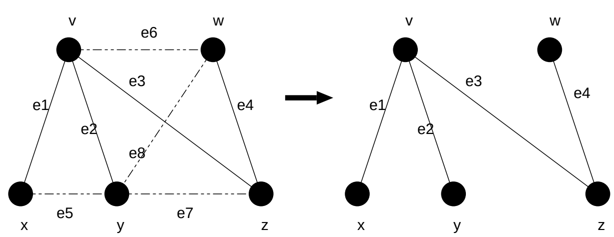

図 93: 連結グラフから生成された全域木の一例.

閉路階数 (cycle rank) $\gamma(\mathrm{G})$: 全域林を得るまでに切断しなければならない辺の本数.

$$\begin{aligned}\gamma(\mathrm{G}) &= (\mathrm{G}\text{ の辺数}) - (n\text{ 個の点, }k\text{ 成分からなる林 G の辺数}) \\ &= m - (n-k)(\textbf{系 9.2}\text{ より}) = m - n + k\end{aligned}$$

カットセット階数 (cutset rank) $\xi(\mathrm{G})$: 全域木の辺数

$$\xi(\mathrm{G}) = n - k$$

当然, $\gamma(\mathrm{G})$ と $\xi(\mathrm{G})$ の間には $\gamma(\mathrm{G})+\xi(\mathrm{G})=m$ の関係がある.

定理 9.3
T がグラフ G の全域林ならば

(i) G の全てのカットセットは T と共通な辺を持つ.
(ii) G の全ての閉路は T の補グラフと共通な辺を持つ.

(証明略)：教科書 p. 63 を読んでおくこと.

7.3 基本閉路集合と基本カットセット集合

木 T に関連した**基本閉路集合**：T に含まれない G の任意の辺を一つ T に付加すると, 閉路が一つできる. この操作によりできる閉路の集合を基本閉路集合と呼ぶ (その一例として図 94(左) 参照).

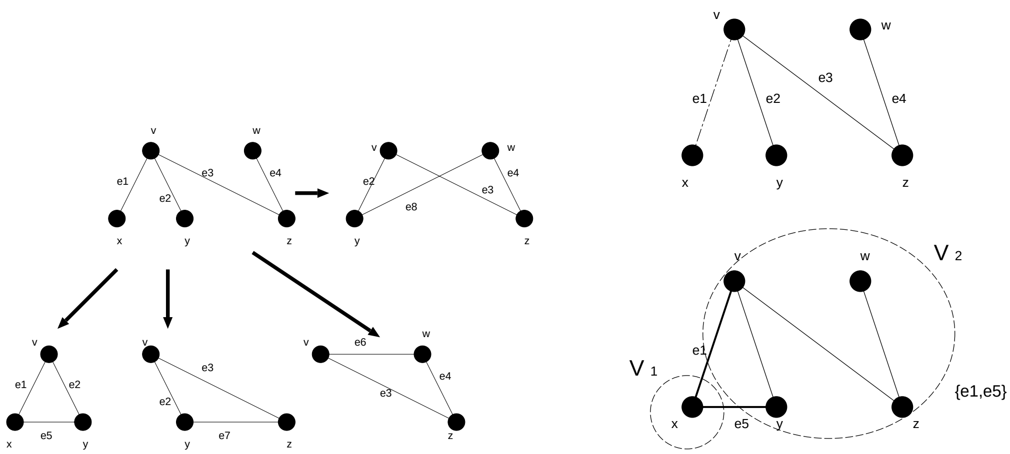

図 94: 基本閉路集合の一例 (左) と基本カットセット集合の一例 (右).

木 T に関連した**基本カットセット集合**：T の各辺を除去して得られるカットセット集合 (その一例を図 94(右) に載せる).

