HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	2006年度 グラフ理論講義ノート
Author(s)	井上, 純一; Inoue, Jun-ichi
Description	http://www005.upp.so-net.ne.jp/j_inoue/index.html http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/
Issue Date	2006
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/15412
Rights(URL)	https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/
Type	learning object
File Information	GraphTheory06_slide2.pdf, 第2回講義スライド

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

グラフ理論　#2

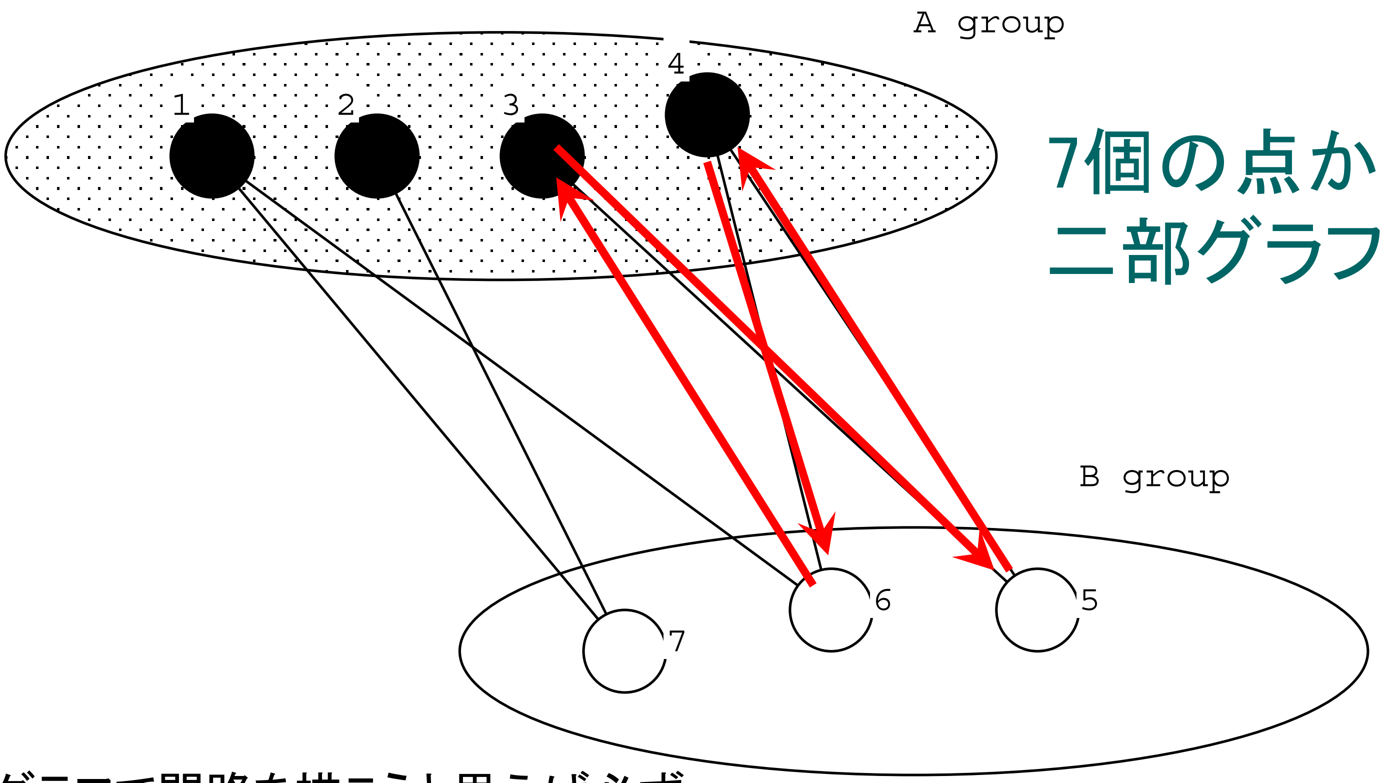
