



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	2006年度 グラフ理論講義ノート
Author(s)	井上, 純一; Inoue, Jun-ichi
Description	http://www005.upp.so-net.ne.jp/j_inoue/index.html http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/
Issue Date	2006
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/15412
Rights(URL)	https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/
Type	learning object
File Information	GraphTheory06_8.pdf, 第8回講義ノート



グラフ理論 配布資料 #8

担当：井上 純一 (情報科学研究科棟 8-13)

URL : http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

平成 18 年 5 月 29 日

目次

8 平面性	90
8.1 平面グラフとオイラーの公式	90
8.2 交差数と厚さ	95

演習問題 7 の解答例

例えば, 図 113 に与えたように完全グラフ K_5 の辺が 1 本削除されたグラフの全域木の総数を求めたい. 例えば, 図 113 のグラフの場合の点行列は

$$D_{K_5-e} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad (75)$$

となる (この場合には辺 $\overline{12}$ を除去したが, どの 1 辺を選ぼうが, 完全グラフの対称性より結果は同じになることに注意). 従って, これを一般の完全グラフに拡張すれば

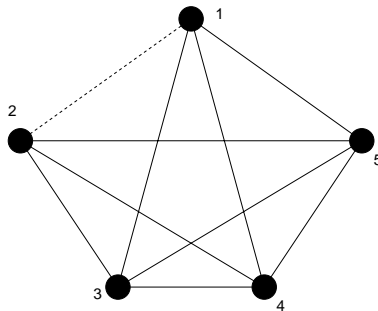


図 113: $K_5 - e$ の一例. 破線が削除した辺 e に該当する.

$$D_{K_n-e} = \begin{pmatrix} a-1 & 0 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & a-1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \\ -1 & -1 & a & -1 & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -1 & \cdots & \cdots & \cdots & a \end{pmatrix} \tag{76}$$

と書ける. 従って, この点行列の行列式を求めることができれば, それが求める全域木の総数になっている. 前回の例題 7.6 で見た余因子展開と同様の手続きを行うと

$$\begin{aligned} \tau(K_n - e) &= (-1)^{N+N} |D_{K_n-e}(N-1, N-1)| \\ &= \begin{vmatrix} a-1 & 0 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & a-1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & -1 & a & -1 & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & \cdots & \cdots & -1 & a \end{vmatrix}_{m \times m} = \begin{vmatrix} a-1 & 0 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -(a-1) & a-1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & -1 & a & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -1 \\ 0 & -1 & \cdots & \cdots & -1 & a \end{vmatrix}_{m \times m} \\ &= (a-1) \begin{vmatrix} a-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & -1 & a & -1 & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & \cdots & \cdots & -1 & a \end{vmatrix}_{(m-1) \times (m-1)} \\ &+ (a-1) \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 & \cdots & -1 & 1 \\ -1 & -1 & a & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & \cdots & \cdots & -1 & a \end{vmatrix}_{(m-1) \times (m-1)} \\ &= (a-1) \begin{vmatrix} a & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -(a+1) & a & -1 & \cdots & -1 & 1 \\ 0 & -1 & a & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & -1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -1 & \cdots & \cdots & \cdots & -1 \\ 0 & -1 & \cdots & \cdots & -1 & a \end{vmatrix}_{(m-1) \times (m-1)} \\ &+ (a-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -(a+1) & a & -1 & \cdots & -1 & 1 \\ 0 & -1 & a & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & -1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -1 & \cdots & \cdots & \cdots & -1 \\ 0 & -1 & \cdots & \cdots & -1 & a \end{vmatrix}_{(m-1) \times (m-1)} \\ &= (a-1)\{ab_{m-2} + (a+1)c_{m-2}\} + (a-1)\{b_{m-2} + (a+1)c_{m-2}\} \\ &= (a-1)(a+1)(b_{m-2} + 2c_{m-2}) \end{aligned} \tag{77}$$

が得られる. ここで, 行列式 b_m, c_m は例題 7.6 で用いた行列式であり, 次の連立漸化式を満たし

$$\begin{cases} b_m &= (a+1)b_{m-1} + (a+1)c_{m-1} \\ c_{m-1} &= (a+1)c_{m-2} \end{cases} \quad (78)$$

これらの解は次式で与えられたことを思い出そう.

$$\begin{cases} c_{m-1} &= (a+1)^{m-2}c_1 \\ b_m &= (a+1)^{m-1}b_1 + (m-1)(a+1)^{m-1}c_1 \end{cases} \quad (79)$$

初期条件 :

$$m = n - 1, a = n - 1, b_1 = a, c_1 = -1 \quad (80)$$

に注意して, b_{m-2}, c_{m-2} を (77) 式に代入すれば直ちに

$$\begin{aligned} \tau(K_n - e) &= n(n-2)\{(a+1)^{m-3}b_1 + (m-3)(a+1)^{m-3}c_1 + 2(a+1)^{m-3}c_1\} \\ &= n(n-2)(a+1)^{m-3}\{b_1 + c_1(m-1)\} = n(n-2)n^{n-4} = (n-2)n^{n-3} \end{aligned} \quad (81)$$

が求める全域木の総数であることがわかる. 従って題意が示された.

8 平面性

ここではグラフの平面性, つまり, 一般のグラフが平面内にどの辺も交差することなく描くことのできる条件について学ぶ. また, そのようにして描けるグラフ — 平面グラフ — の性質, 及び, 与えられたグラフの「平面への描きやすさ」を測る指標である「交差数」「厚さ」についても詳しく見て行くことにする. なお, 講義では教科書での説明順番を換え, まずオイラーの公式とその使い方 (pp. 90~97) を説明する. 平面描画可能性の構成論的証明法, 及び, Kuratowski (クラトウスキー) の定理とその系 (pp. 83~88) に関しては, トポロジー (位相幾何学) に関するかなりの素養と長い議論が必要となるため, 本講義では省略する. また, 「§14 他の種類の曲面上のグラフ」も講義では解説を省略するので, この部分に関しては各自が教科書を読んでおくように.

8.1 平面グラフとオイラーの公式

平面グラフ (planar graph) : どの 2 つの辺も, それが接続する点以外では幾何学的に交差しないように描かれたグラフ (図 114 参照).

