



# HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	2006年度 グラフ理論講義ノート
Author(s)	井上, 純一; Inoue, Jun-ichi
Description	<a href="http://www005.upp.so-net.ne.jp/j_inoue/index.html">http://www005.upp.so-net.ne.jp/j_inoue/index.html</a> <a href="http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/">http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/</a>
Issue Date	2006
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/15412">https://hdl.handle.net/2115/15412</a>
Rights(URL)	<a href="https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/">https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/</a>
Type	learning object
File Information	GraphTheory06_slide11.pdf, 第11回講義スライド



# グラフ理論 #11

第11回講義 6月26日

---

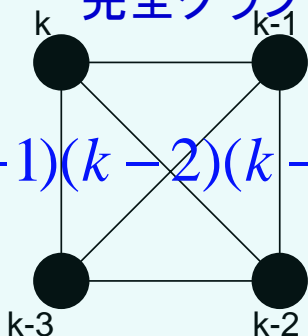
## --- 有向グラフ ---

情報科学研究科 井上純一

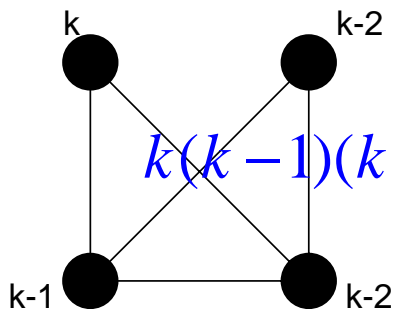
[http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j\\_inoue/](http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/)

# 演習問題10の解答例

完全グラフ



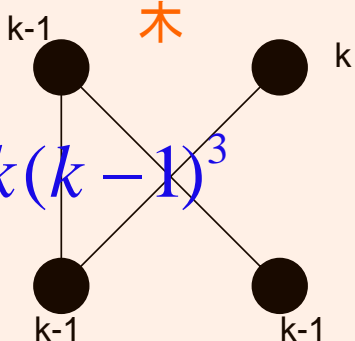
$$k(k-1)(k-2)(k-3)$$



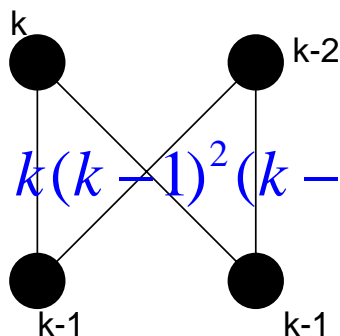
$$k(k-1)(k-2)^2$$

完全グラフから  
辺を削除していくと  
最終的な連結グラフ  
としては木が得られる。

この操作で彩色数は  
単調に増加する。



$$k(k-1)^3$$



$$k(k-1)^2(k-2)$$

$P_{K_N}(k)$

$$k(k-1) \cdots (k-N+1) \leq P_G(k) \leq k(k-1)^{N-1} P_{T_N}(k)$$

# 有向グラフ：定義・性質 #1

弧集合:

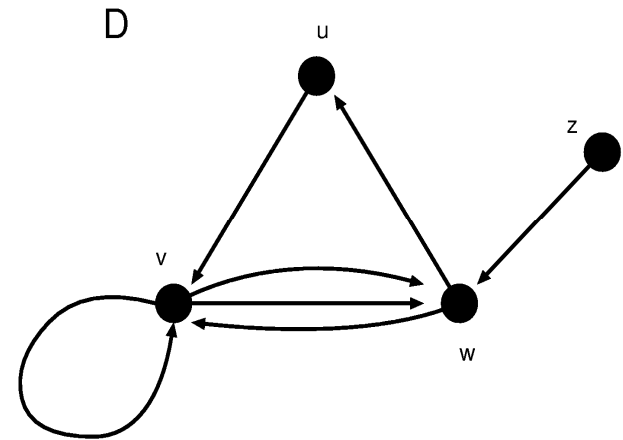
$A(D)$ : 点集合  $V(D)$  の元の順序対からなる有限族

$$A(D) = \{uw, vv, vw, vw, wv, wu, zw\}$$

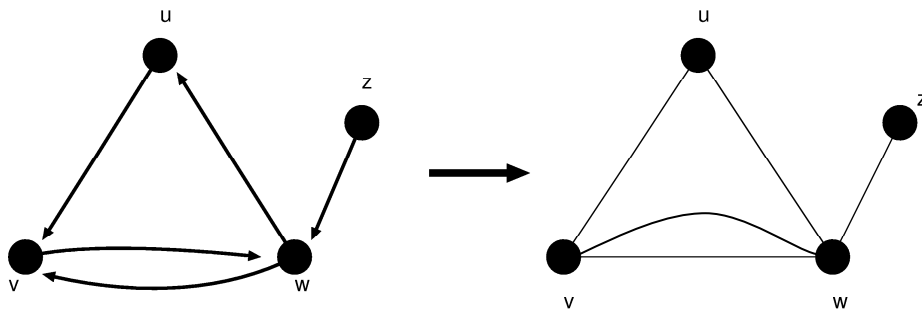
有向グラフ:

$D: V(D)$  と  $A(D)$  からなるグラフ

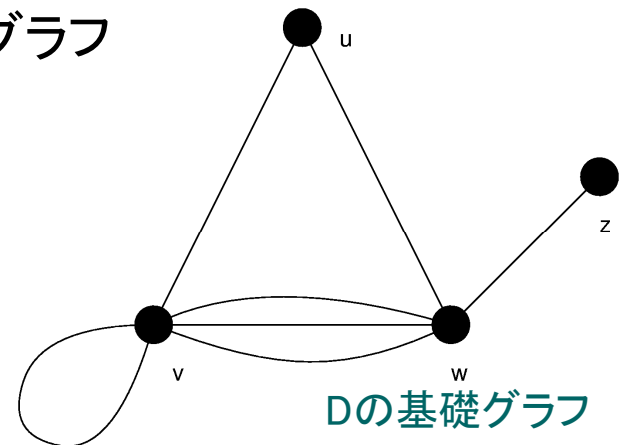
Dの基礎グラフ: 有向グラフDの矢印を取り除いたグラフ



単純有向グラフ: Dの弧が全て異なり、ループの無いグラフ



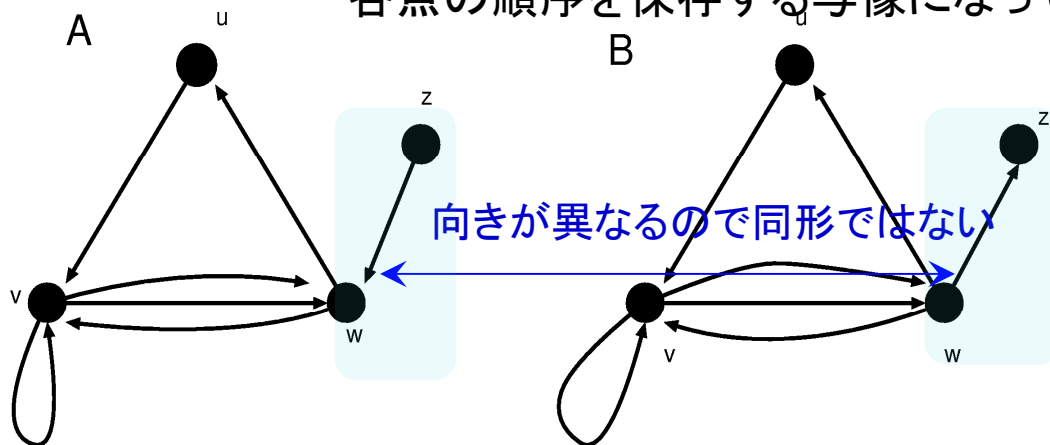
単純有向グラフの基礎グラフは必ずしも単純グラフでない



Dの基礎グラフ

# 有向グラフ：定義・性質 #2

有向グラフの同形：基本グラフの間に同形写像があり、  
各点の順序を保存する写像になっているとき

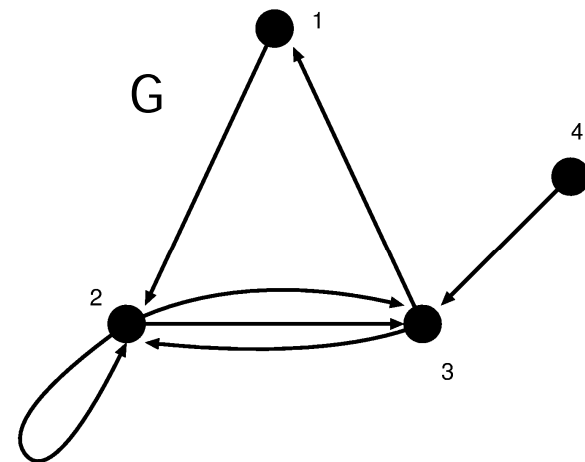


## 有向グラフの隣接行列：

$A = (a_{ij})$ : 要素  $a_{ij}$  が  $v_i$  から  $v_j$  への「弧」の本数を表す。  
点数  $n$  のグラフに対して  $n \times n$  の行列

