グラフ理論 配布資料 $\#7$

担当：井上 純一 (情報科学研究科棟 8-13)
URL：http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

平成 18 年 5 月 22 日

目 次

演習問題 6 の解答例

(1) 図 104 に載せたグラフ G とその 2 つの全域木 T_1, T_2 を考えよう．ここで, 問題文に与えられている全

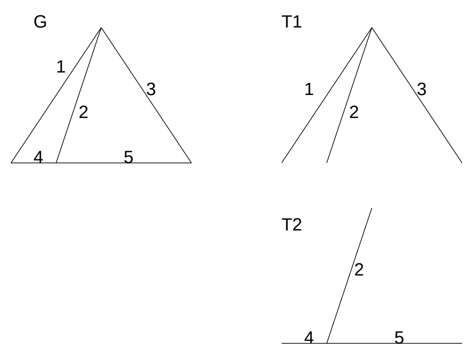

図 104: ここで考えるグラフ G とその全域木 T_1, T_2.

域木 T_1 の辺 e を 3 に, 全域木 T_2 の辺 f を 5 とすると (今後このような対応づけを $e=3, f=5$ と書くことにする), **全域木 T_1 から e を削除し, 代わりに全域木 T_2 の辺 f を加えたもの：(※以下では一連のこの作業を「操作」と呼ぶ)** はグラフ G の全域木となっている．従って

$$T_1 - \{e\} \cup \{f\} \quad \simeq \quad \text{グラフ } G \text{ の全域木}$$

が成立していることがわかる (この操作で得られる具体的な全域木は図 105 の t_1)．全域木の定義より, T_1, T_2 ともに辺 g を一つ加えるごとに閉路ができるが (このようにできるグラフ G の辺 $2,3,5$ からなる閉路を便宜上 $C=235$ と呼ぶことにする．また, 辺 g はこの全域木を作る際に削除された辺であることに注意), T_1 において削除された辺 $f=3$ が属するこの閉路 $C=235$ には辺 f とは異なる辺 $2,5(=g)$ があるため, 全域木 T_2 においてこの $g=5$ が存在すれば f が削除された木に T_2 からこの $g=5$ を e として付け加えることによって再びグラフ G の全域木ができる．全域木の作り方から明らかに, どの

ように T_2 を選ぼうが, その木には $2,3,5$ のうちのいずれか 2 つの辺が存在するわけだから, 常にこのような辺 e を選ぶことができる. これはここで調べたグラフ G に限らず, 任意のグラフ G およびその全域木に対して成立するのは明らか.

(2) 図 104 に与えられたグラフの全域木 T_1, T_2 に対して問題に与えられた操作を辺 $e=3, f=2$ について行った全域木を $t_1 = T_1 - \{e\} \cup \{f\}$ とし, この木 t_2 に対して操作を辺 $e=3, f=5$ について行った木を考えると

$$t_2 \;\; = \;\; t_1 - \{e\} \cup \{f\} \simeq T_2$$

となり, T_2 が得られる. これらの 2 回の操作過程を図示すると図 105 のようになる. また, 明らかにこ

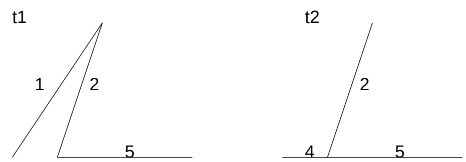

図 105: 全域木 T_1 から $e=3, f=5$ の操作でできる木 t_1 と t_1 から $e=1, f=4$ の操作によってできる t_2. 明らかに t_2 は T_2 と同形である. また, t_1, t_2 ともにグラフ G の全域木である.

の移行：$T_1 \to T_2$ の過程で得られる木 t_1 はグラフ G の全域木である.

7.4　木の数え上げ

点にラベルを付けた木を「ラベル付き木」と言うが, このように各点にラベルを付けて木を区別した場合, その総数はいくつあるか, ということが問題になる. その答えは **Cayley (ケイリー) の定理**としてまとめられており, 「n 個の点からなるラベル付き木の総数は n^{n-2} 個である」というように, とても簡単な形で表される. ここではこの定理 (公式) の証明を詳しく追い, 関連する系, 及び, いくつかの例題をとりあげ, その理解を深めて行くことにしよう.