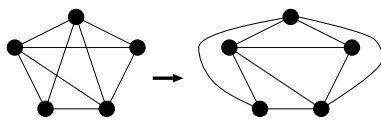


図 114: 平面グラフの例. 両者は位相同形であるが, 右のような描画において平面グラフとわかる.

面 (face) : 辺によって分割される領域

図 115 において, 非有界な面 f_4 は無限面 (infinite face) と呼ばれる.

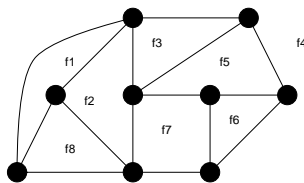


図 115: 8つの領域に分割された平面グラフ. これら領域の中で, f_4 は無限面である.

与えられたグラフ G を点数 n , 辺数 m , 面数 f で特徴付けることにすると, これらの量の間にはいかなる関係があるとき, グラフ G は平面へ埋め込み可能であり, 平面グラフとなりうるであろうか? この答えはオイラーによって次の定理 (公式) としてまとめられている.

定理 13.1 (オイラーの公式)

グラフ G を連結な平面グラフとすると, 次の公式が成り立つ.

$$n - m + f = 2 \tag{82}$$

(証明)

辺数 m に関する数学的帰納法で証明する.

$m = 0$ のとき, 点数が1つだけの素グラフであるから $n = 1$ であり, 面は無有限面が1つ, つまり, $f = 1$ である. 従って

$$n - m + f = 1 - 0 + 1 = 2$$

となり, 関係式が成立する.

従って, 以下では $m \neq 0$ のときを考える. このとき帰納法の仮定として

「 $m - 1$ 本以下の辺を持つ全てのグラフ G について (82) が成り立つ」

としてみよう. この仮定のもとで, 辺数 m のグラフに対しても関係式 (82) の成立が示せれば証明は終了である.

グラフ G が木の場合には, m 本の辺を持つとすると, 当然のことながら $m = n - 1$, $f = 1$ (無限面) であるから, 関係式 (82) は

$$n - m + f = n - (n - 1) + 1 = 2$$

となり, 辺数 m に対して成立する.

一方, グラフ G が木ではない場合. グラフ G の任意の辺を削除した場合, 辺数, 点数, 面数はそれぞれどのように変わるか, 調べると (例えば, 図 116 を参照)

$$\begin{cases} n & \Rightarrow & n \\ m & \Rightarrow & m - 1 \\ f & \Rightarrow & f - 1 \end{cases}$$

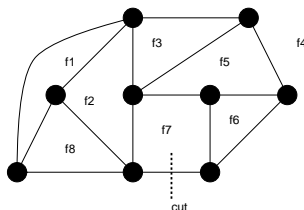


図 116: グラフの任意の辺を削除した場合の辺, 点, 面の数の変化量を考える. このグラフに関して言えば, 削除前: $n = 9, m = 15, f = 8$ であり, $9 - 15 + 8 = 2$ としてオイラーの公式を満たし, 削除後: $n = 9, m = 14, f = 7$ であり, $9 - 14 + 7 = 2$ としてオイラーの公式は満たされる.

のように変化するから, $m - 1$ 本の辺に対して (82) が成立, すなわち, 上の矢印の右側の量に対して (82) が成り立つわけであるから

$$n - (m - 1) + f - 1 = 2$$

が成立すべきであり, この式を変形すると

$$n - m + f = 2$$

となり, 変数 m のときの関係式が導かれ, この成立が言えたことになる. (証明終わり).

まずはこの公式に慣れるため, 次に挙げる例題を考えてみよう.

例題 8.1

オイラーの公式を用いて, 次のグラフが平面的であるかどうか判別せよ.

- (1) 完全グラフ K_4
- (2) 完全グラフ K_5
- (3) 完全二部グラフ $K_{3,3}$

(解答例)

このオイラーの公式をダイレクトに用いずに, 使いやすいように書き換えることから始めよう.

オイラーの公式の中には面数 f が入ってくるが, この f は考えるグラフ G に同形であるグラフの中で, どのグラフを採用するかによって曖昧性がある. つまり, 面の数は同形写像により変化する. 一方, 点, 辺の数は不変である. 従って, できることならば, この面数を他の量で置き換えて評価したい. この目的のために, まず, グラフ G に関していくつかの定義をしておく.

内周 κ : グラフ G の最短の閉路長.

$d(F)$: グラフ G における面 F に含まれる点の次数和.

これらの定義のもとで, グラフ G の任意面 F に対して, 次の不等式が成り立つ.

$$\kappa \leq d(F) \tag{83}$$

例えば, 完全グラフ K_4 の描画としては図 117 に載せた 2 通りのどちらも正しいが (もちろん, 平面的なのは右側), 内周 κ はどちらも $\kappa = 3$ である. 従って, 直ちに

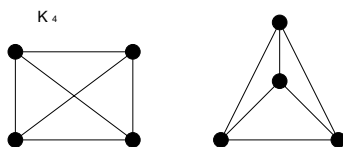


図 117: 完全グラフ K_4 の二つの描画法.

$$\kappa f \leq \sum_{F \in \mathbf{F}(G)} d(F) = 2m \tag{84}$$

が成立する. ここで, $\mathbf{F}(G)$ はグラフ G に含まれる面の集合であり, 上の関係式の最後の等式では前出の握手補題を用いた. この式とオイラーの公式から面数 f を消去すると

$$\kappa(2 - n + m) \leq 2m \tag{85}$$

つまり, グラフ G が平面的となるためには, 辺数 m が上から押さえられて (辺数が多くなると, 辺と辺が交差する可能性も大きくなるので, 平面グラフの辺数に上限があるのは自然である)

$$m \leq \frac{\kappa(n - 2)}{\kappa - 2} \tag{86}$$

なる不等式を満たさなければならない. 以下ではこの不等式をもって, 与えられたグラフに関する平面性の判別式としよう.

(1) 完全グラフ K_4 :

このグラフにおいて, $n = 4, m = {}_4C_2 = 6, \kappa = 3$ であるから, 判別式 (85) は

$$6 \leq \frac{3 \cdot (4 - 2)}{3 - 2} = 6 \tag{87}$$

となり成立する. 従って, 完全グラフ K_4 は平面的である.