グラフGの隣接行列  
一般に対称ではない

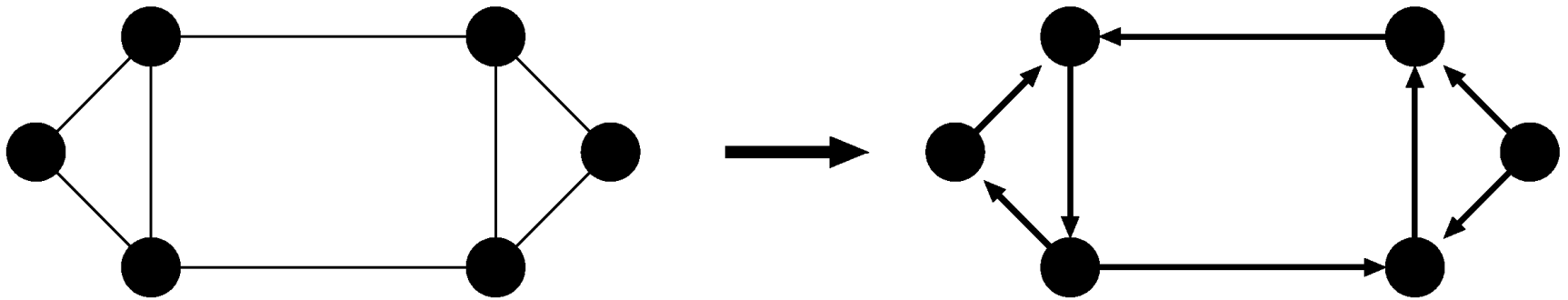
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



