



# HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	2006年度 グラフ理論講義ノート
Author(s)	井上, 純一; Inoue, Jun-ichi
Description	<a href="http://www005.upp.so-net.ne.jp/j_inoue/index.html">http://www005.upp.so-net.ne.jp/j_inoue/index.html</a> <a href="http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/">http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/</a>
Issue Date	2006
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/15412">https://hdl.handle.net/2115/15412</a>
Rights(URL)	<a href="https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/">https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/</a>
Type	learning object
File Information	GraphTheory06_9.pdf, 第9回講義ノート



# グラフ理論 配布資料 #9

担当：井上 純一 (情報科学研究科棟 8-13)

URL : [http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j\\_inoue/](http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/)

平成 18 年 6 月 5 日

## 目次

8.3 双対グラフ	110
8.3.1 幾何学的双対グラフの作り方とその性質	110
8.3.2 抽象的双対という概念	115
8.4 無限グラフとその性質	115
9 グラフの彩色	115
9.1 点彩色	116

### 演習問題 8 の解答例

まず, 全ての点の次数が 4 であるから

$$4n = \sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2m \quad (153)$$

が成り立つべきである. ここで最後の等式は握手補題を用いたことに注意しよう. この式 (153) と考えるグラフが平面グラフであることからオイラーの公式:  $n = 2 + m - f$  を用いて点数  $n$  を消去すると

$$2m + 8 = 4f \quad (154)$$

が得られる.

ところで, 題意では「三角形の個数」に関する条件を問題にしているわけであるから, 一般に  $k$  角形の個数を  $\varphi_k$  とし, この  $\varphi_k$  を用いて等式 (154) はどのように書き直すことができるかに着目する. このとき, (154) 式を書き直すためには  $m, f$  を  $\varphi_k$  を用いて書き直す必要があるが, これらの間には

$$f = \sum_{k=3} \varphi_k \quad (155)$$

$$2m = \sum_{k=3} k\varphi_k \quad (156)$$

なる関係がある ((156) 左辺が  $2m$  となる理由は, 各辺の両側には必ず面が 2 つあるためである.  $m$  ではなく,  $2m$  となることに注意!). そこで, これら (155)(156) 式を (154) 式に代入して, はじめの数項を実際に書き出してみれば

$$3\varphi_3 + 4\varphi_4 + 5\varphi_5 + 6\varphi_6 + 7\varphi_7 + \cdots + 8 = 4\varphi_3 + 4\varphi_4 + 4\varphi_5 + 4\varphi_6 + 4\varphi_6 + 4\varphi_7 + \cdots \quad (157)$$

が成り立ち,

$$\varphi_3 - (\varphi_5 + 2\varphi_6 + 3\varphi_7 + \dots) = 8 \tag{158}$$

つまり

$$\varphi_3 - (\varphi_5 + 2\varphi_6 + 3\varphi_7 + \dots) - 8 = 0 \leq \varphi_3 - 8 \tag{159}$$

であるから三角形の個数  $\varphi_3$  は  $\varphi_3 \geq 8$  を満たすことになり, 「全ての点の次数が 4 である平面グラフには三角形が 8 個以上存在する」という題意が証明された.

### 8.3 双対グラフ

ここでは次節の「彩色」を初めとし, 様々な場面に応用されている重要な概念である「双対性」「双対グラフ」について学ぶ.

#### 8.3.1 幾何学的双対グラフの作り方とその性質

幾何学的双対グラフは, 与えられた平面グラフから, あるルールに従って作られる. まず, この双対グラフの作り方を知らなければならない. そこで, ここではまず, 幾何学的双対グラフの描き方を学び, 具体的に与えられた平面グラフの幾何学的双対グラフを求めてみる. 次に, 一般のグラフにおいて, そのグラフと双対グラフの間にどのような関係が成り立つのかを詳しく見て行く.

#### 幾何学的双対グラフの作り方

以下の作り方を図に載せたグラフ  $G$  を参考にしながら見て頂きたい.

- (1) グラフ  $G$  の各面  $f$  の内側の点  $v^*$  を選ぶ.  $\Rightarrow$  こうして打たれる点が双対グラフ  $G^*$  の点となる.
- (2) グラフ  $G$  の各辺  $e$  に対応させて,  $e$  にできるだけ交差する線  $e^*$  を描いて,  $e$  に接する 2 つの面  $f$  の点  $v^*$  を結ぶようにする.  $\Rightarrow$  こうしてできる辺が双対グラフ  $G^*$  の辺となる.

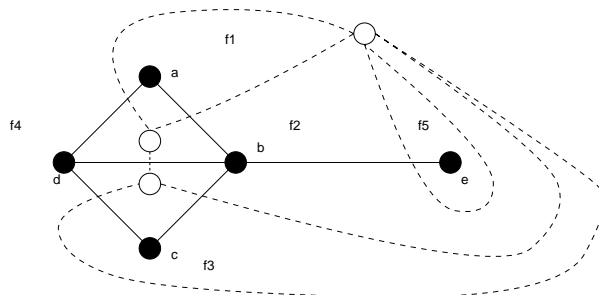


図 124: 考える平面グラフ  $G$  とその幾何学的双対 (図の白丸と破線からなるグラフ).

具体的に双対グラフの作り方を練習してみるために次の例題をやってみよう.