(2) 完全グラフ K_5 :

このグラフにおいては, $n = 5, m = {}_5C_2 = 10, \kappa = 3$ であるから, 判別式 (85) は

$$10 \leq \frac{3 \cdot (5 - 2)}{3 - 2} = 9 \tag{88}$$

となり, 不成立. 従って, 完全グラフ K_5 は平面的ではない.

(3) 完全二部グラフ $K_{3,3}$:

このグラフに関しては, $n = 6, m = 3^2 = 9, \kappa = 4$ であるから, 判別式 (85) は

$$9 \leq \frac{4 \cdot (6 - 2)}{4 - 2} = 8 \tag{89}$$

となり, 不成立. 従って, 完全二部グラフ $K_{3,3}$ は平面的ではない.

以上はグラフ G が連結グラフである場合の議論であった。しかし、グラフ G が非連結であり、 k 個の成分を持つ場合、オイラーの公式がどのように修正されるのかを見ることは実用的にも意義深い。

系 13.3

平面グラフ G には、 n 個の点、 m 本の辺、 f 個の面、 k 個の成分があるとする。このとき

$$n - m + f = k + 1 \quad (90)$$

である。

(証明)

グラフ G に k 個の成分がある場合には、無限面を $k - 1$ 回だけ余分に勘定するので、面数は $f - (k - 1)$ であり、これについてオイラーの公式を書き出してみると

$$n - m + \{f - (k - 1)\} = 2 \quad (91)$$

となり、これを整理すると

$$n - m + f = k + 1 \quad (92)$$

となり、所望の関係式が得られる。(証明終わり)。

系 13.4

(1) 連結単純平面グラフ G が、 $n (\geq 3)$ 個の点と m 本の辺を持つとき

$$m \leq 3n - 6 \quad (93)$$

が成り立つ。

(2) さらに、 G に三角形が無ければ

$$m \leq 2n - 4 \quad (94)$$

が成立する。

(証明)

(1) グラフ G に含まれる最小な面は、3 点からなる閉路、すなわち、三角形であるから

$$3 \leq d(F) \quad (95)$$

が成り立つ。従って、握手補題により直ちに

$$3f \leq \sum_{F \in \mathbf{F}(G)} d(F) = 2m \quad (96)$$

となり、これとオイラーの公式： $f = 2 - n + m$ より、面数 f を消去すると所望の不等式：

$$m \leq 3n - 6 \quad (97)$$

が得られる.

(2) 明らかに三角形が無い場合には, G に含まれる最小の面は 4 点からなる閉路であり, 不等式

$$4 \leq d(F) \quad (98)$$

が成り立つ. 従って, 握手補題から直ちに

$$4f \leq \sum_{F \in \mathcal{F}(G)} d(F) = 2m \quad (99)$$

が得られ, これとオイラーの公式から面数 f を消去することにより, 所望の不等式

$$m \leq 2n - 4 \quad (100)$$

が得られる.

(証明終わり).

系 13.6

全ての単純平面グラフには次数 5 以下の点がある.

(証明)

グラフ G の任意の頂点 v に対して

$$\delta \leq \deg(v) \quad (101)$$

とすると, 握手補題と系 13.4(1) より

$$\delta n \leq \sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2m \leq 2(3n - 6) = 6n - 12 \quad (102)$$

すなわち

$$\delta \leq 6 - \frac{12}{n} \quad (103)$$

が成り立ち, 従って, 次数 δ に対して

$$\delta \leq 5 \quad (104)$$

が成立する. (証明終わり)¹.

8.2 交差数と厚さ

グラフを 2 次元平面内に埋め込む場合, そのグラフがオイラーの公式より埋め込み不可能であるとわかったとしても, どの程度, 埋め込むことが困難であるのか, を定量的に測る指標が必要となる. そこで, ここでは交差数と厚さという 2 つの指標について説明する.

交差数 (crossing number) $cr(G)$: グラフ G を平面描写した際に生じる, 辺の最小交差の数.

厚さ (thickness) $t(G)$: いくつかの平面グラフを重ね合わせてグラフ G を作る時に必要な平面グラフの数.

¹ この系での結論は後に学ぶ「グラフの彩色」の節の定理 17.2 の証明で用いることになります.

例題 8.2

r と s が偶数のとき

$$cr(K_{r,s}) \leq \frac{1}{16} rs(r-2)(s-2)$$

を示せ.

(解答例)

図 118(左) のように黒, 白丸を配置し, 黒丸と白丸を結んでできる線分の交差点を勘定すればよい. このよ

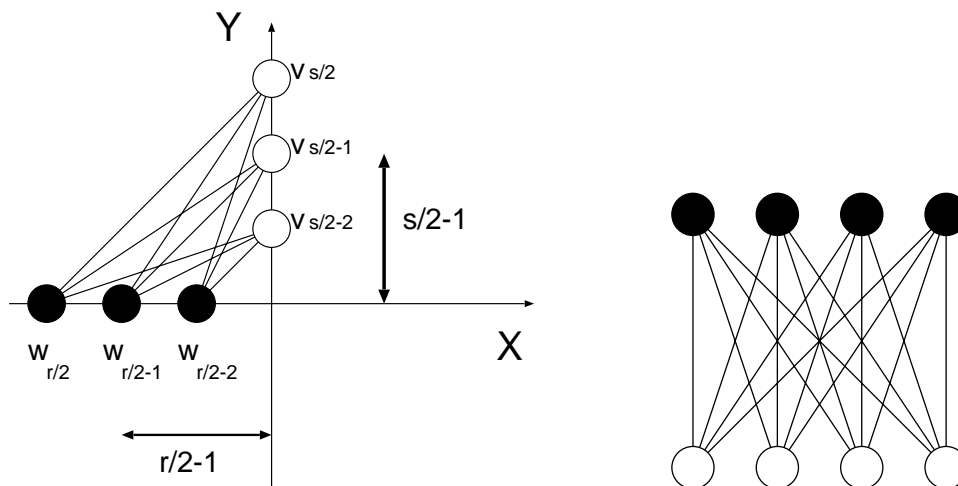


図 118: 線分の交点の個数を数える (左). 右図は $r = s = 4$ の場合の配置の一例.

うな配置の仕方による交差数は明らかに図 115(右) のような場合よりも少ない.