第2回講義　4月17日

––– 定義と例 –––

情報科学研究科　　井上純一

http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

演習問題1 (2)の解答例



7個の点からなる二部グラフの例

二部グラフで閉路を描こうと思えば必ず

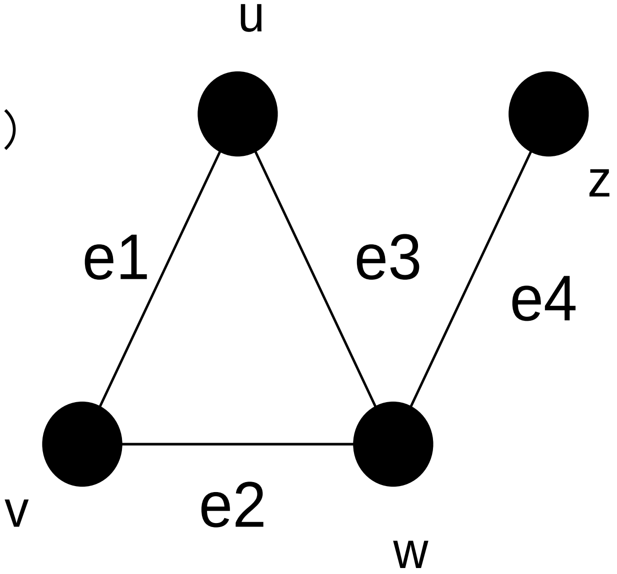
A ⇒ B ⇒ A ⇒ ・・・ ⇒ A となる

⇒の数（辺の数）は必ず偶数回現れる

単純グラフ

単純グラフ：グラフにループが含まれず、頂点のどの対も高々1つのリンクで結ばれているグラフ

例）



グラフGの**点集合**（vertex set）

V(G)={u,v,w,z}

E(G)={uv,vw,vw,wz}

グラフGの**辺集合**（edge set）

ψ_G：グラフGの**接続関数** ⇒ Gの各辺にGの頂点の対を対応させる関数

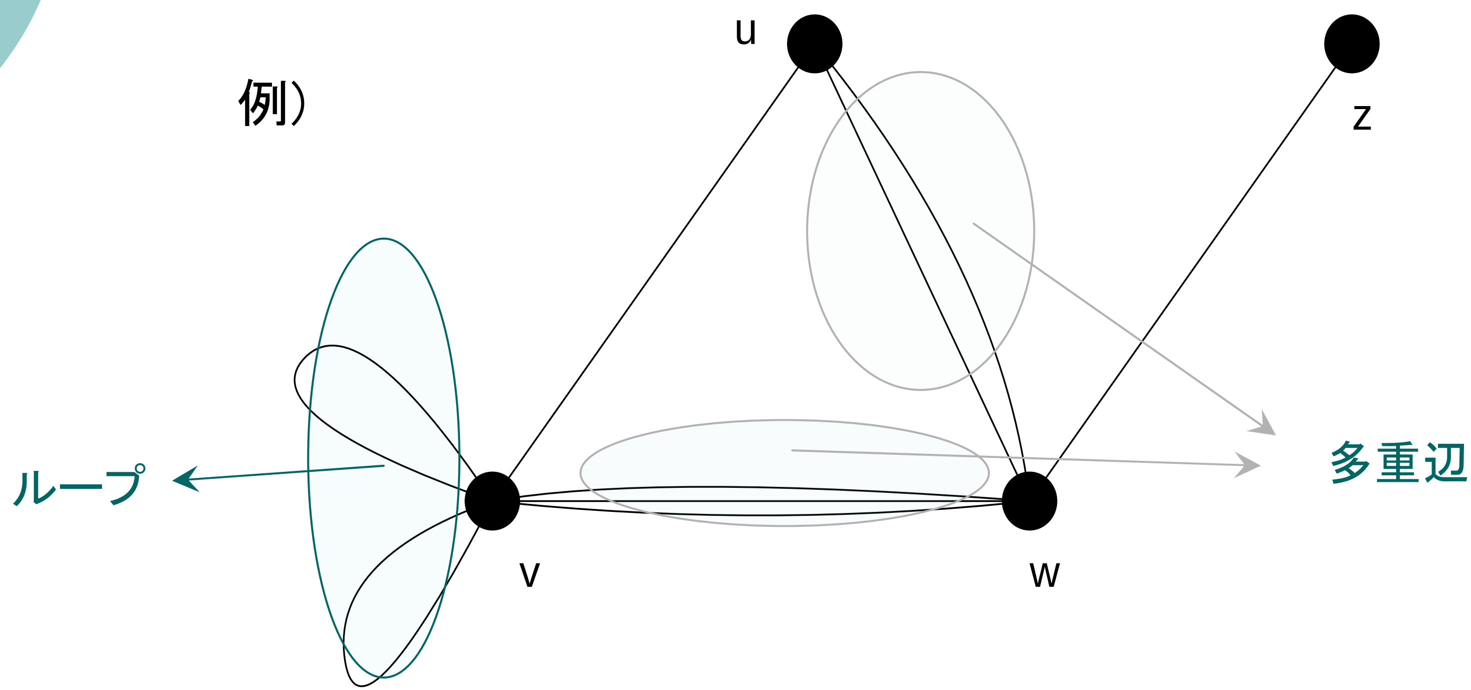
$$\psi_G(e_1) = uv,\ \ \psi_G(e_2) = vw$$
$$\psi_G(e_3) = wu,\ \ \psi_G(e_4) = wz$$

