



Title	2006年度 グラフ理論講義ノート
Author(s)	井上, 純一; Inoue, Jun-ichi
Description	<a href="http://www005.upp.so-net.ne.jp/j_inoue/index.html">http://www005.upp.so-net.ne.jp/j_inoue/index.html</a> <a href="http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/">http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/</a>
Issue Date	2006
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/15412">https://hdl.handle.net/2115/15412</a>
Rights(URL)	<a href="https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/">https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/</a>
Type	learning object
File Information	GraphTheory06_slide12.pdf, 第12回講義スライド



# グラフ理論 #12

第12回講義 7月10日

---

--- マルコフ連鎖 ---

情報科学研究科 井上純一

[http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j\\_inoue/](http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/)

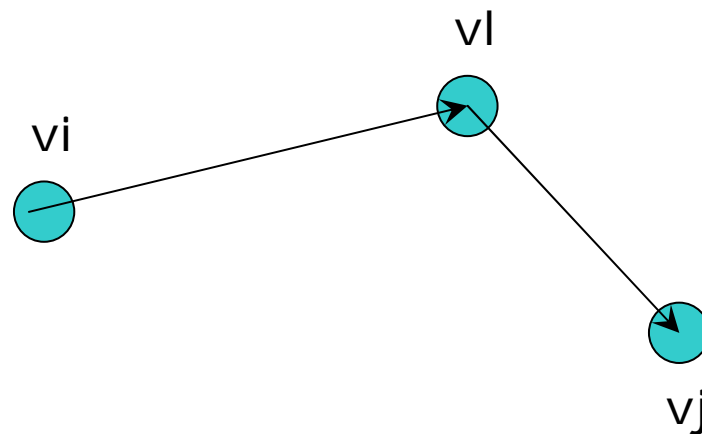
# 演習問題11 の解答例

隣接行列の自乗の(i,j)成分は

$$[A^2]_{ij} = \sum_{l=1}^n a_{il} a_{lj}$$

点  $v_i$  から点  $v_l$  へ至る弧の個数

点  $v_i$  から点  $v_l$  へ至る長さ2の弧の総数



$$[A^k]_{ij} = \sum_{l_1=1}^n \cdots \sum_{l_{k-1}=1}^n a_{il_1} a_{l_1 l_2} \cdots a_{l_{k-1} j}$$

点  $v_i$  から点  $v_l$  へ至る長さ  $k$  の弧の総数

# 一次元酔歩

酔っ払いが各時刻で左右にそれぞれ確率 $1/3$ ,  $1/2$ で動き  
確率 $1/6$ で現在の位置にとどまる

はじめ酔っ払いはE4にいたとすると、状態ベクトルは

$$\mathbf{x}_0 = (0, 0, 0, 1, 0, 0)$$

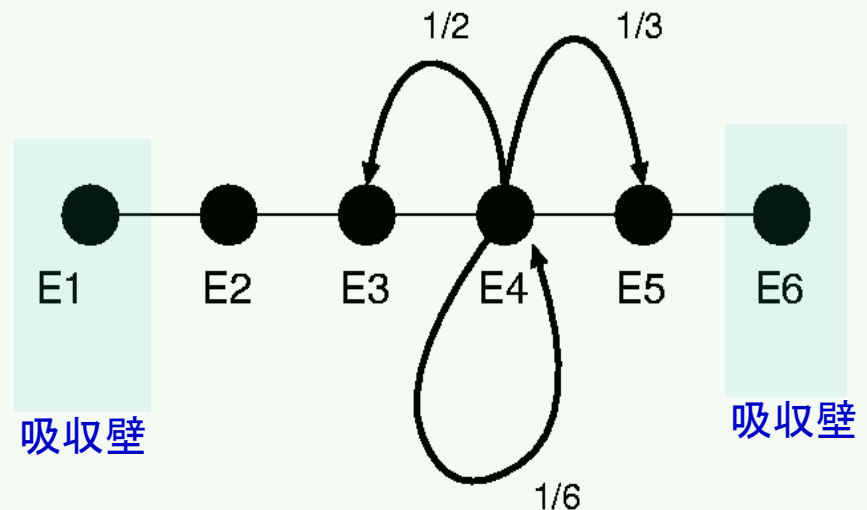
時刻 $t=0$ にE4にいる確率が1

1, 2分後には

$$\mathbf{x}_1 = \left( 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, 0 \right)$$

$$\mathbf{x}_2 = \left( 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{13}{36}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9} \right)$$