さて, 対称性より, 図 118(左) の第 3 象限だけを考えればよい. Y 軸上の点を原点から近い順に $v_1, v_2, \dots, v_{s/2}$ とし, X 軸上の点を原点から近い順に $w_1, w_2, \dots, w_{r/2}$ と名前を付けることにする. すると, $v_{s/2}$ と $w_1, w_2, \dots, w_{r/2}$ を結ぶ線分と, $v_{s/2-1}$ と $w_1, w_2, \dots, w_{r/2}$ を結ぶ線分の交点の数 q_1 は

$$q_1 = \left(\frac{r}{2} - 1\right) + \left(\frac{r}{2} - 2\right) + \dots + \left(\frac{r}{2} - \left(\frac{r}{2} - 2\right)\right) + 1 \tag{105}$$

である. 同様にして $v_{s/2}$ と $w_1, w_2, \dots, w_{r/2}$ を結ぶ線分及び $v_{s/2-1}$ と $w_1, w_2, \dots, w_{r/2}$ を結ぶ線分と $v_{s/2-2}$ と $w_1, w_2, \dots, w_{r/2}$ とを結ぶ線分の交点の数 q_2 は

$$q_2 = 2\left(\frac{r}{2} - 1\right) + 2\left(\frac{r}{2} - 2\right) + \dots + 2\left(\frac{r}{2} - \left(\frac{r}{2} - 2\right)\right) + 2 \tag{106}$$

となる. 同様の定義で q_3 は

$$q_3 = 3\left(\frac{r}{2} - 1\right) + 3\left(\frac{r}{2} - 2\right) + \dots + 3\left(\frac{r}{2} - \left(\frac{r}{2} - 2\right)\right) + 3 \tag{107}$$

となり, v_1 と全ての線分の交点の個数 $q_{s/2-1}$ は

$$q_{s/2-1} = \left(\frac{s}{2} - 1\right)\left(\frac{r}{2} - 1\right) + \left(\frac{s}{2} - 1\right)\left(\frac{r}{2} - 2\right) + \dots + \left(\frac{s}{2} - 1\right)\left(\frac{r}{2} - \left(\frac{r}{2} - 2\right)\right) + \left(\frac{s}{2} - 1\right) \tag{108}$$

である.

従って、第 3 象限内に現れる交点の個数 Q は

$$\begin{aligned}
 Q &= q_1 + q_2 + \cdots + q_{s/2-1} \\
 &= \left(\frac{r}{2} - 1\right) + \left(\frac{r}{2} - 2\right) + \cdots + \left(\frac{r}{2} - \left(\frac{r}{2} - 2\right)\right) + 1 \\
 &+ 2\left(\frac{r}{2} - 1\right) + 2\left(\frac{r}{2} - 2\right) + \cdots + 2\left(\frac{r}{2} - \left(\frac{r}{2} - 2\right)\right) + 2 \\
 &+ 3\left(\frac{r}{2} - 1\right) + 3\left(\frac{r}{2} - 2\right) + \cdots + 3\left(\frac{r}{2} - \left(\frac{r}{2} - 2\right)\right) + 3 \\
 &+ \cdots \\
 &+ \cdots \\
 &+ \left(\frac{s}{2} - 1\right)\left(\frac{r}{2} - 1\right) + \left(\frac{s}{2} - 1\right)\left(\frac{r}{2} - 2\right) + \cdots + \left(\frac{s}{2} - 1\right)\left(\frac{r}{2} - \left(\frac{r}{2} - 2\right)\right) + \left(\frac{s}{2} - 1\right) \\
 &\equiv p_1 + p_2 + \cdots + p_{s/2-1}
 \end{aligned} \tag{109}$$

となる.

ここで

$$\begin{aligned}
 p_1 &\equiv \left(\frac{r}{2} - 1\right) + 2\left(\frac{r}{2} - 1\right) + \cdots + \left(\frac{s}{2} - 1\right)\left(\frac{r}{2} - 1\right) \\
 &= \left(\frac{r}{2} - 1\right) \sum_{k=1}^{s/2-1} k \\
 &= \left(\frac{r}{2} - 1\right) \frac{1}{2} \frac{s}{2} \left(\frac{s}{2} - 1\right) = \frac{s}{4} \left(\frac{r}{2} - 1\right) \left(\frac{s}{2} - 1\right)
 \end{aligned} \tag{110}$$

$$\begin{aligned}
 p_2 &\equiv \left(\frac{r}{2} - 2\right) + 2\left(\frac{r}{2} - 2\right) + \cdots + \left(\frac{s}{2} - 1\right)\left(\frac{r}{2} - 2\right) \\
 &= \left(\frac{r}{2} - 2\right) \sum_{k=1}^{s/2-1} k = \frac{s}{4} \left(\frac{r}{2} - 2\right) \left(\frac{s}{2} - 1\right)
 \end{aligned} \tag{111}$$

そして

$$p_{s/2-1} = \sum_{k=1}^{s/2-1} k = \frac{s}{4} \left(\frac{s}{2} - 1\right) \tag{112}$$

である. 従って Q は

$$\begin{aligned}
 Q &= p_1 + p_2 + \cdots + p_{s/2-1} \\
 &= \frac{s}{4} \left(\frac{s}{2} - 1\right) \left(\frac{r}{2} - 1\right) + \frac{s}{4} \left(\frac{s}{2} - 1\right) \left(\frac{r}{2} - 2\right) + \cdots \\
 &+ \frac{s}{4} \left(\frac{s}{2} - 1\right) \left\{ \frac{r}{2} - \left(\frac{r}{2} - 2\right) \right\} + \frac{s}{4} \left(\frac{s}{2} - 1\right) \\
 &= \frac{s}{4} \left(\frac{s}{2} - 1\right) \sum_{k=1}^{r/2-1} \left(\frac{r}{2} - k\right) \\
 &= \frac{s}{4} \left(\frac{s}{2} - 1\right) \frac{r}{2} \sum_{k=1}^{r/2-1} 1 - \frac{s}{4} \left(\frac{s}{2} - 1\right) \sum_{k=1}^{r/2-1} k \\
 &= \frac{s}{4} \left(\frac{s}{2} - 1\right) \frac{r}{2} \left(\frac{r}{2} - 1\right) - \frac{s}{4} \left(\frac{s}{2} - 1\right) \frac{r}{2} \left(\frac{r}{2} - 1\right) \frac{1}{2} \\
 &= \frac{sr}{8} \left(\frac{s}{2} - 1\right) \left(\frac{r}{2} - 1\right) \left\{ 1 - \frac{1}{2} \right\} \\
 &= \frac{sr}{16} \left(\frac{s}{2} - 1\right) \left(\frac{r}{2} - 1\right) = \frac{sr}{16 \cdot 4} (s-2)(r-2)
 \end{aligned} \tag{113}$$