# 強連結と向き付け可能性

強連結 : 任意の2点  $v, w$  の間に点  $v$  から点  $w$  への道がある

向き付け可能 :  $G$  の全ての辺を方向付けて強連結有向グラフが得られると



向き付け可能なグラフの一例

# 定理22・1とその証明

連結グラフGが向き付け可能であるための必要十分条件は  
グラフGの各辺が少なくとも一つの閉路に含まれていることである

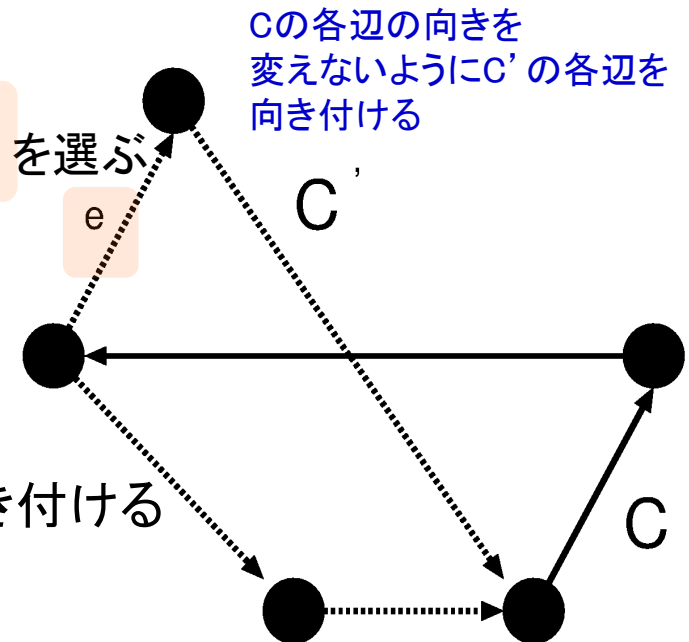
(証明) 必要性はあきらかなので、十分性を示す。

閉路Cには含まれないが、Cの書く辺に隣接している辺  $e$  を選ぶ

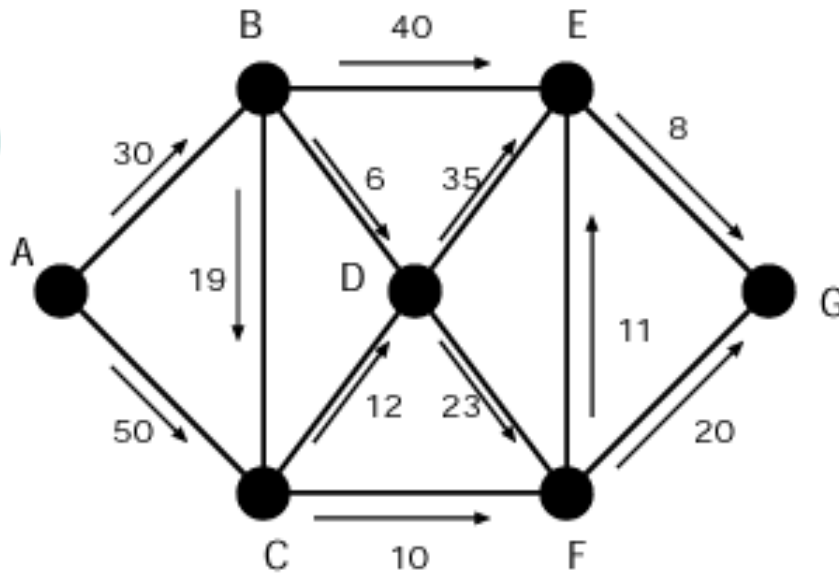
「グラフGの各辺は少なくとも一つの閉路に含まれる」  
ので、辺  $e$  はC以外の閉路  $C'$  に含まれる

Cの各辺の向きを変えないように、 $C'$ の各辺を向き付ける

この操作を続けて、各ステップで少なくとも1つの辺を  
向き付けると、各ステップで有向グラフは強連結なので、  
グラフ全体を向き付けたのちにできるグラフは強連結である。



# 例題10.1 (最長路を求める)



$$A: 0$$

$$B: l(A) + 30 = 30$$

$$C: l(A) + 50 = 50$$

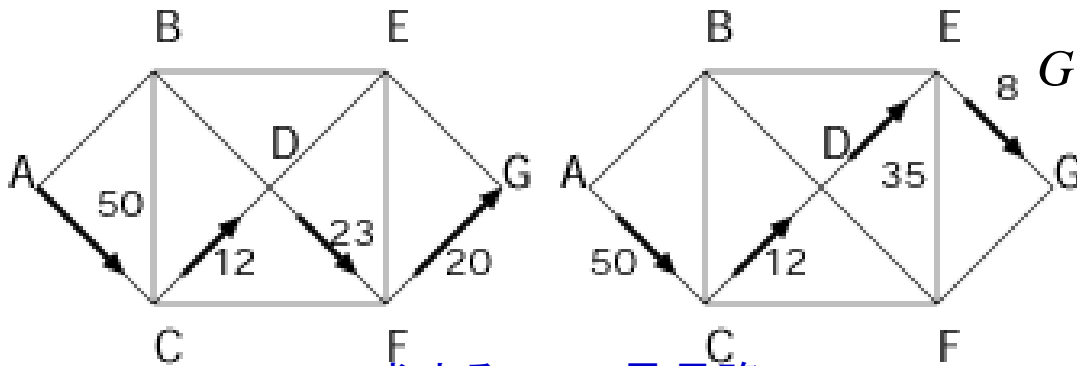
$$D: \max\{l(B) + 6, l(C) + 12\} \\ = \max\{36, 62\} = 62$$

$$F: \max\{l(D) + 23, l(C) + 10\} \\ = \max\{85, 60\} = 85$$

$$E: \max\{l(B) + 8, l(B) + 35, l(F) + 11\} \\ = \max\{70, 97, 96\} = 97$$

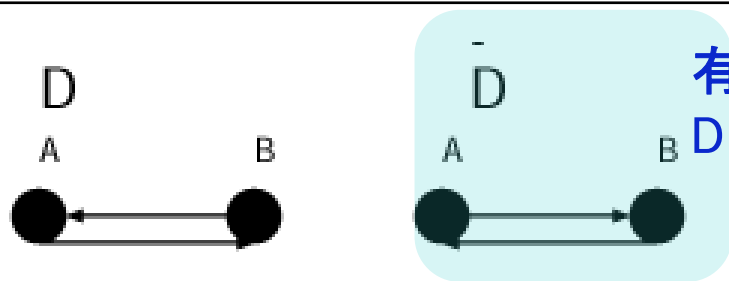
$$G: \max\{l(E) + 8, l(F) + 20\} \\ = \max\{105, 105\} = 105$$