定理 10.1 (Cayley の定理)
n 点の異なるラベル付の木は n^{n-2} 個ある.

この定理の構成論的な証明 (第 1 の証明) は教科書 pp. 67-68 を見て頂くことにして, ここでは第 2 の証明を詳しく追って行くことにする.

(証明)
まずは準備として

- $\deg(v) = k-1$ の点 v を含むラベル付きの木を A
- $\deg(v) = k$ の点 v を含むラベル付きのの木を B

と定義しておく.

ここで述べる証明のポイントは「『ラベル付き木 A からラベル付き木 B を作る**連鎖 (linkage)** の総数』と『逆にラベル付き木 B からラベル付き木 A を作る連鎖の総数』が等しい」という条件 (関係式) から可

能なラベル付き木の総数を求める, という点である.

それでは以下で連鎖：A → B, 及び, 連鎖：B → A なる操作をそれぞれ見て行くことにしょう. この際, n **個の点からなるラベル付き木のある点** v **の次数が** k **であるものの総数を** $T(n,k)$ で表しておくことにする.

連鎖：A → B

図 106 のように A を点 v に接続していない辺で分離し (図 106 の (a) → (b)), 点 v と点 z とを結ぶと (図 106 の (b) → (c)), $\deg(v) = k$ であるラベル付き木 B が得られる. さて, ラベル付き木 A の選び方は $T(n,k-1)$

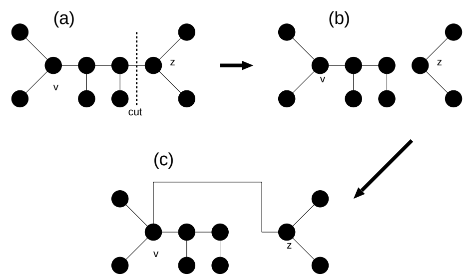

図 106: 連鎖：A → B.

通りあり, 1 つの A に対して, 切断する辺の選び方は

$$\begin{aligned}(\text{点 } v \text{ に接続していない辺の選び方}) &= (\text{木 A の辺の本数}) - (\text{点 } v \text{ の次数}) \\ &= (n-1)-(k-1) = n-k \quad (\text{通り})\end{aligned}$$

だけあるから, 連鎖：A → B の総数は

$$(\text{連鎖：A} \to \text{B の総数}) = T(n,k-1)(n-k)$$

となる. 次に連鎖：B → A を考える.

連鎖：B → A

図 107 のように, ラベル付き木 B から点 v, 及び, その接続辺を除去して得られる, 木 B の成分である一連の部分木を $(\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2, \cdots, \mathrm{T}_k)$ とする (図 107 の (a)). ここで各部分木に含まれる点の総数は n_i であり, 当然のことながら

$$n-1 \ (v \text{ 以外の点の数}) = \sum_{i=1}^{k} n_i$$

を満たしている. このとき, ラベル付き木 B から点 v, 及び, その接続辺の 1 本を除去し (この際にできる成分である部分木を T_i と名付ける)(図 107 の (a) → (b)), T_i 以外の部分木 T_j の任意の点 u と部分木 T_i 内の任意の点 w_i を辺で結ぶ (図 107 の (b) → (c)) と $\deg(v) = k-1$ のラベル付き木 A が得られる.