よって、結局、第 1 ~ 第 4 象限に現れる交点の総数 Q_{total} は

$$Q_{\text{total}} = 4 \times Q = \frac{sr}{16}(s-2)(r-2) \tag{114}$$

となる。これから交差数 $K_{r,s}$ の上限が

$$\text{cr}(K_{r,s}) \leq \frac{1}{16}rs(r-2)(s-2) \tag{115}$$

で与えられる。つまり、 $K_{r,s}$ を平面に描いたときの交差数の最小値は $rs(r-2)(s-2)/16$ を超えることはない (この値を下回る配置が存在するかもしれないが、現段階では示せていない)。

例題 8.3

単純グラフ G に $n(\geq 3)$ 個の点、及び、 m 本の辺があるとき、 G の厚さ $t(G)$ は不等式：

$$t(G) \geq \left\lceil \frac{m}{3n-6} \right\rceil \tag{116}$$

$$t(G) \geq \left\lceil \frac{m+3n-7}{3n-6} \right\rceil \tag{117}$$

を満たすことを示せ^a。

^a $\lceil x \rceil$ は x 以上の最小の整数。 $\lfloor x \rfloor$ は x 以下の最大の整数を表す。

(解答例)

厚さは整数でなければならないことと、系 13.4 (1) より

$$t(G) \geq \left\lceil \frac{\text{辺の総数}}{\text{平面グラフとなるための辺の上限}} \right\rceil = \left\lceil \frac{m}{3n-6} \right\rceil \tag{118}$$

が成り立つ。

一方、この結果と正の整数 a, b に対して成り立つ関係式：

$$\left\lceil \frac{a}{b} \right\rceil = \left\lceil \frac{(a+b-1)}{b} \right\rceil \tag{119}$$

を用いることにより、 $a = m, b = 3n - 6$ として直ちに (117) の成立が言える。

注： $\lceil a/b \rceil = \lfloor (a+b-1)/b \rfloor$ の証明に関して

正の定数 a, b に関する等式：

$$\left\lceil \frac{a}{b} \right\rceil = \left\lfloor \frac{(a+b-1)}{b} \right\rfloor \tag{120}$$

の証明。

(a/b) が整数の場合とそうでない場合に分けて証明する。

(i) (a/b) が整数のとき

$a/b = M$ であるとき

$$(\text{与式の左辺}) = \frac{a}{b} = M \quad (121)$$

である。また、

$$(\text{与式の右辺}) = \left\lfloor \frac{(a+b-1)}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a}{b} + 1 - \frac{1}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a}{b} - \frac{1}{b} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor M - \frac{1}{b} \right\rfloor + 1 = M \quad (122)$$

であるから、(i) のとき関係式は成立。

(ii) (a/b) が整数でないとき

a/b の整数部分を C 、少数部分を D とすれば

$$(\text{与式の左辺}) = \left\lceil \frac{a}{b} \right\rceil = C + 1 \quad (123)$$

である。また

$$(\text{与式の右辺}) = \left\lfloor \frac{(a+b-1)}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a}{b} + 1 - \frac{1}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a}{b} - \frac{1}{b} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor C + D - \frac{1}{b} \right\rfloor + 1 \quad (124)$$

であるが、 D は a/b の少数部分であるから

$$D = \frac{a - bC}{b} \quad (125)$$

であり、 a, b, C は整数なので、 $a - bC$ も整数であり、 $a > bC$ より

$$a - bC \leq 1 \quad (126)$$

である。従って

$$D > \frac{1}{b} \quad (127)$$

なので、 $D - (1/b) = \varepsilon$ ($0 \leq \varepsilon < 1$) とおくと

$$(\text{与式の右辺}) = \lfloor C + \varepsilon \rfloor + 1 = C + 1 \quad (128)$$

となり、(ii) の場合も関係式が成り立つ。従って

$$\left\lceil \frac{a}{b} \right\rceil = \left\lfloor \frac{(a+b-1)}{b} \right\rfloor \quad (129)$$

が示せた。(証明終わり)

例題 8.4

(1) 完全グラフ K_n の厚さ $t(K_n)$ は次不等式を満たすことを示せ。

$$t(K_n) \geq \left\lfloor \frac{1}{6}(n+7) \right\rfloor \quad (130)$$

(2) 完全二部グラフ $K_{r,s}$ の厚さ $t(K_{r,s})$ が次不等式を満たすことを示せ。

$$t(K_{r,s}) \geq \left\lfloor \frac{rs}{2(r+s)-4} \right\rfloor \quad (131)$$

(解答例)

(1) 完全グラフ K_n の辺の数は $n(n-1)/2$ であるから、不等式：

$$t(G) \geq \left\lfloor \frac{m+3n-7}{3n-6} \right\rfloor \quad (132)$$

に代入して

$$t(K_n) \geq \left\lfloor \frac{\frac{n(n-1)}{2}+3n-7}{3n-6} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n^2+5n-14}{2(3n-6)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n+7}{6} \right\rfloor \quad (133)$$

となり、題意の不等式は満たされることがわかる。

(2) $K_{r,s}$ においては、A グループの点が r 個、B グループの点が s 個で、A グループのそれぞれの点が B グループのそれぞれの点と結ばれるので、辺の数 m 及び点の数 n は

$$m = rs \quad (134)$$

$$n = r+s \quad (135)$$

で与えられる。また、 $K_{r,s}$ には三角形が含まれないので、 $K_{r,s}$ の辺の数の上限は

$$m \leq 2n-4 \equiv m_0 \quad (136)$$

で与えられる。従って、完全二部グラフ $K_{r,s}$ の厚さ $t(K_{r,s})$ は

$$t(K_{r,s}) \geq \left\lfloor \frac{m}{m_0} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{m}{2n-4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{rs}{2(r+s)-4} \right\rfloor \quad (137)$$