最長路の長さ



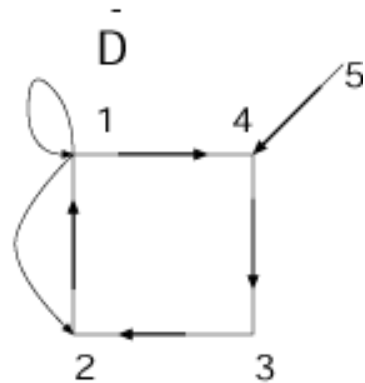
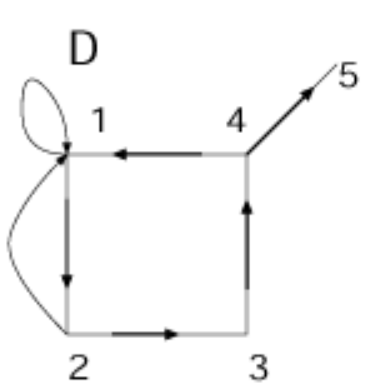
求まる2つの最長路

# 例題10.2 (有向グラフの逆)



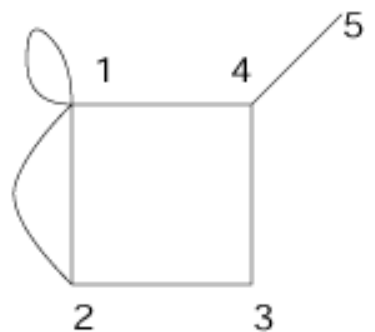
有向グラフDの逆：  
Dの向きを反転してできるグラフ

$$\mathbf{A}_D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\mathbf{A}_{\tilde{D}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



$$[\mathbf{A}_G]_{vw} = [\mathbf{A}_D + \mathbf{A}_{\tilde{D}}]_{vw}$$

$$2[\mathbf{A}_G]_{vv} = [\mathbf{A}_D + \mathbf{A}_{\tilde{D}}]_{vv}$$

一般に成り立つ

# オイラー有向グラフ

オイラー有向グラフ：全ての弧を含む閉じた小道が存在する連結有向グラフ

入次数  $\text{indeg}(v)$  :  $vw$  の形をした有向グラフ  $D$  の弧数

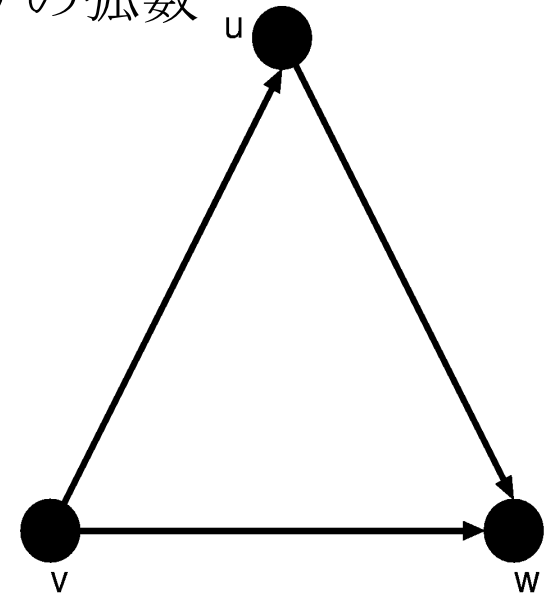
出次数  $\text{outdeg}(v)$  :  $wv$  の形をした有向グラフ  $D$  の弧数

## 握手有向補題

有向きグラフ  $D$  の全点について  
入次数の合計と出次数の合計は等しい

## 定理23・1

連結有向グラフ  $D$  がオイラーであるための必要十分条件は  $D$  の各点で  $\text{outdeg}(v) = \text{indeg}(v)$  が成立することである。