例題 7.1
G が連結グラフであるとき, G の**中心 (centre)** とは次のような点 v のことである：**v と G の他点の間の距離の最大値ができるだけ小さい**. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 端点を除去する操作を続けて行くことにより, 図 95 の木 T の中心を求めよ.
(2) どんな木でも中心は 1 つか 2 つであることを示せ.
(3) 木の中心が 2 つある場合, それらの 2 点は隣接していることを示せ.
(4) 7 点からなる木で, 中心が 1 つの木と, 2 つの木をそれぞれ一つずつ例示せよ.

(解答例)

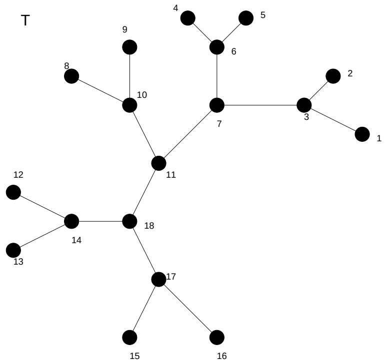

図 95: この木 T の中心を考える.

(1) 問題文中に与えられた木 T に対し,「端点を除去する操作」[1] を行うと, 1 回目に削除される端点グループは $\{1,2,4,5,8,9,12,13,15,16\}$ であり, 2 回目に削除される端点グループは $\{3,6,10,14,17\}$. そして, 最後に削除される端点グループは $\{7,18\}$ である. 従って, これら一連の操作により最後まで生き残る木 T の中心は 11 である.

(2) 仮に木の中心が 3 つあるとする. このとき, **定理 9.1** (iv) から, 木の全ての辺は橋になっていることから, 端点を除去していく操作により, 残る木としては図 96 の場合しかない. この場合に対して, さらに

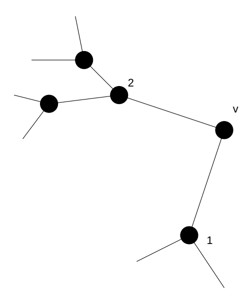

図 96: 端点を削除することによってできるグラフの一例.

次の 2 通りの可能性があり得る.

(I) 点 1 と点 2 に結合している成分の大きさが等しい場合
(II) 点 1 と点 2 に結合している成分の大きさが異なる場合

(I) の場合について考えると, 点 1 と点 2 と v に接続する 2 つの辺を除去することにより, 唯一の中心 v が得られる.
(II) の場合に関して, 点 2 に結合している成分の方が大きいとすると, 点 1 と点 v を結ぶ辺を除去することにより, (v, 2) という 2 つの中心が得られる.

[1] ここで言う「端点を除去する操作」とはもう少し正確に言うと, この解答に示したように「端点のグループを除去する操作」のことです.

従って, (I)(II) のいずれの場合にしても, 木の中心が 3 つあるという可能性はあり得ず, 必ず, 引き続く除去のプロセスにより, 1 つまたは 2 つの中心に行き着くことになる.

(3) もしも仮に, 木の中心が 2 つあり, それらが隣接していないとすると, その場合には**定理 9.1** (iv) により, 木の全ての辺は橋であり, 中心である点 1,2 は次数が 2 の点 v を介して結合しているはずである (図 97 参照). 従って, 点 1,2 とこの v との接続辺を除去すると中心が 1 つとなってしまい, 中心が 2 つあるという仮定に反する. よって, 木の中心が 2 つある場合には, それらは必ず隣接していると結論付けられる.

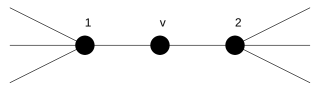

図 97: 木では全ての辺が橋である.

(4) 点が 7 つで, 中心が 1 つまたは 2 つのグラフの一例をそれぞれ図 98 に載せる.