となり、確かに題意の不等式を満たしている。

例題 8.5

1. 閉路行列式法を用いて完全グラフ K_4 の全域木の総数 $\tau(K_4)$ を求めよ。
2. オイラーの公式を用いてピーターソン・グラフは平面描写可能かどうかを判定せよ。
3. 講義中に見た系 13.4 を参考にして以下の問いに答えよ。
 - (1) 連結グラフ G に三角形、四角形、及び、五角形が無い場合、グラフ G が平面的となるために辺数 m が満たすべき不等式を求めよ。
 - (2) (1) の議論を一般化し、グラフ G に K 角形まで無い場合、グラフ G が平面的となるために辺数 m が満たすべき不等式を求めよ。
 - (3) (2) の結果で $K \rightarrow \infty$ の極限をとった場合に辺数 m の満たすべき不等式を求め、この結果が何を意味するのかを簡単に説明せよ。

(解答例)

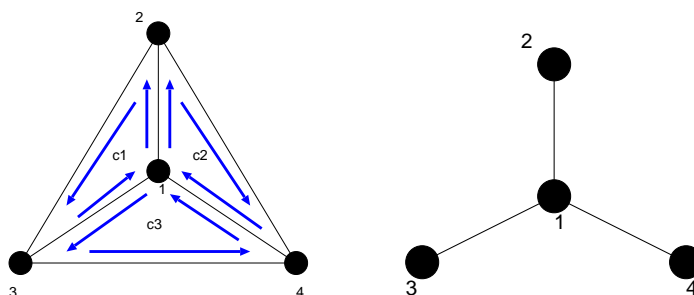


図 119: 完全グラフ K_4 とその基本閉路 c_1, c_2, c_3 (左). 右図は完全グラフ K_4 の全域木.

1. 図 119(左) のように 3 つの閉路を $c_1 = 1231, c_2 = 1241, c_3 = 1341$ と定める. すると, 閉路行列 R は

$$R = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \tag{138}$$

として与えられる.

ところで, 図のように閉路を選んだとき, 一番外側の 234 なる三角形を 4 番目の閉路として選んではいけないのか, あるいは, 閉路の選び方に任意性がある場合にはどうするのか, が問題になるのだが, その際は基本閉路を選ぶことにする. 基本閉路とは例えば図 119(右) のような完全グラフ K_4 の全域木に対し, これに 1 つずつ辺を付加してできる閉路のことである. 図 119(右) の全域木に辺 23 を付加すると閉路が一つでき, それが c_1 である. また, 辺 24 を付加すれば閉路 c_2 が, 辺 34 を付加すれば閉路 c_3 ができることになり, これらは全て基本閉路である. 閉路行列法を用いるときには基本閉路を選べば十分である. その際, 上述のように一番外側の三角形を 4 番目の閉路としてカウントしてもよいが, 結果として得られる全域木の総数は同じになる (各自が実際に余因子展開を用いて確かめてみること).

さて, このようにして定義される基本閉路に対し, 閉路行列 (138) を作れば, 完全グラフ K_4 の全域木の総数 $\tau(K_4)$ は

$$\tau(K_4) = |R| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 16 \tag{139}$$

となり, 計 16 個の全域木が存在することがわかる.

2. ピーターソン・グラフの場合には, 点数 n , 辺数 m , 及び内周の長さ κ はそれぞれ $n = 10, m = 15, \kappa = 5$ であるから, これらを判別式 :

$$m \leq \frac{\kappa(n-2)}{\kappa-2} \tag{140}$$

に代入し,

$$15 \leq \frac{5 \cdot (10-2)}{5-2} = \frac{40}{3} = 13.3\dots \tag{141}$$

となるので不成立. 従って, ピーターソン・グラフは平面的ではないと結論づけられる.

3.

(1) 三角形, 四角形, 及び五角形が無いならば $d(F)$ は

$$6 \leq d(F) \quad (142)$$

を満たす. 従って, この不等式は握手補題により

$$6f \leq \sum_{F \in \mathbf{F}(G)} d(F) = 2m \quad (143)$$

と書き直すことができるから, これとオイラーの公式: $f = 2 - n + m$ より, 面数 f を消去し, 辺数 m についての不等式:

$$m \leq \frac{3}{2}(n-2) \quad (144)$$

が成り立つ.

(2) 一般に K 角形まで無い場合, $d(F)$ は

$$K+1 \leq d(F) \quad (145)$$

を満たす. 従って, 握手補題から

$$(K+1)f \leq \sum_{F \in \mathbf{F}(G)} d(F) = 2m \quad (146)$$

と書き直せるので, これとオイラーの公式 $f = 2 - n + m$ から f を消去し, m に関する不等式:

$$m \leq \left(\frac{K+1}{K-1} \right) (n-2) \quad (147)$$

が成り立つ.

(3) (2) の結果で, $K \rightarrow \infty$ の極限をとる. しかし, 必ず $K \leq n$ であるから, この場合には $K = n$ という条件下で, $n, K \rightarrow \infty$ の極限を考えなければならない点に注意する. すると次の不等式が得られる.

$$m \leq \left(\frac{n+1}{n-1} \right) (n-2) = n-2 + 2 \left\{ 1 + \frac{1}{n-1} \right\} = n \quad (n \rightarrow \infty) \quad (148)$$

つまり, $K(\infty)$ 角形まで無いということは, グラフ G は n 角形 (ただし n も無限大なので, いわば「無限角形」) 1 個からなるグラフである.

ちなみに, n が有限のまま (147) の右辺で $K \rightarrow \infty$ の極限をとってしまうと $m \leq n-2$ なる不等式が得られるが, 閉路が全く無い「木」の場合の辺数が $n-1$ であることを考えると (ある意味で「無限角形」まで無い状況だと言える), $n-1 \leq n-2$ となり (もちろん矛盾), この場合, 「一つだけ成分を持つ n 点からなるグラフ」としては描きようがなくなってしまう. 従って, 極限をとる際には $K = n$ の条件の下で n を無限大に飛ばす必要があるわけである.