ここでラベル付き木 B の選び方は $T(n,k)$ 通りであり, 点 w_i と T_i 以外の部分木 T_j の任意の点を結ぶ方法は

$$(\text{点 } v \text{ を除く点の総数}) - (\text{部分木 } \mathrm{T}_i \text{ に属する点の総数}) = (n-1) - n_i \quad (\text{通り})$$

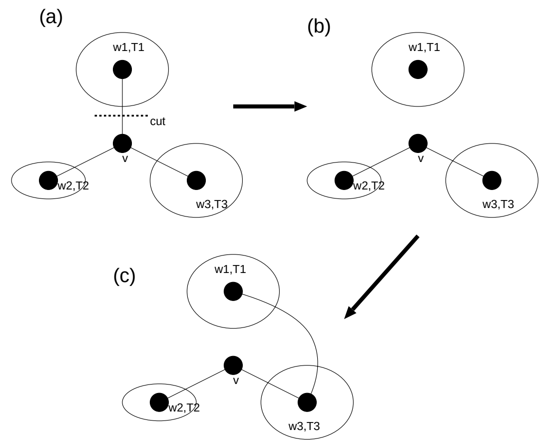

図 107: 連鎖：B → A.

だけあるから, 連鎖：B → A の総数は

$$
\begin{aligned}
T(n,k)\sum_{i=1}^{k}(n-1-n_i) &= T(n,k)\{(n-1-n_1)+(n-1-n_2)+\cdots+(n-1-n_k)\} \\
&= T(n,k)\{(n-1)k-(n_1+n_2+\cdots+n_k)\} = T(n,k)(n-1)(k-1)
\end{aligned}
$$

となる.

連鎖：A → B, B → A の総数を等しいと置くことにより, 関係式：

$$(n-k)T(n,k-1) = (n-1)(k-1)T(n,k)$$

が得られる.

ところで, $T(n,n-1)=1$ に注意して, 上関係式で $k=n-1,n-2,n-3,\cdots$ と書き出して行ってみると

$k=n-1$ のとき

$$T(n,n-2) = (n-1)(n-2)T(n,n-1) = (n-1)(n-2)$$

$k=n-2$ のとき

$$2T(n,n-3) = (n-1)(n-3)T(n,n-2) = (n-1)^2(n-2)(n-3)$$

つまり

$$T(n,n-3) = \frac{1}{2}(n-1)^2(n-2)(n-3)$$

$k=n-3$ のとき

$$3T(n,n-4) = (n-1)(n-4)T(n,n-3) = \frac{1}{2}(n-1)^3(n-2)(n-3)(n-4)$$

つまり

$$T(n,n-4) = \frac{1}{3\cdot 2\cdot 1}(n-1)^3(n-2)(n-3)(n-4)$$

が得られる．これを一般化すると, 二項定理より $k = k+1$ のとき

$$T(n,k) = \frac{(n-1)^{n-k+1}(n-2)}{(k-1)(k-2)\cdots} = {}_{n-2}C_{k-1}(n-1)^{n-k-1}$$

という結果が得られる．従って, 求めるラベル付き木の総数 $T(n)$ は上記の $T(n,k)$ に関し, $k=1$ から $k=n-1$ まで和をとることにより

$$\begin{aligned} T(n) &= \sum_{k=1}^{n-1} T(n,k) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} {}_{n-2}C_{k-1}(n-1)^{n-k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} {}_{n-2}C_{k-1}1^{k-1}(n-1)^{(n-2)-(k-1)} = \{(n-1)+1\}^{n-2} = n^{n-2} \end{aligned}$$

となり, Cayley の定理が証明された. **(証明終わり)**.

この定理に関する例題を一つ見ておく.

例題 7.3

n 点のラベル付き木の個数を $T(n)$ とする．このとき以下の問いに答えよ.

(1) k 点のラベル付き木と $n-k$ 点のラベル付き木の結び方の総数を計算することにより, 次の関係式を示せ.

$$2(n-1)T(n) = \sum_{k=1}^{n-1} {}_nC_k\, k(n-k)T(k)T(n-k)$$

(2) 次の関係式を示せ.

$$\sum_{k=1}^{n-1} {}_nC_k\, k^{k-1}(n-k)^{n-k-1} = 2(n-1)n^{n-2}$$

(答え)

(1) n 点からなる木の辺を一辺だけ切って, 2 つのグラフ A, B を作る方法は

$$2\times(n-1)\times T(n) = 2(n-1)T(n) \tag{41}$$

通り存在する．ここで, $T(n)$ は n 点からなる木の総数であり, 係数 $(n-1)$ はどの辺を切るかという自由度を, また, 係数 2 はグラフ A, B の交換による自由度を表している.