例題 8.7

完全グラフ  $K_4$  の双対グラフは、やはり、完全グラフ  $K_4$  であることを示せ。

(答え)

上に提示した「作り方」に従って、双対グラフを作ってみると、図 125 の右側のようになり、これは完全グラフ  $K_4$  である。上に提示した「作り方」によってグラフ  $G$  から作ることのできる双対グラフ  $G^*$  の点、辺、

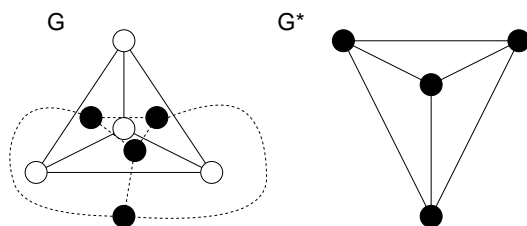


図 125: 完全グラフ  $K_4$  とその幾何学的双対グラフ (右).

面の数  $n^*$ ,  $m^*$ , 及び,  $f^*$  はもとのグラフ  $G$  のそれぞれの数とどのように関係するのであろうか？ これに関しては次の補題にまとめられている。

補題 15.1

平面連結グラフ  $G$  には  $n$  個の点,  $m$  本の辺,  $f$  個の面があるとする。このとき、その幾何学的双対グラフ  $G^*$  には  $n^*$  個の点,  $m^*$  本の辺,  $f^*$  個の面があるならば

$$n^* = f, \quad m^* = m, \quad f^* = n$$

が成り立つ。

(証明)

双対グラフの作り方から、「グラフ  $G$  の各面に双対グラフの点を打ち込む」ことから  $n^* = f$  が、「グラフ  $G$  の各辺  $e$  に交差するように双対グラフの辺  $e^*$  を描く」ということから  $m^* = m$  が直ちに言える。

一方、双対グラフについてのオイラーの公式から

$$f = n^* = 2 + m^* - f^* \tag{160}$$

であるから、これをグラフ  $G$  に関するオイラーの公式

$$n - m + f = 2 \tag{161}$$

つまり、 $n - m^* + f = 2$  に代入して整理すると  $n - m^* + 2 + m^* - f^* = 2$ , すなわち

$$f^* = n \tag{162}$$

が得られる。(証明終わり)。

定理 15.2

グラフ  $G$  が連結平面ならば、 $G^{**}$  はグラフ  $G$  と同形である。

(証明略) (各自, 教科書 p.104 を読んでおくこと)

この定理に関連する問題 ⇒ 例題 9.2 参照.

**定理 15.3**

平面グラフ  $G$  の幾何学的双対を  $G^*$  とする. このとき, グラフ  $G$  の各辺の, ある集合がグラフ  $G$  において閉路であるための必要十分条件は, それに対応する双対グラフ  $G^*$  の辺集合が, グラフ  $G^*$  においてカットセットになっていることである.

(証明)

平面グラフ  $G$  の任意の閉路  $C$  を選ぶと,  $C$  の中には面が一つ以上あるので, この面内に点を一つ置き, これを双対グラフ  $G^*$  の点  $v^*$  に対応させる. この点  $v^*$  と閉路  $C$  を構成する各辺を交差させるように新たな辺を引き, これを双対グラフの辺に対応させると, この手続きによって, 交差されたグラフ  $G$  における辺集合  $\{\overline{c_1c_2}, \overline{c_2c_3}, \overline{c_3c_4}, \overline{c_4c_5}, \overline{c_5c_6}, \overline{c_6c_1}\}$  の元に対応する幾何学的双対グラフ  $G^*$  の辺集合  $\{\overline{v^*a}, \overline{v^*b}, \overline{v^*c}, \overline{v^*d}, \overline{v^*e}, \overline{v^*f}\}$  は, 双対グラフ  $G^*$  においてはカットセットとなっている (図 126 参照). つま

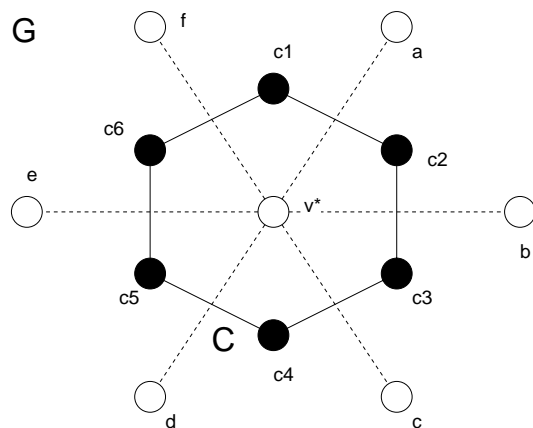


図 126: グラフ  $G$  に含まれる閉路  $C$  と,  $G$  の幾何学的双対グラフの一部 (白丸と破線).

り, これらを除去すると,  $G^*$  は  $v^*$  とそれ以外の部分に分離する.

また, 以上の手続きの逆をたどることにより題意は示される. (証明終わり).

**系 15.4**

グラフ  $G$  の辺のある集合が  $G$  のカットセットであるための必要十分条件は, 対応する幾何学的双対グラフ  $G^*$  の辺集合が  $G^*$  の閉路となることである.