注: $K = n$ において $n \rightarrow \infty$ の極限をとらずに, n が有限のまま $K \rightarrow \infty$ を考えてもうまくい

きません。もちろん、これは必ず満たさしていなければならない条件 $K \leq n$ を満たしていないのですが、この場合に得られる $m \leq n - 2$ とオイラーの公式を組んで面数 f に関する不等式を作れば $f \leq 0$ が得られます。面数の最小値はグラフが木である場合の $f = 1$ ですからこれは不適切です。正しい不等式 $m \leq n$ とオイラーの公式を組んで f に関する不等式を作れば $f \leq 2$ が得られます。これは $f = 2$ ($K(\infty)$ 角形の内部の面と外部の無限面), $f = 1$ (木) の場合にそれぞれが対応していることとなります (図 120 参照)。

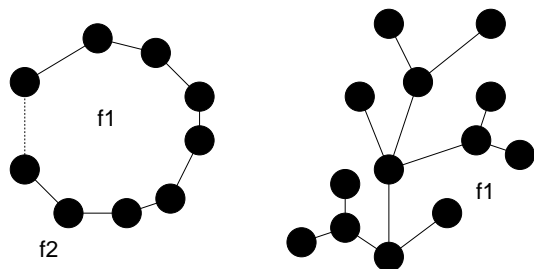


図 120: $f \leq 2$ が意味する内容は、 $K(\infty)$ 角形の内部 (f1) と外部 (f2) の計 $f = 2$ 面 (左図), 木の無限面 (f1) の計 $f = 1$ 面 (右図)。

例題 8.6 「平面グラフ (地図) においては隣り合う 5 つ以下の隣接面 (隣接国) しかもたない面 (国) が存在する (*)」という命題を証明することを考えよう。

(1) 考えるグラフの点数を n , 辺数を m とすると

$$n \leq \frac{2}{3}m$$

が成り立つことを示せ。

(2) (*) の逆: 「どの面 (国) も少なくとも 6 つの隣接面 (国) に囲まれている (**)」という仮定の下では、考えるグラフの面数を f とすると

$$f \leq \frac{1}{3}m$$

でなければならないことを示せ。

(3) (1)(2) とオイラーの公式より、仮定 (**) の矛盾を引き出し、命題 (*) の成立を示せ。

(解答例)

(1) 図 121 のように、地図では任意の点 v に接続する辺は 3 つ以上である。従って、グラフ G には点が n 個あるので、辺数は $m \geq 3n$ となりそうであるが、しかし、辺の両端には必ず点が 2 つあるので、これでは数えすぎであり、正しくは $m \geq 3n/2$, つまり

$$n \leq \frac{2m}{3} \tag{149}$$

が成り立つ。

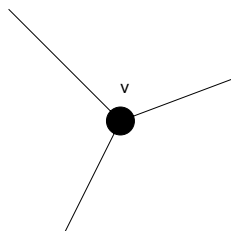


図 121: 地図では任意の点に接続する辺は 3 以上である.

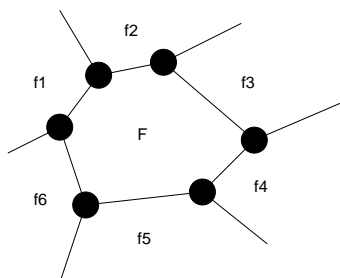


図 122: 一つの面 F は少なくとも 6 本の境界線で囲まれている.

- (2) 仮定より, 一つの面 F は少なくとも 6 本の境界線で囲まれているので (図 122 参照), グラフ G の中に面が f 面あれば, $m \geq 6f$. しかし, これは数えすぎであり, 任意の境界線の両側には必ず 2 つの面があるので, $m \geq 6f/2 = 3f$, すなわち

$$f \leq \frac{m}{3} \tag{150}$$

が成り立つ.

- (3) (1)(2) の結果とオイラーの公式から

$$2 = n - m + f \leq \frac{2m}{3} - m + \frac{m}{3} = 0 \tag{151}$$

従って, $2 \leq 0$ となってしまうので, 明らかに矛盾. よって, 仮定は間違っており, 「平面グラフにおいては隣り合う 5 つ以下の隣接面しか持たない面が存在する」ことが示された.

例題 8.7 (2006 年度情報工学演習 II(B) #1 問題 1)

n をグラフの点数, m を辺数とする. このとき以下の問いに答えよ.

(1) 関係式:

$$m > {}_{n-1}C_2$$

を満たす単純グラフは連結であることを示せ.

(2) $n > 1$ に対して

$$m = {}_{n-1}C_2$$

である非連結グラフの例を一つ挙げよ.

(解答例)

(1) n が一定である場合, グラフの成分数 k が多くなればその分の辺数が少なくなることは明らか. 従って, ここでは点数 n からなる非連結グラフのうち最小の成分を持つもの, すなわち, $k = 2$ の場合を考える. このとき, 辺数を最大化するグラフは $n - 1$ 個の点からなる完全グラフ K_{n-1} と孤立点 1 点からなるグラフであるから, その辺数は ${}_{n-1}C_2$ である. この孤立点と K_{n-1} の任意の 1 点を結ぶと単純連結グラフが得られることになるので, これが単純連結グラフの辺数 m の下限を与えることになる. つまり

$$m \geq {}_{n-1}C_2 + 1 \quad (152)$$

である. これは辺数 m は整数であることを考えると次のように書き換えることができる.

$$m > {}_{n-1}C_2 \quad (153)$$

以上より, 単純グラフの辺数は $m > {}_{n-1}C_2$ を満たすという題意を示すことができた.

(2) $n = 4$ とすると, K_3 (三角形) と孤立点 1 点ができる. この辺数は ${}_3C_2 = 3$ である.

例題 8.8 (2006 年度情報工学演習 II(B) #1 問題 2)

点数 n が偶数, 辺数 m が奇数のオイラー・グラフは存在するか否か. 理由とともに述べよ.

(解答例)

いずれも全ての点の次数が偶数 (= 2) である点数 3(三角形) と 4(四角形) のグラフを図 123 のように 1 点 (以後, 共有点と呼ぶ) で接続させると, 点数は $3 + 4 - 1$ (共有点分を差し引く) = 6, 辺数 $3 + 4 = 7$ となるので, 辺数が奇数, 点数が偶数となり題意を満たす.

このグラフは共有点の次数が 4, それ以外が 2 なので全て偶数である. 従って, オイラーの定理より, このグラフはオイラー・グラフである. よって, 辺数が奇数, 点数が偶数であるようなオイラー・グラフは存在する.

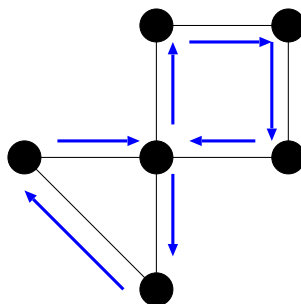


図 123: ここで考えるグラフ. これはオイラー・グラフである.