ところで, k 点のラベル付き木 A と $(n-k)$ 点のラベル付き木 B の結び方の総数は, k 点のラベル付き木の中から一点を選ぶ方法の $kT(k)$ 通りと $n-k$ 点のラベル付き木の中から一点を選ぶ方法の $(n-k)T(n-k)$ 通りを掛け合わせ, これに n 個の点から k $(k=1,2,\cdots,n-1)$ 個の点を選んで A, B を作る場合の数を掛け合わせただけの個数だけ存在するから

$$\sum_{k=1}^{n-1} {}_nC_k\, kT(k)(n-k)T(n-k) = \sum_{k=1}^{n-1} {}_nC_k\, k(n-k)T(k)T(n-k) \tag{42}$$

となる. (41)(42) は等しいので

$$2(n-1)T(n) = \sum_{k=1}^{n-1} {}_nC_k\, k(n-k)T(k)T(n-k) \tag{43}$$

が得られる.

(2) (43) 式において, Cayley の定理：$T(n) = n^{n-2}$ 等を用いると

$$2(n-1)n^{n-2} = \sum_{k=1}^{n-1} {}_nC_k\, k(n-k)k^{k-2}(n-k)^{n-k-2} = \sum_{k=1}^{n-1} {}_nC_k\, k^{k-1}(n-k)^{n-k-1} \tag{44}$$

が得られる.

この節の最後に Cayley の定理から導かれる系を一つあげておこう.

系 10.2
完全グラフ K_n の全域木の総数は n^{n-2} 個である.

(証明)
完全グラフ K_n から, 各点に接続している辺を適切に除去することにより, n 点のラベル付き木 (全域木) が得られ, 逆に, n 点のラベル付き木の各点に, 各点の次数が $n-1$ になるよう, 適切に辺を加えることにより完全グラフ K_n が得られる (例えば, 図 108 に K_5 の場合を載せた). 従って, n 点のラベル付き木は完全グラフ K_n の全域木に一意に対応し, よって, 完全グラフ K_n の全域木の総数は n^{n-2} である. **(証明終わり)**.

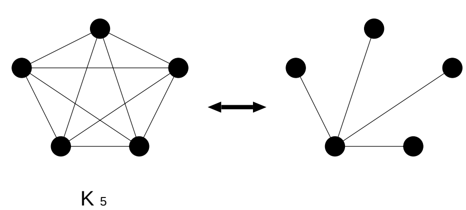

図 108: 完全グラフ K_5 とその全域木.

7.5　点行列と行列木定理

ここで学ぶ **行列木定理 (matrix-tree theorem)** は, 与えられたグラフ G のラベル付き全域木の個数を与える実用的な定理である.

具体的に定理とその応用例を見る前に, グラフ G の**点行列 (vertex matrix)** $\boldsymbol{D}$ を次のように定義する[1].

[1] この講義では個々のグラフのデータ構造を表現するための行列を既にいくつか取りあげてきたが, この点行列は 5 番目の行列である. 各自, これまでに学んだ「隣接行列」「接続行列」「タイセット行列」「カットセット行列」を復習しておくこと.

グラフ G の点行列 $\boldsymbol{D}$ とは, その要素 D_{ij} が

$$D_{ij} = \begin{cases} \text{点 } v_i \text{ の次数} & (i=j \text{ のとき}) \\ -(\text{点 } v_i \text{ と点 } v_j \text{ を結ぶ辺の本数}) & (i \neq j \text{ のとき}) \end{cases}$$

で与えられる行列である.