例)の場合の接続関数

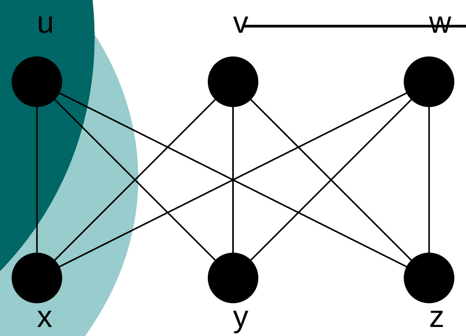
一般グラフ (⇔単純グラフ)

一般グラフ (general graph) : ループや多重辺も許されたグラフ

例)



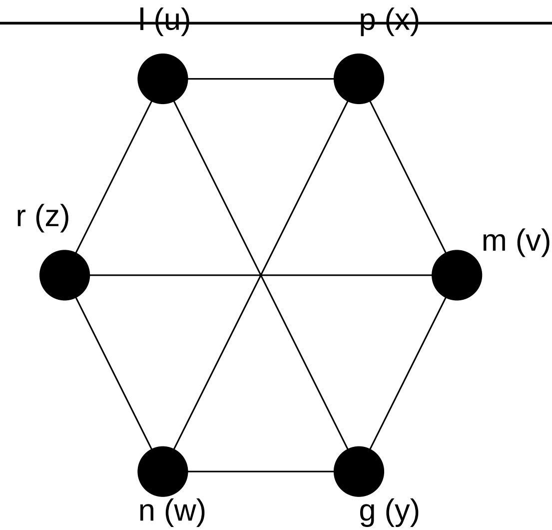
同形と同形写像



G1

完全二部グラフ

$K_{3,3}$



G2

2つのグラフ G_1, G_2 が同形であるとき

1対1写像：

$$\theta : V(G_1) \to V(G_2)$$

$$\phi : E(G_1) \to E(G_2)$$

が次を満たす

$$\psi_{G_1}(e) = uv \Leftrightarrow \psi_{G_2}(\phi(e)) = \theta(u)\theta(v)$$

接続関数

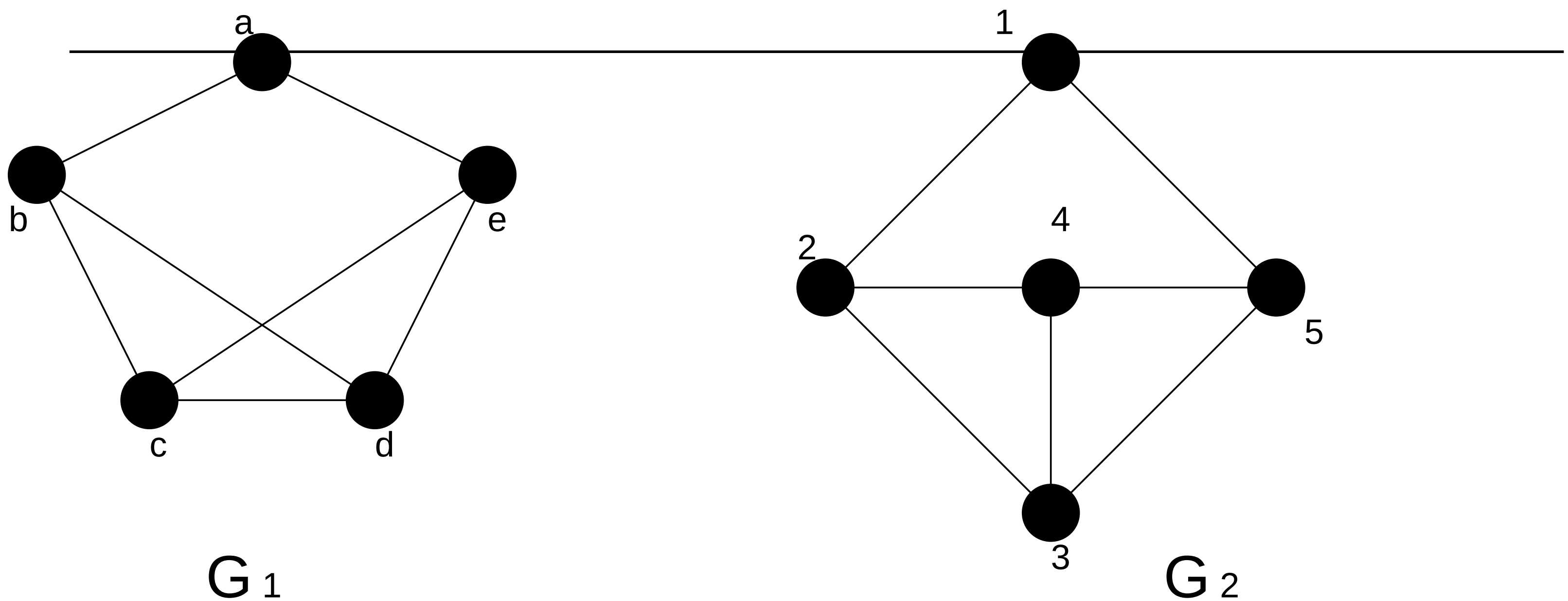
上の例では

$$\theta(u) = l, \theta(v) = m, \theta(w) = n, \theta(x) = p, \theta(y) = q, \theta(z) = r$$