証明を与える前に, 図 127 に載せたグラフ  $G$  に対して, 上記の事実を確かめておこう. グラフ  $G$  のある辺集合  $\{\overline{17}, \overline{28}, \overline{39}, \overline{410}, \overline{511}, \overline{612}\}$  がグラフ  $G$  のカットセットであるが, これに対応する幾何学的双対グラフ  $G^*$  の辺集合は  $\{\overline{fa}, \overline{ab}, \overline{bc}, \overline{cd}, \overline{de}, \overline{ef}\}$  であり, これらは  $G^*$  において閉路となっている. 2 つの集合の要素間

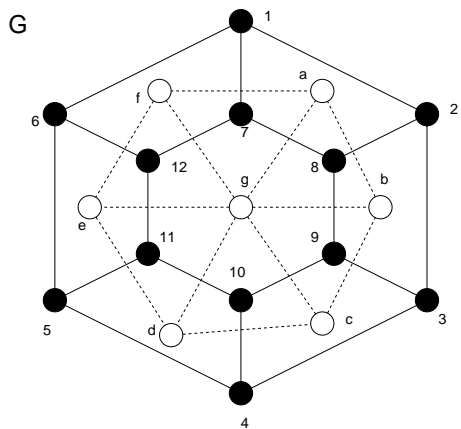


図 127: グラフ  $G$  (黒丸と実線) とその幾何学的双対グラフ (白丸と破線).

には 1 対 1 の対応関係がある.

(証明)

定理 15.3 を  $G \rightarrow G^*$ ,  $G^* \rightarrow G^{**}$  として読みかえると, 定理 15.2 から, グラフ  $G$  が平面連結ならば,  $G^{**} \cong G$  であるから,

「平面グラフ  $G^*$  の幾何学的双対を  $G$  とすると,  $G^*$  のある集合が  $G^*$  において閉路であるための必要十分条件は, それに対応する  $G$  の辺集合が  $G$  においてカットセットであることである」

と言える. 従ってこの系を示すことができた. (証明終わり).

例題 8.8

- (1) 車輪の双対は車輪であることを示せ.
- (2) 平面グラフ  $G$  が非連結ならば,  $G^{**}$  は  $G$  に同形でないことを例で示せ.
- (3)  $G$  が連結な平面グラフであるとき,  $G$  の全域木は  $G^*$  のある全域木の補グラフに対応することを例で示せ.

(答え)

- (1) 「車輪  $W_n$  とは,  $n - 1$  個の点を持つ閉路  $C_{n-1}$  に一つの新しい点  $v$  を加え,  $v$  と他の全ての  $n - 1$  個の点をつないでできるグラフである」ことを思い出す. 補題 15.1 より  $n^* = f$ , つまり, 双対グラフの点の数は元々のグラフの面数に等しく,  $G \equiv C_{n-1}$  の無限面を除く面数は  $n - 1$  個であり, 従って,  $n - 1$  個のそれぞれの面に  $n - 1$  個の点を一つ一つ置き (これらが  $G^*$  の中の  $n - 1$  個の点になる), それらを結んで  $C_{n-1}^*$  を作り, 最後に無限面に一点  $v^*$  を置き (これで  $G^*$  の点の総数は  $n$ ), それと  $C_{n-1}^*$  の  $n - 1$  個の点とを相互に結べば (これらの線が  $G$  の各辺と一辺ずつ交差することは明らか) 出来上がるグラフは  $W_n^*$  であり, 従って, 「車輪の双対は車輪である」ことがわかる. 図 128 に  $W_7$  の場合の例を示そう.
- (2) まず, 例として図 129(左) の黒丸と実線で与えられる非連結グラフ  $G$  を考える. この非連結なグラフ  $G$  から幾何学的双対グラフ  $G^*$  を描くと, 図 129(左) の白丸と破線が得られる. これが  $G^*$  であり, さ

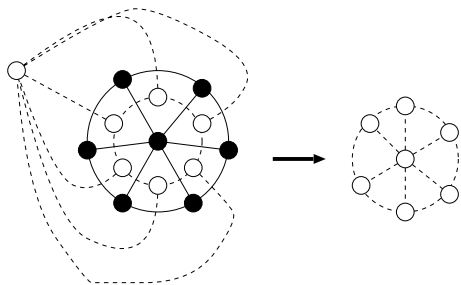


図 128:  $W_7$  (左図の黒丸と実線) とその幾何学的双対グラフ (左図の白丸と破線及び右図, これらは同形である).

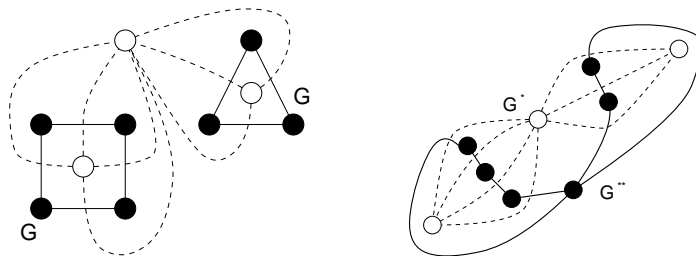


図 129: 左は非連結グラフ  $G$  (黒丸と実線) とその幾何学的双対グラフ  $G^*$  (白丸と破線). 右は  $G^*$  (黒丸と実線) とその幾何学的双対グラフ  $G^{**}$  (白丸と破線).