このとき, グラフ G の全域木の本数 $\tau(\mathrm{G})$ は行列 $\boldsymbol{D}$ の任意の余因子で与えられる. つまり, 行列 $\boldsymbol{D}$ の第 i 行, 第 j 列を削除して得られる行列を $\boldsymbol{D}(\bar{i},\bar{j})$ とすると

$$\tau(\mathrm{G}) = (-1)^{i+j}|\boldsymbol{D}(\bar{i},\bar{j})|$$

が全域木の本数を与える. ここで, $|\boldsymbol{X}|$ は行列 $\boldsymbol{X}$ の行列式を意味する.

なお, 実用的には行列 $\boldsymbol{D}$ のサイズが $N \times N$ ならば, $i=j=N$ と選ぶのが扱いやすく, このとき

$$\tau(\mathrm{G}) = |\boldsymbol{D}(\overline{N},\overline{N})|$$

が全域木の総数となる. 以上の内容を**行列木定理**と呼ぶ.

この定理の使い方を具体的に見るために, 次のような例題を考えてみよう.

例題 7.4

隣接行列 $\boldsymbol{A}$ が

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

で与えられるグラフ G の全域木の総数 $\tau(\mathrm{G})$ を求めよ. また, その全域木を全て図示せよ.

(答え)

隣接行列 $\boldsymbol{A}$ を持つグラフ G を図示してみると図 109(左) となる. このグラフ G の点行列 $\boldsymbol{D}$ は, その定義

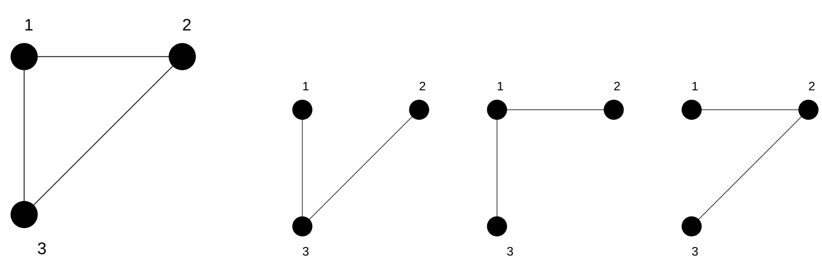

図 109: 隣接行列 で与えられるグラフ G(左) とその 3 つの全域木 (右).

から

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

であり, その $i=j=3$ での余因子が, このグラフ G の全域木の総数 $\tau(\mathrm{G})$ を与え

$$\tau(\mathrm{G}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4-1=3 \text{ (個)}$$

となる. この 3 つの全域木を描くと図 109(右) のようになる.

例題 7.5

1. 今回の講義で学んだ Cayley の定理の証明を参考にして, 下記の問いに答えよ.
(1) n 個の点からなる木で, 与えられた点 v が端点になっているものは何個あるか？
(2) n 個の点からなる木の与えられた点 v が端点となっている確率 $P(n)$ を求めよ. また, 点の数 n が無限大のときの $P(n)$ の極限値が

$$\lim_{n\to\infty} P(n) = \frac{1}{\mathrm{e}}$$

で与えられることを示せ. ただし, e は自然対数の底である.

2. 隣接行列 $\boldsymbol{A}$ が

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

で与えられるグラフ G に関する行列木定理について以下の問いに答えよ.
(1) グラフ G の点行列 $\boldsymbol{D}$ を求めよ.
(2) 行列木定理により, グラフ G の全域木の総数 $\tau(\mathrm{G})$ を求めよ.
(3) (2) で得られた個数だけ存在する全域木を具体的に全て図示せよ.

(答え)

1(1) 今回の講義で学習した Cayley の定理の証明の過程で得られた関係式：

$$T(n,k) = {}_{n-2}C_{k-1}\,(n-1)^{n-k-1} \tag{45}$$

に注目する. これは, n 点からなる木における, ある点 v の次数が k であるものの個数を与えるわけであるから, 問題となっている「与えられた点 v が端点である木の個数」は上関係式で $k=1$ と置いたものに等しい. 従って, 求める木の個数は

$$T(n,1) = {}_{n-2}C_0\,(n-1)^{n-2} = (n-1)^{n-2} \tag{46}$$

である.