$$\phi(\overline{ux}) = \overline{lp} = \overline{\theta(u)\theta(x)}, \phi(\overline{uz}) = \overline{lr} = \overline{\theta(u)\theta(x)}, \ldots\ldots$$

となり、次が成立 ⇒ $\psi_{G_1}(\overline{ux}) = ux \Leftrightarrow \psi_{G_2}(\phi(\overline{ux})) = lp = \theta(u)\theta(x), \ldots.$

例題2.2の1.



点について　$\theta(a)=1, \theta(b)=2, \theta(c)=3, \theta(d)=4, \theta(e)=5$

辺について　$\phi(\overline{ab})=\overline{12}, \phi(\overline{bc})=\overline{23}, \phi(\overline{cd})=\overline{34}, \phi(\overline{bd})=\overline{24}$

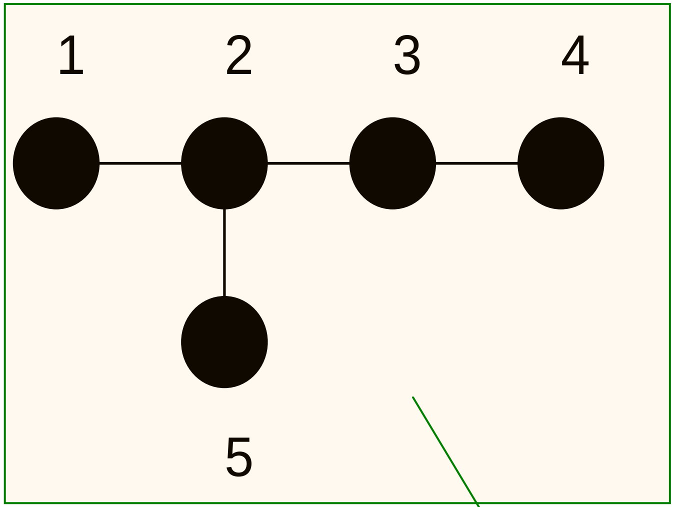
$\phi(\overline{de})=\overline{45}, \phi(\overline{ce})=\overline{35}, \phi(\overline{ea})=\overline{51}$