例題 8.9 (2006 年度情報工学演習 II(B) #1 問題 3)

- (1) グラフ H はその全ての隣接する 2 点が k 個の辺で結ばれているものとする. H に含まれる全てのループを取り除き, 全ての多重辺を 1 つの辺になるまで削除してできるグラフ — 底単純グラフ — を G とする. G の点数, 辺数をそれぞれ n, m とするとき, グラフ G, H の全域木の総数 $\tau(G), \tau(H)$ に関して

$$\tau(H) = k^{n-1} \tau(G)$$

が成り立つことを示せ.

- (2) F をグラフ G の各辺を全て長さ k の道で置き換えてできるグラフとする. このとき

$$\tau(F) = k^{m-n+1} \tau(G)$$

を示せ.

- (3) (2) の結果を用いて完全二部グラフ $K_{2,n}$ の全域木の総数は

$$\tau(K_{2,n}) = n \cdot 2^{n-1}$$

で与えられることを示せ.

(解答例)

- (1) グラフ H では任意の隣接する 2 点間で G での辺の他に $k-1$ 本の辺が存在するので, k 本の中から 1 本を選び出す操作を考えると, G の全域木の辺数が $n-1$ であるから, その組み合わせは k^{n-1} 通りである. これがこの操作を繰り返してできる G の全域木全てに当てはまるので, H の全域木の総数は

$$\tau(H) = k^{n-1} \tau(G) \tag{154}$$

で与えられる.

- (2) G の辺の中で G の全域木の辺として選ばれた辺に該当する F での辺は長さ k の道で置き換わっているが, この辺を長さ 1 の道, つまり, G の全域木の辺となるまで縮約する操作を考えると, この操作の前後で F の全域木と G の全域木の総数は変化しないことに着目する. すると, これらの総数に変化を与える要因は G の辺の中で全域木の辺に選ばれなかった辺に該当する F での辺の効果である. つまり, F での各辺に存在する $k-1$ 個の点のうち, どの点で G での点への縮約をとるかという場合の数は k 通りであり, G の辺の中で全域木の辺に選ばれなかった辺数は $m - (n-1)$ であるから, 結局

$$\tau(F) = k^{m-n+1} \tau(G) \tag{155}$$

となる.

- (3) 2つの点を n 本の辺で結んだグラフを G としよう. この各辺を全て長さが 2 の道で置き換える. このグラフを F とする. この変換: $G \rightarrow F$ で増加する n 個の点は全て元の 2 点と隣接し, 互いに隣接しないので完全二部グラフ $K_{2,n}$ となる (図 124 参照). 従って, (2) での結果を用いると今の場合 $\tau(G) = n$

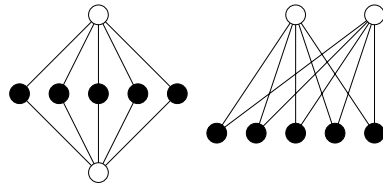


図 124: ここで考えるグラフ F (左) とその同型グラフである完全二部グラフ $K_{2,n}$ (右).

であることに注意して

$$\tau(K_{2,n}) = \tau(F) = 2^{n-2+1}\tau(G) = 2^{n-1} \cdot n \tag{156}$$

が得られる.

例題 8.10 (2006 年度情報工学演習 II(B) #1 問題 4)

n 本のスポークを持つ車輪グラフの全域木の総数を w_n とすると

$$w_n - 4w_{n-1} + 4w_{n-2} - w_{n-3} = 0$$

が成り立つことを示し, w_n を求めよ.

(既に配布した問題プリントでは $w_n - 4w_{n-1} + 4w_{n-2} - 1 = 0$ となっていました, これは間違いで上記の漸化式が正しいことに注意してください.)

(解答例)

多少の腕力を必要とするが, 問題の車輪の点行列を求め, 行列木定理よりその全域木の個数に関する漸化式を導くという方針で行く. 具体的な余因子展開の手続きは当講義ノートの 演習問題 7 の解答例 と同様である. 以下の解答では細かな展開の手続きは省略するので必要な方は 演習問題 7 の解答例 とあわせて読んで頂きたい.

まずは n 本のスポークを持つ車輪の点行列 D は

$$D = \begin{pmatrix} n & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & \cdots & -1 & 3 \end{pmatrix}_{n \times n} \tag{157}$$

である. 余因子展開法を用いて, $w_n = |D(1,1)|$ を計算すると

$$w_n = 3a_{n-1} + 2b_{n-1} \tag{158}$$

が得られる. ここに, a_n は次で定義され, ここでもまた余因子展開を行うと次式のような漸化式に従う.

$$a_n = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 3 \end{vmatrix}_{n \times n} = 3a_{n-1} - a_{n-2} \quad (159)$$

b_n もまた次のように定義され, ここでもまた余因子展開を用いると次の漸化式に従う.

$$b_n = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 3 \end{vmatrix}_{n \times n} = -a_{n-1} + b_{n-1} + a_{n-2} \quad (160)$$

この漸化式は次のように書き直すことができ, $b_n + a_{n-1}$ は初項が $b_3 + a_2$, 公比 1 の等比数列なので

$$b_n + a_{n-1} = b_3 + a_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -1 \quad (161)$$

が成り立つ. 従って, あとは連立漸化式 (158)(159)(161) を w_n に関して解き, 実際に問題で与えられた関係式が成立することを示せばよい. 実際に解くと, $\alpha = (3 + \sqrt{5})/2, \beta = (3 - \sqrt{5})/2$ として

$$\begin{aligned} w_n &= \alpha^n + \beta^n - 2 = 3(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1} - 2) - (\alpha^{n-2} + \beta^{n-2} - 2) + 2 \\ &= 3w_{n-1} - w_{n-2} + 2 \end{aligned} \quad (162)$$

となるが, これとこの式で $n \rightarrow n + 1$ としたものを辺々引くと

$$w_n - 4w_{n-1} + 4w_{n-2} - w_{n-3} = 0 \quad (163)$$

が得られる. これはここで示すべき漸化式である.

演習問題 8

全ての点の次数が 4 である単純平面グラフ G には必ず三角形が 8 個以上含まれることを示せ.