(2) 求める確率 $P(n)$ は n 個の点からなるラベル付き木の個数 n^{n-2} で上の結果である $T(n,1)$ を割ったものに相当するので

$$P(n) = \frac{T(n,1)}{n^{n-2}} = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-2} \tag{47}$$

が求める答えである.

(3) 自然対数 e の定義から

$$\lim_{n\to\infty} P(n) = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-2} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} = \frac{1}{\mathrm{e}} \tag{48}$$

となり, 題意が示された.

(参考)

$P(n)$ の極限値：

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} = \frac{1}{e} \tag{49}$$

の示し方として, 例えば $P(n)$ の対数をとったものの極限値：

$$\lim_{n\to\infty}\log\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty} n\log\left(1-\frac{1}{n}\right) \tag{50}$$

を考えることによって「間接的」に (49) を示すこともできます. (50) の極限値はこのままでは

$$\lim_{n\to\infty} n = \infty, \quad \lim_{n\to\infty}\log\left(1-\frac{1}{n}\right) = 0 \tag{51}$$

なので, $\infty \times 0$ を評価することになって厄介なのですが, $\log(1-1/n)$ を $(1/n)$ で展開すれば

$$\log\left(1-\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right) \tag{52}$$

となりますから,

$$n\log\left(1-\frac{1}{n}\right) = -1 - \frac{1}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{53}$$

であり, 極限値 (50) は簡単に

$$\lim_{n\to\infty}\log\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} = -1 \tag{54}$$

のように求めることができます. 従って, $n\to\infty$ のときに上式の log の中身が $1/e$ に近づくべきことは明らかであり, これで極限値 (49) が示せたことになります.

2. 隣接行列 $\boldsymbol{A}$ により与えられるグラフ G は図 110 のようになる. 従って, 求める点行列 $\boldsymbol{D}$ は

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \tag{55}$$

である.

$i=j=4$ で余因子展開することにより, グラフ G の全域木の個数 $\tau(\mathrm{G})$ は

$$\tau(\mathrm{G}) = (-1)^{4+4}\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -2+3\cdot 3 = 7\ (\text{個}) \tag{56}$$

となる.

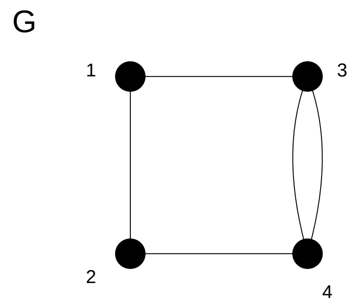

図 110: 隣接行列　によって定義されるグラフ G.

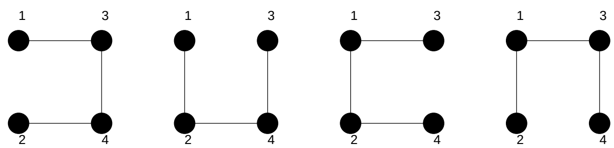

図 111: 隣接行列　によって定義されるグラフ G の全域木. ただし, 辺 3 → 4 を削除するか, 辺 4 → 3 を削除するかにより, これら 4 つのグラフの中で辺 34 があるグラフにはそれぞれ 1 つずつ異なるグラフが存在するので, 計 7 つの全域木が得られる.

(3) グラフ G の 7 通りの全域木を図示すると図 111 になる.

(注 1)
隣接行列 $\boldsymbol{A}$ と点行列 $\boldsymbol{D}$ の間には, 次に定義する行列 $\boldsymbol{\delta}$ を介して一般的な関係が存在する.
行列 $\boldsymbol{\delta}$ はその要素 δ_{ij} が

$$\delta_{ij} = \begin{cases} \deg(v_i) & (i = j \text{ のとき}) \\ 0 & (i \neq j \text{ のとき}) \end{cases} \tag{57}$$

で定義される行列であり, この行列と, 隣接行列 $\boldsymbol{A}$, 点行列 $\boldsymbol{D}$ の間には

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{\delta} - \boldsymbol{A} \tag{58}$$

なる関係がある. 各自がこの演習問題で扱ったグラフ G において, この関係式が成り立っていることを確認しておくこと.