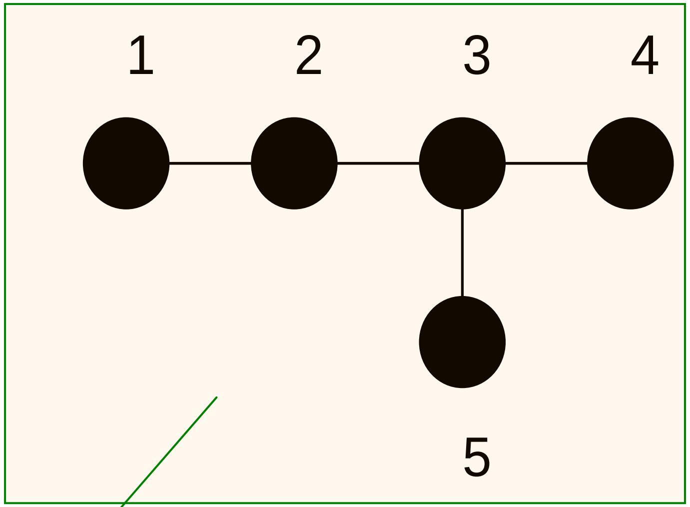
$$\psi_{G_1}(\overline{ab})=ab \Leftrightarrow \psi_{G_2}(\phi(\overline{ab}))=\psi_{G_2}(\overline{12})=\theta(a)\theta(b)$$