らにこの  $G^*$  の幾何学的双対グラフを描くと図 129(右) の黒丸と実線のグラフとなり, 明らかにこのグラフは  $G$  と同形ではないことがわかる ( $G^{**}$  は連結グラフとなっている).

- (3) まず, 平面連結グラフ  $G$  を図 130 の黒丸と実線のように選ぶ. これに対する幾何学的双対グラフ  $G^*$  は同図 130 の白丸と破線で与えられる.

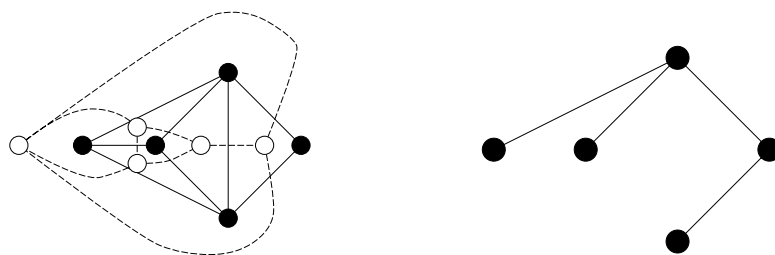


図 130: 連結平面グラフ  $G$  (黒丸と実線) とその幾何学的双対グラフ  $G^*$  (白丸と破線). 右図は  $G$  の全域木

一方, 平面連結グラフ  $G$  の全域木の一つは図 130 の右側で与えられる.  $G$  の幾何学的双対グラフ  $G^*$  の全域木を図 131 の左側のように選ぶと, その補グラフは同 131 の右側のような木として得られるので, これはグラフ  $G$  の全域木と等しい. 従って, この例に関して題意が示せた.

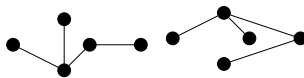


図 131: 幾何学的双対グラフ  $G^{**}$  の全域木 (左) とその補グラフ (右).

### 8.3.2 抽象的双対という概念

抽象的双対 (abstract dual) :  $G$  の辺集合と  $G^*$  の辺集合の間に 1 対 1 対応があり, しかも,  $G$  の辺のある集合が  $G$  において閉路になるのは, 対応する  $G^*$  の辺集合が  $G^*$  においてカットセットになるときであり, かつ, そのときに限る場合,  $G^*$  を  $G$  の抽象的双対と呼ぶ. (注) :  $G^*$  が平面グラフ  $G$  の幾何学的双対

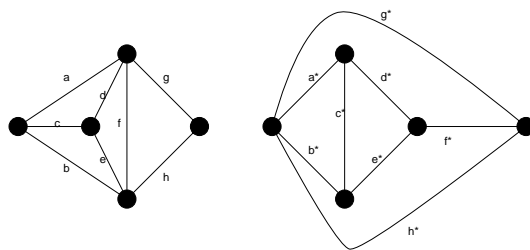


図 132: グラフ  $G$  とその抽象的双対グラフ (右).

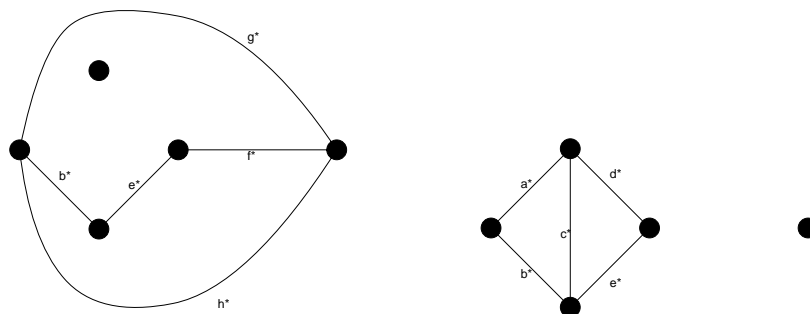


図 133: カットセット  $a^*, c^*, d^*$  によってできるグラフ (左側) とカットセット  $f^*, g^*, h^*$  によりできるグラフ (右側).

ならば,  $G^*$  は  $G$  の抽象的双対でもある.

## 8.4 無限グラフとその性質

今年度の当講義では省略する. 各自が教科書の該当部分を読んでおくこと.

## 9 グラフの彩色

ここからはグラフの彩色に入る.

### 9.1 点彩色

$k$ -彩色可能 ( $k$ -colourable) :  $k$  個の色の一つを  $G$  の各点に割り当て、隣接するどの 2 つの点も同じ色にならないようにできるとき.

$k$ -彩色的 ( $k$ -chromatic) : グラフ  $G$  が  $k$  彩色可能であるが、 $(k - 1)$  彩色不可能であるとき.

⇒ グラフ  $G$  の彩色数 (chromatic number) は  $k$  である. そして

$$\chi(G) = k$$

のように表記する. 例えば、図に載せたグラフ  $G$  の彩色数は 4 である. 代表的グラフに関する、それぞれの

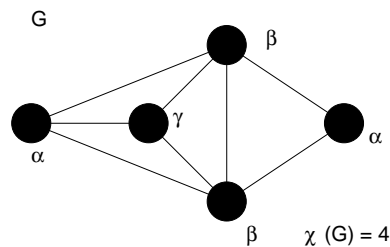


図 134: このグラフ  $G$  の彩色数は  $\chi(G) = 4$  である.