(注 2)
ここで取り上げた点行列の行列式を計算することにより, ラベル付き全域木の数を数え上げる方法を**点行列式法**と名付けるとすれば, この全域木の個数を勘定する方法としては, もう一つ, **閉路行列式法**と呼ばれる方法がある. ここでは, この方法に関していくつかコメントしておこう.
まず, 行列要素 R_{ij} が次のように与えられる**閉路行列** $\boldsymbol{R}$ を導入する[2].

$$R_{ij} = \begin{cases} \text{閉路 } c_i \text{ を構成する辺の数} & (i = j) \\ \pm\ (\text{閉路 } c_i \text{ と } c_j \text{ に共通な辺の本数}) & (i \neq j) \end{cases} \tag{59}$$

ここで非対角成分の符号は c_i と c_j の共通な辺上で, これら 2 つの閉路の向きが同じであればプラスを, 逆であればマイナスを選ぶことに約束する.
すると, この閉路行列 $\boldsymbol{R}$ を有するグラフ G に関する全域木の総数 $\tau(\mathrm{G})$ は

$$\tau(\mathrm{G}) = |\boldsymbol{R}| \tag{60}$$

[2] この講義に出てきたものとしては 6 番目のグラフ行列.

つまり, 行列 $\boldsymbol{R}$ の行列式で与えられる. この方法の有効性を確認するために, **例題 7.5** 2 の隣接行列で与えられたグラフ (図 110 のグラフ G) に対して, この方法を適用してみよう.
まず, このグラフ G には閉路 c_1, c_2 が存在し, それぞれは点の順序でその向きを指定すれば, $c_1 = 12431, c_2 = 343$ となる. 従って, このグラフ G の閉路行列 $\boldsymbol{R}$ は

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{61}$$

である. よって, このグラフ G に対する全域木の総数 $\tau(\mathrm{G})$ は

$$\tau(\mathrm{G}) = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7 \tag{62}$$

となり, 点行列式法による結果, つまり, **例題 7.5** 2.(2) の答えと一致する.
ところで, あるグラフ G が与えられたとき, その全域木の総数を勘定する必要が生じた際, 上述の点行列式法と閉路行列式法のどちらを使ったらよいのであろうか？ この疑問に対する一般的な答えは**グラフ G に含まれる点の数が閉路の数よりも少ない場合には点行列式法を用い, その逆の場合には閉路行列式法を用いるのがよい**ということである.
上記指針の正しさを確認するため, 閉路行列式法の点行列法に対する「優位性」が際立ってわかるような例を取りあげ, そのグラフに両方法を適用してみることにしょう.
図 112 に示したグラフ G に対して, まずは閉路行列式を適用してみると, この平面グラフの閉路はいずれも三角形であり, $c_1 = 1451, c_2 = 3453, c_3 = 1231$ である. 従って, このグラフの閉路行列 $\boldsymbol{R}$ は

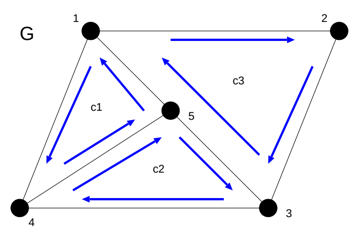

図 112: ここで点行列式法と閉路行列式法との計算手数を比較するために用いるグラフ G.

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \tag{63}$$

となる. この行列式は直ちに計算できて, グラフ G の全域木の個数は

$$\tau(\mathrm{G}) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \times 8 = 24 \tag{64}$$

と求まる.
一方で点行列式法を使うとなると, 点行列を求めなければならないが, このグラフは 5 点からなるグラフなので, 点行列 $\boldsymbol{D}$ のサイズは 5×5 であり, 具体的に次のように与えられる.