酔っ払いの動きの有向グラフ表現



# 遷移行列

遷移行列

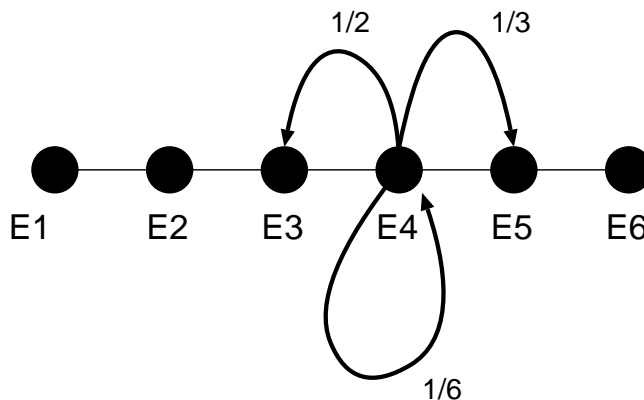
$$\mathbf{P} = \left( P_{ij} \right)$$

単位時間間隔で酔っ払いが  
状態  $E_i$  から  $E_j$  へ移動する確率を第  $j$  成分とする行列

いまの例の場合には

各行の和は1

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



各単位時間間隔の状態は遷移行列で結ばれる

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 \mathbf{P}$$

成分のひとつを書き出してみると

$$p_1^1 = p_0^1 + \frac{1}{2} p_0^2$$

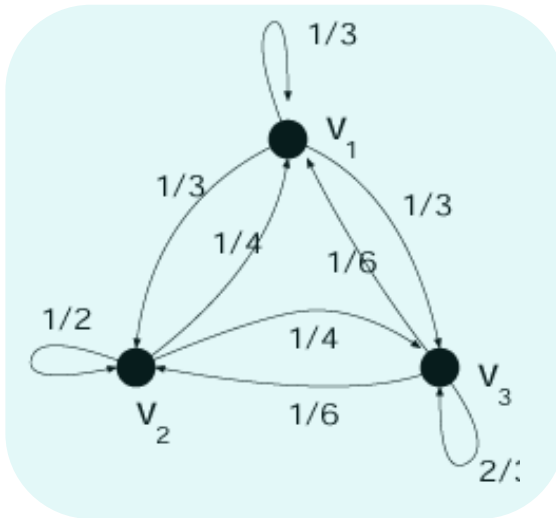
E1にいた場合には確率1でE1に留まる

E2にいた場合には確率1/2でE1に移る

具体例を例題を通じて見ていく

# 例題10.5

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

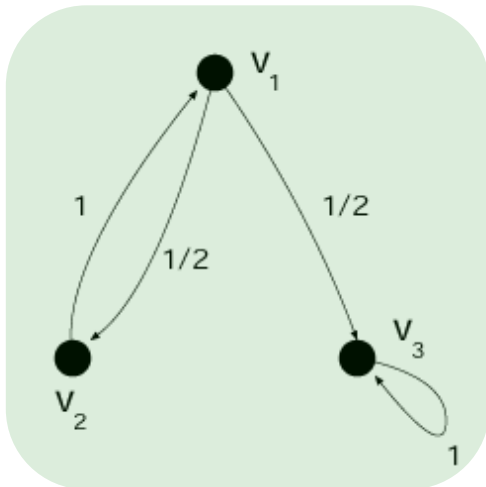


$$(p_{v_1}(1), p_{v_2}(1), p_{v_3}(1))$$

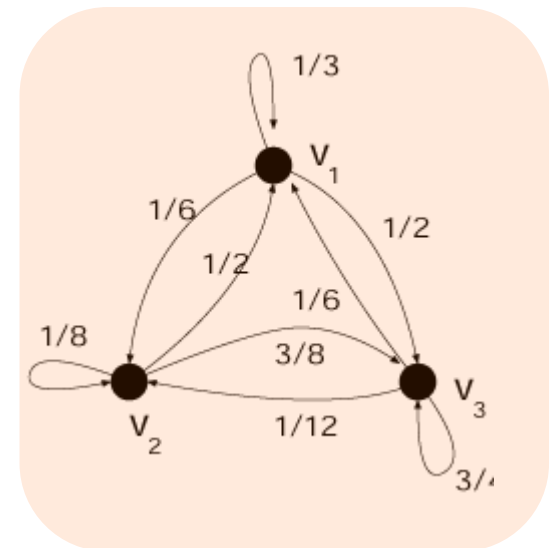
$$= (1, 0, 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