基礎グラフはオイラーであるが有向グラフとしてみるとオイラーではない例

# ハミルトン有向グラフ

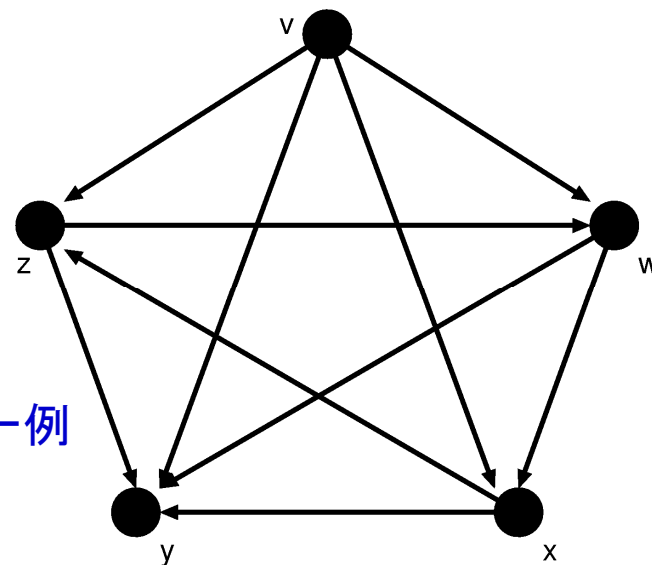
ハミルトン有向グラフ：全ての点を含む閉路がある有向グラフ

半ハミルトン有向グラフ：全ての点を通る道がある有向グラフ

$D$  は強連結有向グラフであり、点が  $n$  個あるとする。各点  $v$  に対し  $\text{out deg}(v) \geq n/2$  かつ  $\text{in deg}(v) \geq n/2$  ならば  $D$  はハミルトン有向グラフである。

**トーナメント：**  
任意の2点がちょうど1本の弧で結ばれる有向グラフ

トーナメントの一例



# 定理23・3

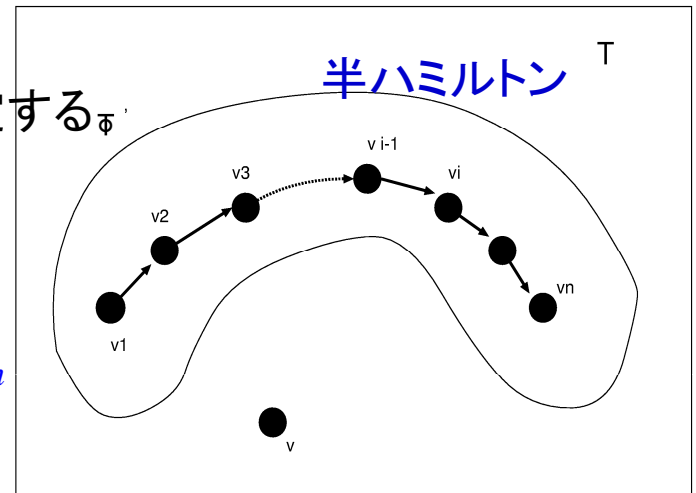
- (i) ハミルトンでないトーナメントは全て半ハミルトンである。
- (ii) 強連結なトーナメントは全てハミルトンである。

## ((i)の証明)

点 $n$ 個のトーナメントは全て半ハミルトンであると仮定する $\Phi'$   
 図の $T'$ には $n$ 個の点があるので半ハミルトンである。

これに点 $v$ を加える状況( $T$ )を考える

- (1)  $v \rightarrow v_1$ が $T$ の弧ならば  $v \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_n$ が所望の道である。

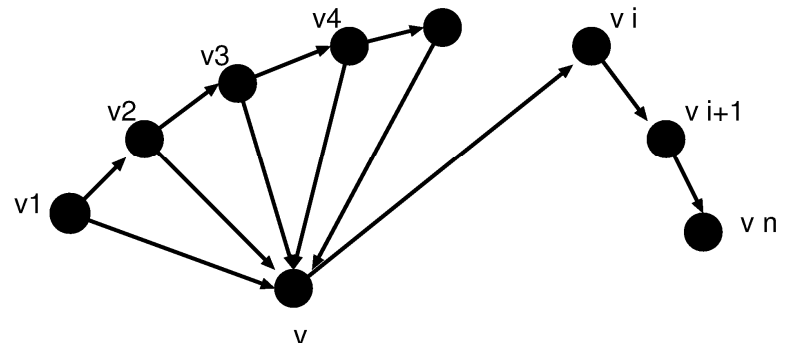


- (2)  $v \rightarrow v_1$ が $T$ の弧でなく、 $v_1 \rightarrow v$ が $T$ の弧ならば、図のように点 $v_i$ を選べばよい