等が成り立ち、同形写像が存在する。

ラベル付きグラフ・ラベルなしグラフ

ラベル付きグラフ：各点に名前のついたグラフ

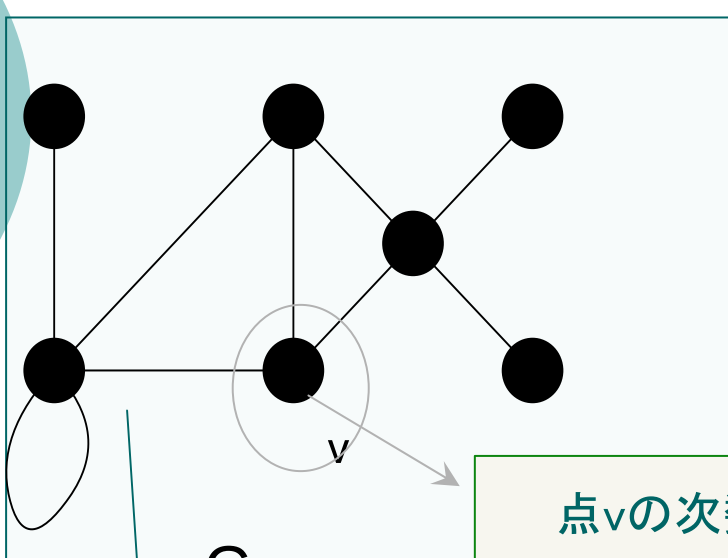




ラベル付きグラフとして扱う場合には、これら2つの木は別個の木となる

次数および次数列

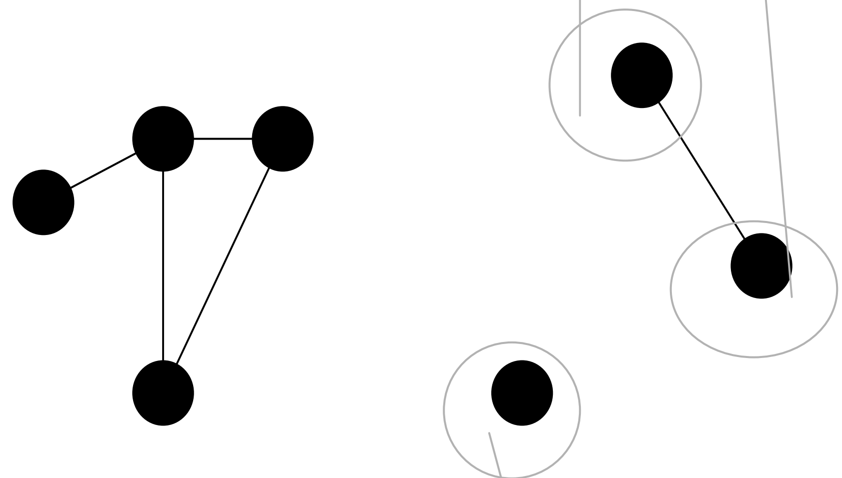
端点 (edge vertex)
: 次数1の点



点vの次数

$\deg(v) = 3$

G 1



G 2

孤立点 (isolated vertex)
: 次数ゼロの点

次数列は

グラフの次数列： 次数を増加順に記したもの

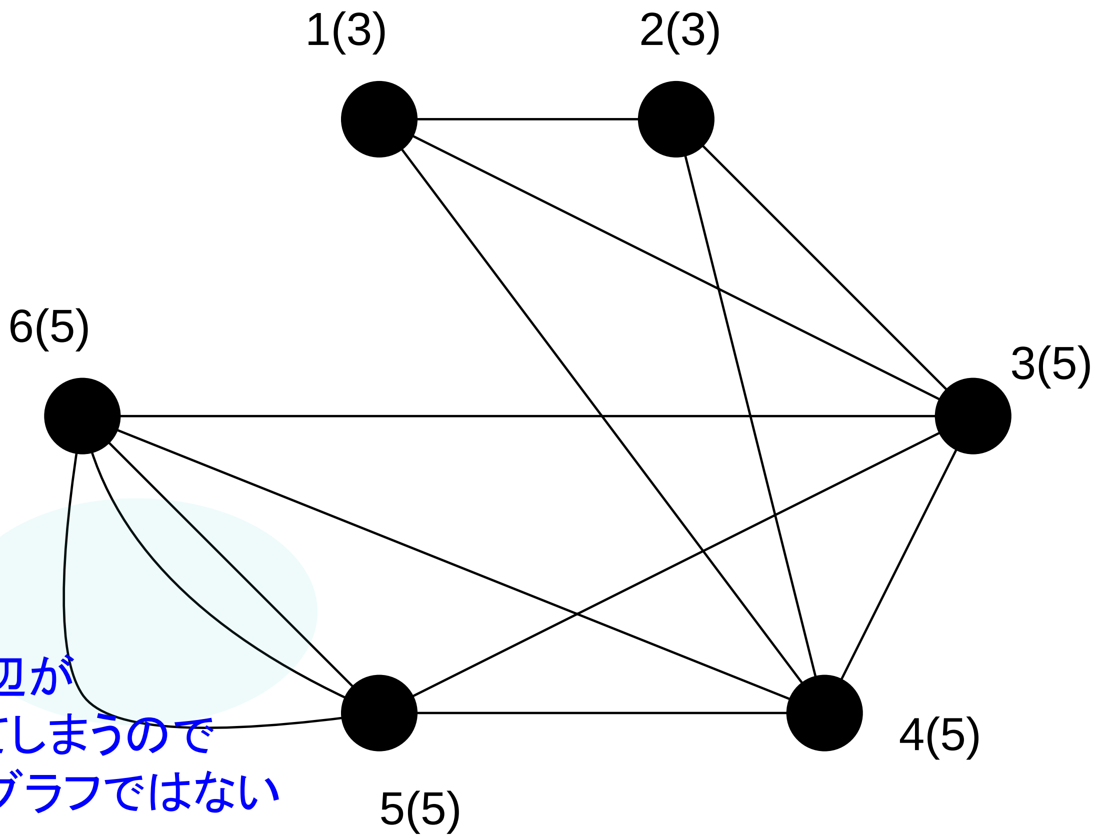
$$(1,1,1,3,3,4,5)$$

⇒ 逆にグラフが描けるような数列のことを、その数列は「**グラフ的**」であると言う

例題2.3の(3)