彩色数は

$$\begin{cases} \chi(K_n) & = n \\ \chi(N_n) & = 1 \\ \chi(K_{r,s}) & = 2 \end{cases}$$

のようになる.

そこで、点彩色に対して、幾つかの重要な定理を見てゆこう.

**定理 17.1**

単純グラフ  $G$  の最大次数が  $\Delta$  ならば、グラフ  $G$  は  $(\Delta + 1)$ -彩色可能である.

(証明)

図 135 のように、任意の点  $v$  及び、 $v$  に接続する辺を除去してできるグラフには  $n - 1$  個の点があり、その最大次数は  $\Delta$  以下. そこで、この  $n - 1$  個の点からなるグラフは  $(\Delta + 1)$ -彩色可能であると仮定する. このとき、 $v$  に隣接している  $\Delta$  個以下の点とは異なる色で  $v$  を彩色すれば、グラフ  $G$  の  $(\Delta + 1)$ -彩色が得られる. (証明終わり).

**定理 17.3**

全ての単純平面グラフは 6-彩色可能である.

(証明)

グラフ  $G$  は  $n (> 6)$  個の点を持つ単純平面グラフであるとする. そして、 $n - 1$  個の点を持つ全ての単純平面グラフは 6-彩色可能であるとする. 定理 13.6 : 「全ての単純平面グラフには次数 5 以下の点がある」よ

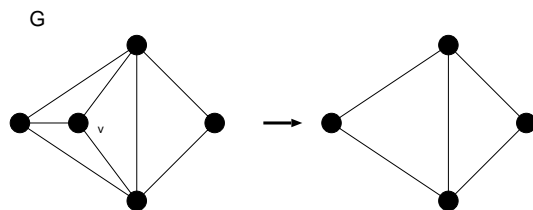


図 135: 任意の点  $v$  を切除してできるグラフの最大次数を考える.

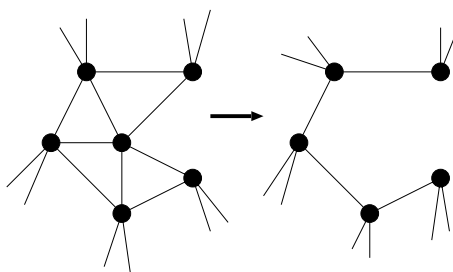


図 136: ここで考えるグラフ.

り、 $G$  には 5 次以下の点  $v$  がある。図 136 のように、 $v$  と  $v$  に接続する辺を除去すると、残りのグラフには  $n - 1$  個の点しかないので、仮定から 6-彩色可能である。 $v$  に隣接している 5 個以下の点とは異なる点で  $v$  を彩色すれば、 $G$  の 6-彩色が得られる。(証明終わり).

**定理 17.4**

全ての単純平面グラフは 5-彩色可能である。

(証明)

$n > 5$  とする。「 $n - 1$  個以下の点を持つ全ての単純平面グラフは 5-彩色可能である」とする。これが帰納法の仮定となる。定理 13.6 より、 $G$  には次数 5 以下の点  $v$  がある。 $\deg(v) < 5$  ならば証明は終わり。従って、以下では  $\deg(v) = 5$  であるとする。

$v_1, \dots, v_5$  はこの順に  $v$  のまわりに配置されているとする (図 137 参照)。 $v_1, \dots, v_5$  が全て隣接していれば完全グラフ  $K_5$  になってしまうので、全ては隣接していないとする。2 本の辺  $vv_1, vv_3$  を縮約すると、平面グラフができて、それには高々  $n - 1$  個しか点がないので、5-彩色可能。次に 2 本の辺を元に戻し、 $v$  に当てられた色で  $v_1, v_3$  の両方を彩色する。点  $v$  に割り当てられた色とは異なる色で  $v$  を彩色すれば  $G$  の 5 彩色が得られる。(証明終わり).

最後に彩色の応用問題を 1 題、例題として見ておこう。

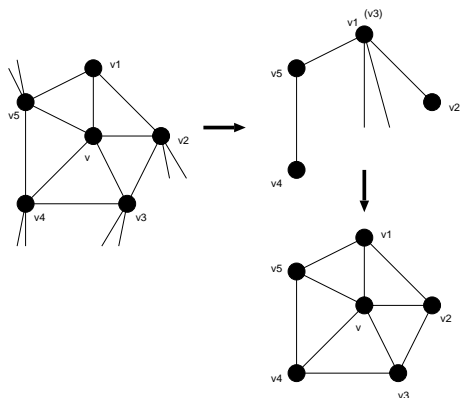


図 137: ここで考えるグラフ.

例題 9.1

講義の時間割を作りたい。複数の講義を受けたい学生も居るので、講義によっては同じ時間帯を避けなければいけない。下表の星印 (\*) は同じ時間帯にあってはいけない講義を表している。

	a	b	c	d	e	f	g
a	—	*	*	*	—	—	*
b	*	—	*	*	*	—	*
c	*	*	—	*	—	*	—
d	*	*	*	—	—	*	—
e	—	*	—	—	—	—	—
f	—	—	*	*	—	—	*
g	*	*	—	—	—	*	—

このとき以下の問い (1)(2) に答えよ。

- (1) a, b, c, d, e, f, g の 7 つの講義を点で表し、同じ時間帯にあってはいけない講義に対応する 2 点が隣接するようなグラフを描け。
- (2) (1) で得られたグラフの各点をギリシャ文字  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  で彩色することにより、この 7 つの講義の時間割には何時間が必要となるかを答えよ。