はじめ  $v_1$  にいる  
次ステップで各点にいる確率

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

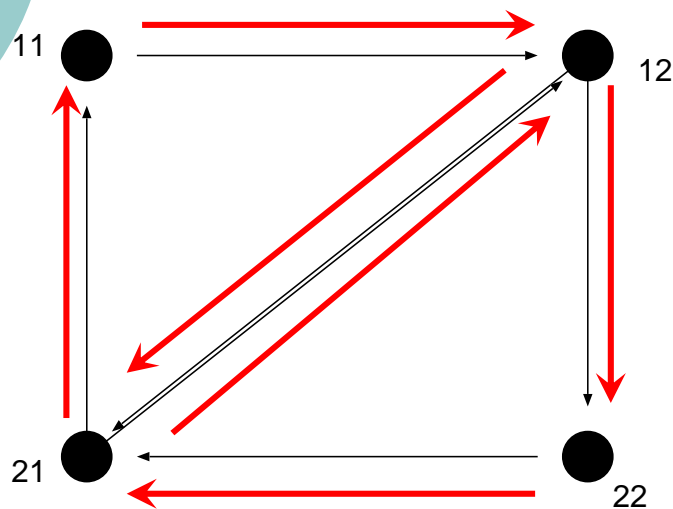


$$\mathbf{PQ} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$



# 例題10.6の1

{11,12,21,22}が $j = k$ のときのみ、点 $ij$ と点 $kl$ が結ばれる



具体的なオイラー小道

$$\text{outdeg}(11) = 1 = \text{indeg}(11)$$

$$\text{outdeg}(12) = 2 = \text{indeg}(12)$$

$$\text{outdeg}(21) = 2 = \text{indeg}(21)$$

$$\text{outdeg}(22) = 1 = \text{indeg}(22)$$

オイラー小道が存在する 定理23.1

# 例題10.6の2

遷移行列

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

状態ベクトル

$$\mathbf{x}^n = (p_a(n), p_b(n), p_c(n))$$

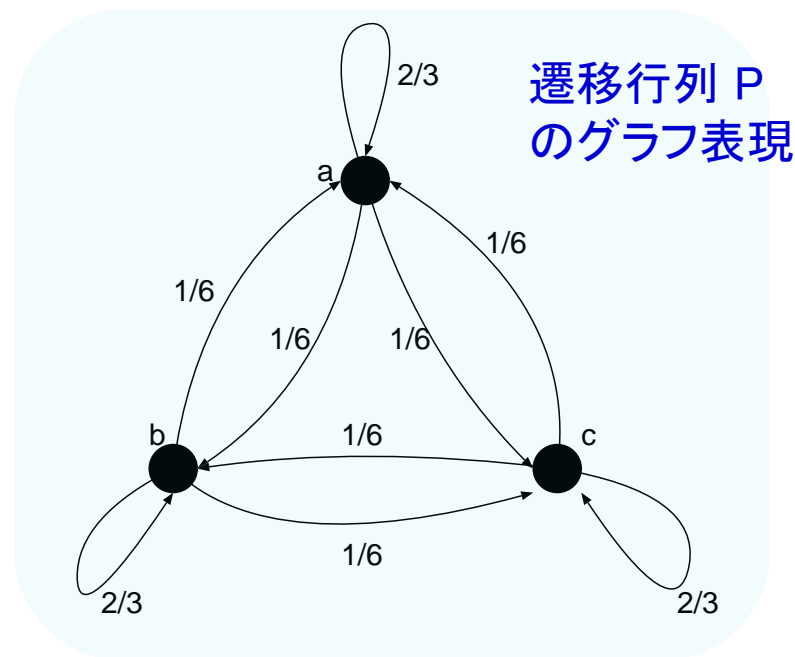
$$\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n \mathbf{P}$$