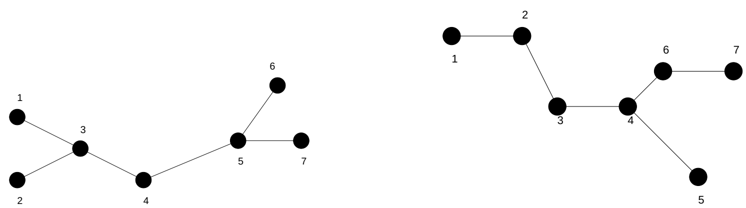

図 98: 7 点からなる木で中心が 1 つのもの (左) と中心が 2 つのものの一例.

例題 7.2

(1) 図 99 に示したグラフの全域木を全て描け.
(2) グラフ G の辺のある集合を C^* とする. どの全域林にも C^* と共通な辺があるならば, C^* にはカットセットが含まれることを例を挙げて示せ.

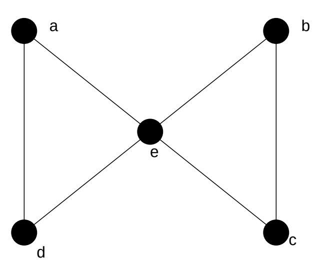

図 99: ここで全域木を考えるグラフ.

(解答例)

(1) 図 100 のように問題のグラフの各辺に番号をふると, 辺集合 I : $\{1, 2, 3\}$, 辺集合 II : $\{4, 5, 6\}$ のそれぞれから, 要素を 1 つずつ取り出し, その辺を削除すれば全域木が得られる. 従って, 考えうる全域木

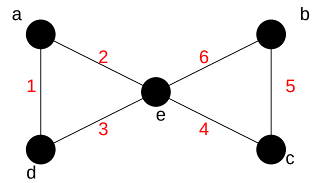

図 100: 問題のグラフの各辺に番号をふる.

の数は $3 \times 3 = 9$ 通りである．それぞれの全域木と削除する辺の組み合わせは A : (1,4), B : (1,5), C : (1,6), D : (2,4), E : (2,5), F : (2,6), G : (3,4), H : (3,5), I : (3,6) であり，それぞれを描くと図 101 のようになる．

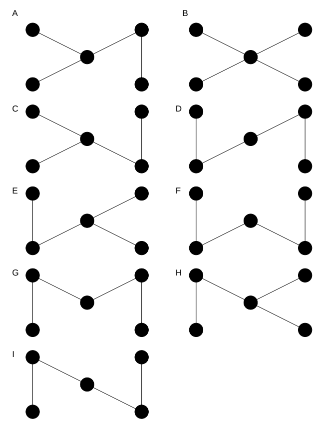

図 101: 可能な全域木.

(2) 例として図 102(左) のようなグラフを考える．このとき，辺 e はカットセットになっており (この場合

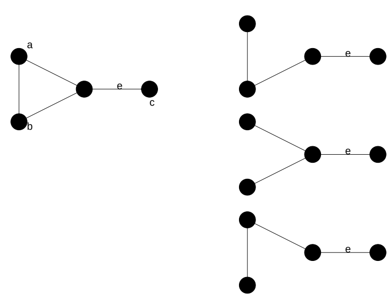

図 102: ここで考える連結グラフ G(左) とその全域木 (右).

は「橋」とも言える)，この辺を削除すると，連結グラフは点と三角形に分離する．そこで，このグラフの全域木を作るためには，三角形の各辺を 1 辺だけ削除すればよいので，可能な全域木は図 102(右) のようになり，辺 e は全ての全域木に共通に含まれることになる．従って，このグラフに関しては題意が満たされていることになる．

演習問題 6

T_1, T_2 は連結グラフ G の全域木であるとする. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) e が T_1 の任意の辺であるとき, T_1 の辺 e を辺 f で置き換えたグラフ $(T_1 - \{e\}) \cup \{f\}$ も全域木になるような, T_2 の辺 f が存在することを例を挙げて示せ.

(2) (1) での操作を繰り返すことにより, T_1 は T_2 に「変換」できることを例を挙げて示せ. ただし, T_1 の辺の一つを T_2 の辺で置き換える各段階において, 全域木になっているものとする.