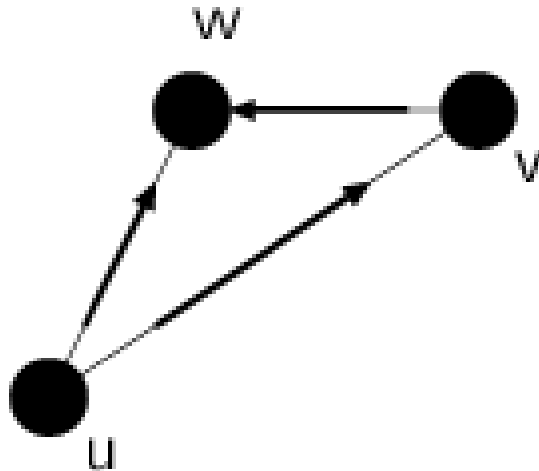
- (3)  $v \rightarrow v_i$ の形をした弧が $T$ に無ければ

$$v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_n \rightarrow v$$

が所望の道である。



# 例題10.3 (推移的トーナメント)



推移的トーナメントの一例

弧 $uv$ と $vw$ があれば必ず弧 $uw$ がある

1位 :  $\text{outdeg}(u) = 2, \text{indeg}(u) = 0$

2位 :  $\text{outdeg}(v) = 1, \text{indeg}(v) = 1$

3位 :  $\text{outdeg}(w) = 0, \text{indeg}(w) = 2$

outdegの多い順  
に強い

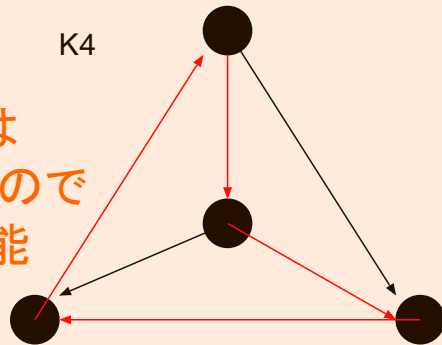
indegの少ない順  
に強い

推移的トーナメントであれば必ず  
 $\text{outdeg}(k) = 0$  となる点がある。

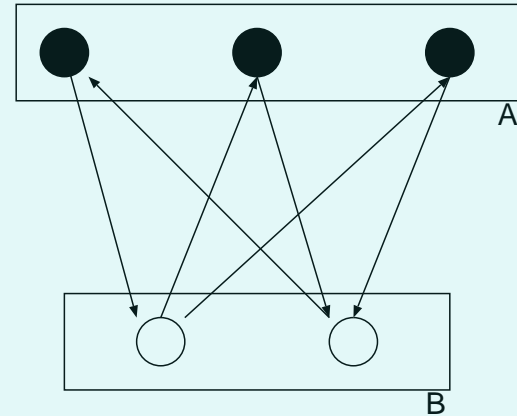
推移的トーナメントは  
強連結にはなり得な

# 例題10.4 (グラフの向き付け)

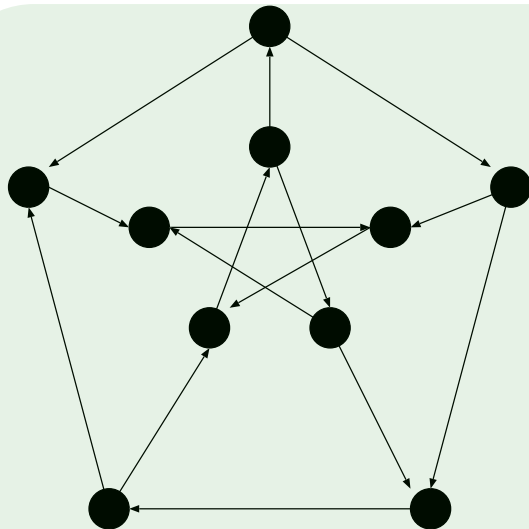
完全グラフは  
ハミルトンなので  
向き付け可能



$K_{2,3}$



各辺が少なくとも一つの閉路  
に含まれるので向き付け可能  
⇒ 定理 22.1



ピータースン・グラフの向き付け