(答え)

- (1) 問題文に与えられた表に従って、星印のついた講義同士を隣接するようにグラフを描くと図 138 のようになる。
- (2) 実際に図 138 に見るように、このグラフを点彩色するために必要な色数は  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  の 4 色であるが、これは最も次数の大きな点が  $b$  であり、また、 $b$  に隣接している 4 点の中で  $b$  を除く他点とも隣接している点が 3 点 ( $a, c, d$ ) であることから、 $b$  は  $\delta$  で彩色せざるを得ず、この  $\delta$  までのギリシャ文字の数が求

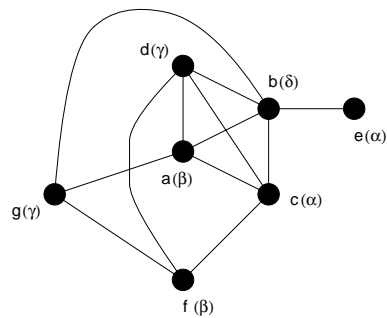


図 138: 講義間の関係を表すグラフ. 同時間帯に開講される講義は互いに隣接している. 括弧内は開講すべき時間帯 (色).

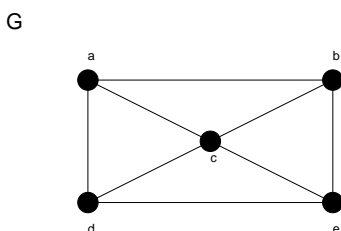
める彩色数 4 であることから容易にわかる. 以上より

講義  $c, e$  は  $\alpha$  講時に開講  
 講義  $a, f$  は  $\beta$  講時に開講  
 講義  $d, g$  は  $\gamma$  講時に開講  
 講義  $b$  だけは  $\delta$  講時に開講

するように時間割を作れば良いことがわかる.

例題 9.2

1. 図のグラフ  $G$  に関して以下の問いに答えよ.



- (1) グラフ  $G$  の幾何学的双対グラフ  $G^*$  を描け.
- (2) (1) で得られたグラフ  $G^*$  の幾何学的双対グラフ  $G^{**}$  を描き,  $G^{**}$  と  $G$  の間の同形写像を求めよ.

(注) : 「同形」「同形写像」に関しては, 講義ノート #2 の 2.2 同形の部分を読み返して見ること.

2. グラフ  $G$  の点彩色に関して以下の問いに答えよ.

- (1) グラフ  $G$  は三角形を含まないとする. オイラーの公式を用いて, このグラフ  $G$  には次数 3 以下の点が存在することを示せ.
- (2) グラフ  $G$  は 3 色で点彩色可能であることを示せ.
- (3) (1) の結果をグラフ  $G$  が  $K$  角形まで含まないという場合に拡張せよ.

(答え)

1(1) グラフ  $G$  の幾何学的双対グラフ  $G^*$  を図 139 に示す.

(2) (1) で得られたグラフ  $G^*$  の幾何学的双対グラフ  $G^{**}$  は図 139 のようになり, このグラフの各点にそれぞれ 1, 2, 3, 4, 5 と名前をつけることにする. このとき, 写像  $\{\theta, \phi\}$  を

$$\theta : V(G) \rightarrow V(G^{**})$$

$$\phi : E(G) \rightarrow E(G^{**})$$

のように定義すると,  $\theta(a) = 1, \theta(b) = 2, \theta(c) = 3, \theta(d) = 4, \theta(e) = 5$ , 及び,  $\phi(\overline{ab}) = \overline{12}, \phi(\overline{be}) = \overline{25}, \phi(\overline{ed}) = \overline{54}, \phi(\overline{da}) = \overline{41}, \phi(\overline{ac}) = \overline{13}, \phi(\overline{ce}) = \overline{35}, \phi(\overline{bc}) = \overline{13}, \phi(\overline{cd}) = \overline{34}$  が成り立つ.

さて, これらを用いると, 関係式 ;

$$\Psi_G(\overline{ab}) = ab \Leftrightarrow \Psi_{G^{**}}(\phi(\overline{ab})) = \Psi_{G^{**}}(\overline{12}) = 12 = \theta(a)\theta(b)$$

$$\Psi_G(\overline{be}) = be \Leftrightarrow \Psi_{G^{**}}(\phi(\overline{be})) = \Psi_{G^{**}}(\overline{25}) = 25 = \theta(b)\theta(e)$$

$$\Psi_G(\overline{ed}) = ed \Leftrightarrow \Psi_{G^{**}}(\phi(\overline{ed})) = \Psi_{G^{**}}(\overline{54}) = 54 = \theta(e)\theta(d)$$

$$\Psi_G(\overline{da}) = da \Leftrightarrow \Psi_{G^{**}}(\phi(\overline{da})) = \Psi_{G^{**}}(\overline{41}) = 41 = \theta(d)\theta(a)$$

$$\Psi_G(\overline{ac}) = ac \Leftrightarrow \Psi_{G^{**}}(\phi(\overline{ac})) = \Psi_{G^{**}}(\overline{13}) = 13 = \theta(a)\theta(c)$$

$$\Psi_G(\overline{ce}) = ce \Leftrightarrow \Psi_{G^{**}}(\phi(\overline{ce})) = \Psi_{G^{**}}(\overline{35}) = 35 = \theta(c)\theta(e)$$