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \tag{65}$$

従って, この行列 $\boldsymbol{D}$ の 5 行 5 列における余因子によってグラフ G の全域木の本数が与えられて

$$\tau(\mathrm{G}) = (-1)^{5+5}\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} \qquad (66)$$

となる. しかし, 計算の手数から言うと, ここから所望の個数を求めるためには余因子展開法等を使って行列式を計算しなければならない. ここでは実際に展開を実行し, 行列式のサイズを段階的に落としていってみると

$$\begin{aligned}\tau(\mathrm{G}) &= 3\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 3\left\{2\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}\right\} + \left\{(-1)\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}\right\} \\ &+ \left\{(-1)\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}\right\} = 3\{2\times 8-3\}+\{-8-1\}+\{-1-5\} = 24\end{aligned} \qquad (67)$$

となり, 確かに閉路行列式法による結果と一致する. しかし, 計算の手間は閉路行列式法の方が少ないことがわかるであろう.

例題 7.6

行列木定理を用いて Cayley の定理を証明せよ.

(答え)

この行列木定理を用いた証明では, 後に述べるように完全グラフ K_n の点行列の行列式を求めることが必要となるので, まずは準備として次のような $m\times m$ の対称行列の行列式を求める公式を作っておくことにする.

$$b_m \equiv \begin{vmatrix} a & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & a & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & a & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -(a+1) & a & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & -1 & a & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -1 & -1 & \cdots & a \end{vmatrix} = (a+1)\,b_{m-1} + (a+1)\,c_{m-1} \qquad (68)$$

ただし, 下付きの添え字はその行列式のサイズを表し, c_{m-1} は次のような漸化式で定義される行列式である.

$$c_{m-1} \equiv \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & a & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & a & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -(a+1) & a & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & -1 & a & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -1 & -1 & \cdots & a \end{vmatrix} = (1+a)\,c_{m-2} \qquad (69)$$

従って, b_m を求めるためには b_m, c_{m-1} に関する次の連立漸化式を解けばよい.

$$\left\{\begin{aligned} b_m &= (a+1)\,b_{m-1} + (a+1)\,c_{m-1} \\ c_{m-1} &= (a+1)\,c_{m-2} \end{aligned}\right. \qquad (70)$$

c_{m-1} に関する漸化式は直ちに解けて, $c_{m-1} = (a+1)^{m-2} c_1$ が得られるので, これを b_m に関する漸化式に代入すれば, 求めるべき b_m は簡単に

$$b_m = (a+1)^{m-1} b_1 + (m-1)(a+1)^{m-1} c_1 \tag{71}$$

のように定まる. 完全グラフの全域木の総数はこの公式 (71) で求めることができる. 例として完全グラフ $\mathsf{K}_5, \mathsf{K}_6$ の点行列はそれぞれ

$$\boldsymbol{D}_{\mathsf{K}_5} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{D}_{\mathsf{K}_6} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 5 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \tag{72}$$

と書くことができる. 従って, 一般に完全グラフ K_n の全域木の総数は, 前に求めた公式 (71) で

$$m = n-1, a = n-1, b_1 = a, c_1 = -1 \tag{73}$$

と置けばよいので, これらの値を代入すれば直ちに

$$\tau(\mathsf{K}_n) = b_{n-1} = n^{n-2} \tag{74}$$

が求める全域木の総数であることがわかる. 完全グラフ K_n の全域木と n 点からなるラベル付き木は 1 対 1 に対応するので, 以上により, ケイリーの定理を行列木定理を用いて証明することができた.

演習問題 7

完全グラフ K_n から任意の 1 辺 e を削除することで得られるグラフ $K_n - e$ の全域木の総数 $\tau(K_n - e)$ は

$$\tau(K_n - e) = (n-2)n^{n-3}$$

で与えられることを示せ.

[**ヒント**] 完全グラフから任意の 1 辺を除去したグラフの点行列を求めて行列木定理を用いる. このとき求める行列式は**例題 7.6** の b_m, c_m を用いて書けることに注意する. ただし, この証明法は現時点で担当者 (井上) が **(解答例)** として想定している「泥臭い」やり方に過ぎないので, もちろん, これとは別の「エレガント」な解法があればそれで証明しても (なお) 良い.