状態方程式

状態ベクトルの一般項

$$(p_a(n), p_b(n), p_c(n)) = \left( \frac{1}{3}(1 - 2^{-n}), \frac{1}{3}(1 + 2^{1-n}), \frac{1}{3}(1 - 2^{-n}) \right)$$

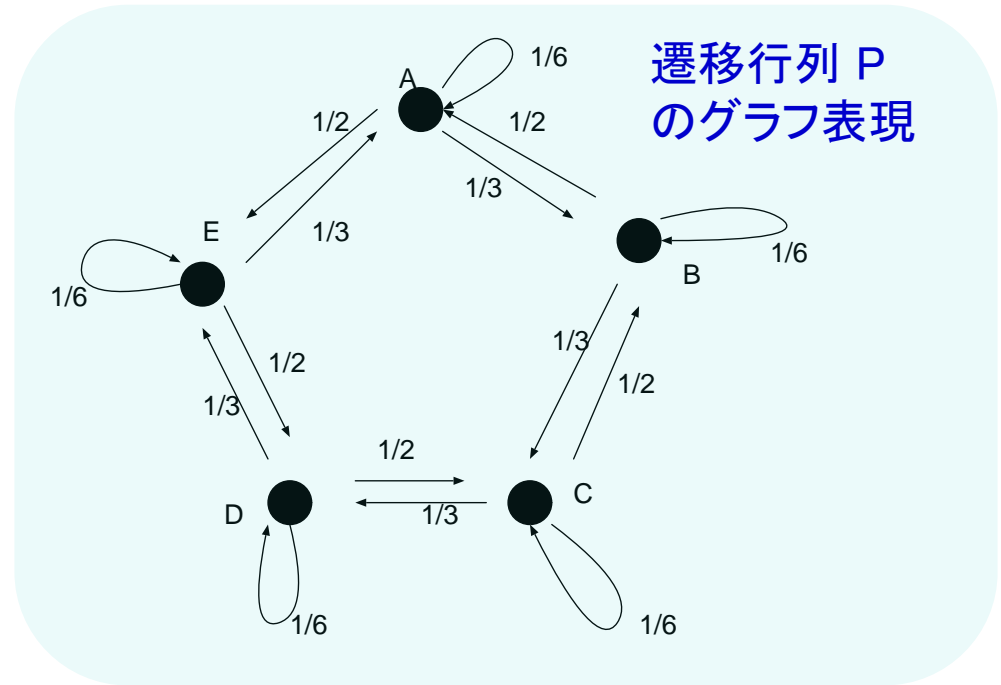
詳細は講義ノート



# 例題10.7

遷移行列

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$



$$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} \frac{13}{36} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{13}{36} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{13}{36} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{13}{36} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{13}{36} \end{pmatrix}$$



$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}^n$  の行列要素は全て正

各状態は永続的かつ非周期的なので  
このマルコフ連鎖はエルゴード的である