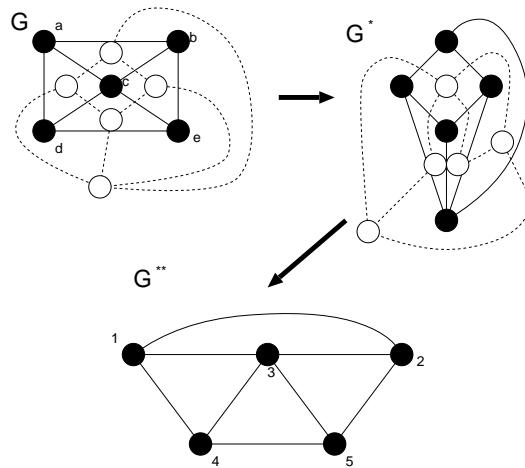


図 139: 平面グラフ  $G$  とその幾何学的双対グラフ  $G^*$ . そして,  $G^*$  の幾何学的双対グラフ  $G^{**}$ .

$$\Psi_G(\overline{bc}) = bc \Leftrightarrow \Psi_{G^{**}}(\phi(\overline{bc})) = \Psi_{G^{**}}(\overline{23}) = 23 = \theta(b)\theta(c)$$

$$\Psi_G(\overline{cd}) = cd \Leftrightarrow \Psi_{G^{**}}(\phi(\overline{cd})) = \Psi_{G^{**}}(\overline{34}) = 34 = \theta(c)\theta(d)$$

が成り立つ. 従って,  $\Psi_G, \Psi_{G^{**}}$  は同形写像となるので, グラフ  $G$  と  $G^{**}$  は同形である.

2.

(1) グラフ  $G$  に含まれる任意の点  $v$  に対して  $\delta \leq \deg(v)$  とすれば, 握手補題により

$$n\delta \leq \sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2m \tag{163}$$

が成り立つ. 一方, グラフ  $G$  に三角形が無いのであれば, グラフ  $G$  の内周は  $\kappa = 4$  であるから  $4 \leq \deg(F)$ , すなわち

$$4f \leq \sum_{f \in F(G)} = 2m \tag{164}$$

が成り立つが, オイラーの公式:  $f = 2 - n + m$  を代入し, 面数  $f$  を消去すれば

$$m \leq 2n - 4 \tag{165}$$

が得られる. (163)(165) から

$$n\delta \leq 2m \leq 2(2n - 4) \tag{166}$$

つまり

$$\delta \leq 4 - \frac{8}{n} \tag{167}$$

が成り立つ. 従って,  $\delta$  は自然数であるから,  $n \geq 8$  であるならば  $\delta \leq 3$  となり, 証明は終了する. ところで, グラフ  $G$  には次数 3 以下の点があるならば任意の点  $v$  に対し,  $3 \leq \deg(v)$  が成り立つべきだが, 握手補題から直ちに

$$3n \leq \sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2m \tag{168}$$

つまり

$$m \geq \frac{3}{2}n \tag{169}$$

となるが、これと (165) が同時に成り立つべきだから、 $n$  は  $3n/2 \leq 2n - 4$  を満たすべきであり、これは  $n \geq 8$  である。従って、結局  $\delta \leq 3$  となり、グラフ  $G$  には次数 3 以下の点があることが言える。

- (2) (1) の結果より、グラフ  $G$  には三角形は無く、次数 3 以下の点があることから、図 140 のような点  $v$  が存在することになる (このグラフ  $G$  の点の数は  $n$ )。従って、 $v$  の次数が  $\deg(v) < 3$  を満たすならば証明は終わってしまうので、以下では  $\deg(v) = 3$  として議論を進める。そして、図 140 のように点  $v$  のまわりに  $v_1, v_2, v_3$  が配置されているものとする。

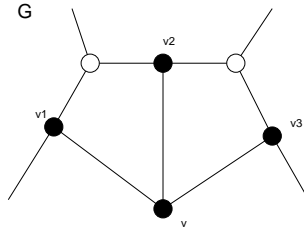


図 140: 平面グラフ  $G$ . 点  $v$  の回りに点  $v_1, v_2$ , 及び  $v_3$  が配置されている。

さて、辺  $vv_3$  を縮約してできる  $(n - 1)$  点からなるグラフは図 141 のようになっており、この  $(n - 1)$  点から成るグラフは 3 彩色可能であると仮定する。このとき、 $v_1 \Rightarrow \alpha, v_2 \Rightarrow \alpha, v_3 \Rightarrow \beta$  とそれぞれ

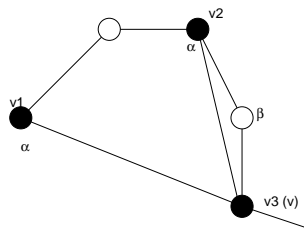


図 141: 平面グラフ  $G$  の点  $vv_3$  を縮約したグラフ。

彩色し、後に  $v$  を元に戻すことにする (図 142 参照。この時点で点の数  $n$ )。元に戻した  $v$  を  $\alpha, \beta$  と

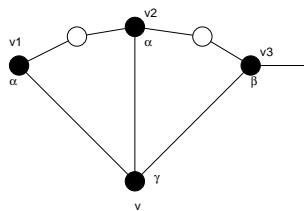


図 142: 図 141 で縮約した辺  $vv_3$  を元に戻す。

は異なる色  $\gamma$  で彩色すれば所望のグラフ  $G$  の 3 彩色が完成する。(証明終わり)。

(3)  $K$  角形が無いのであれば、握手補題より

$$(K+1)f \leq \sum_{F \in \mathbf{F}(G)} \deg(F) = 2m$$

が成り立つが、オイラーの公式から面数  $f$  を消去して

$$m \leq \left(\frac{K+1}{K-1}\right)(n-2) \tag{170}$$

が得られる。これと  $n\delta \leq 2m$  を組んで

$$\delta \leq 2\left(\frac{K+1}{K-1}\right) - \frac{4}{n}\left(\frac{K+1}{K-1}\right) \tag{171}$$

が成り立つ。従って、グラフ  $G$  に  $K$  角形まで無く、 $n$  が不等式：

$$n \geq 4\left(\frac{K+1}{K-1}\right) \tag{172}$$

を満たすならば、グラフ  $G$  には次数が  $2(K+1/K-1) - 1$  以下の点が存在することになる。

ところで、不等式 (172) の成立条件の吟味であるが、グラフに次数  $2(K+1/K-1) - 1$  以下の点が存在するとすれば、ある点  $v$  に対し、 $2(K+1/K-1) - 1 \leq \deg(v)$  が成立し、これと握手補題から

$$m \leq \frac{n}{2} \left\{ \left(\frac{K+1}{K-1}\right) - 1 \right\} \tag{173}$$

が得られるが、これと (170) が同時に成立するためには

$$\frac{n}{2} \left\{ \left(\frac{K+1}{K-1}\right) - 1 \right\} \leq \left(\frac{K+1}{K-1}\right)(n-2) \tag{174}$$

つまり、

$$n \geq 4\left(\frac{K+1}{K-1}\right) \tag{175}$$

が成り立つことになり、これは上に述べたグラフに次数  $2(K+1/K-1) - 1$  以下の点が存在する条件に抵触しない。従って以上により、このグラフには次数  $2(K+1/K-1) - 1$  以下の点が存在すると結論付けられる。

例題 9.3 次のグラフの彩色数を求めよ。

- (1) 各プラトングラフ
- (2) 完全三部グラフ  $K_{r,s,t}$
- (3)  $k$ -立方体

(答え)

(1) プラトングラフは教科書 p. 24 図 3.5 にあるように平面描写可能である。これらのグラフのうち最初の 3 つをそれぞれ彩色すると 図 143 より、それぞれの彩色数は

$$\chi(\text{正四面体}) = 4 \tag{176}$$

$$\chi(\text{正八面体}) = 3 \tag{177}$$

$$\chi(\text{立方体}) = 2 \tag{178}$$

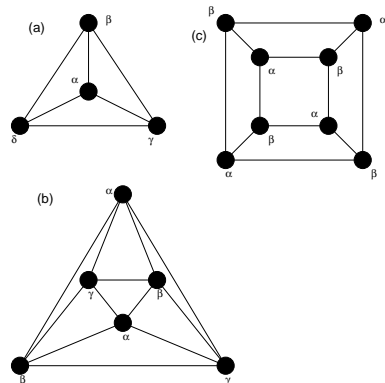


図 143: (A) 正四面体, (B) 正八面体, (C) 立方体の平面描画とその彩色.

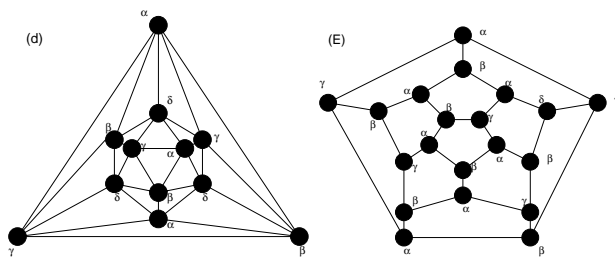


図 144: (D) 正 20 面体, 及び, (E) 正 12 面体の平面描画とその彩色.

となる. 同様にして, 正 20 面体, 及び, 正 12 面体の平面描画はそれぞれ図 144 のようになり, 求める彩色数は

$$\chi(\text{正 20 面体}) = 4 \tag{179}$$

$$\chi(\text{正 12 面体}) = 4 \tag{180}$$

となる.

(2) 完全三部グラフ  $K_{r,s,t}$  の彩色数はその定義から直ちに

$$\chi(K_{r,s,t}) = 3 \tag{181}$$

である.

(3)  $k$ -立方体  $Q_k$  は正則二部グラフであることを考えると, その彩色数は

$$\chi(Q_k) = 2 \tag{182}$$

である.

**演習問題 9**

辺数が  $m$  であるグラフ  $G$  の彩色数  $\chi(G)$  は不等式：

$$\chi(G) \leq \frac{1 + \sqrt{8m + 1}}{2}$$

を満たすことを示せ.

(ヒント) グラフ  $G$  の全ての点を各々に割り当てられた色  $1, 2, \dots, \chi(G)$  でグループ分けした場合, 各グループ内の点どうしは辺で結ばれてはいけないことに着目する. このとき  $G$  にあるべき辺数  $m$  の満たすべき条件を考察すると良い.