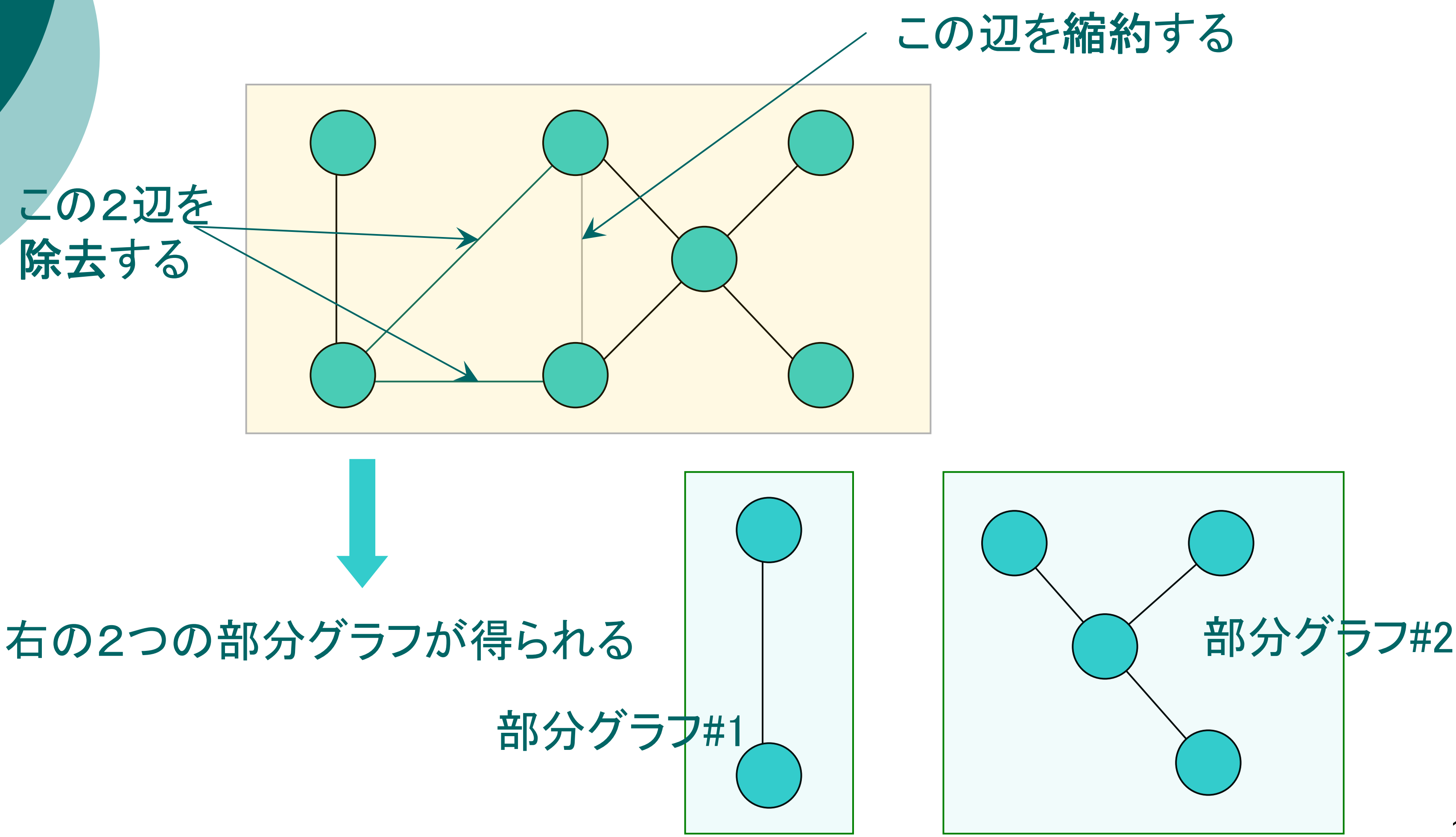
各点の次数列が(3,3,5,5,5,5)であるものを描け

「ベクトル」の成分が6個なので6点からなるグラフ



多重辺が
できてしまうので
単純グラフではない

部分グラフ

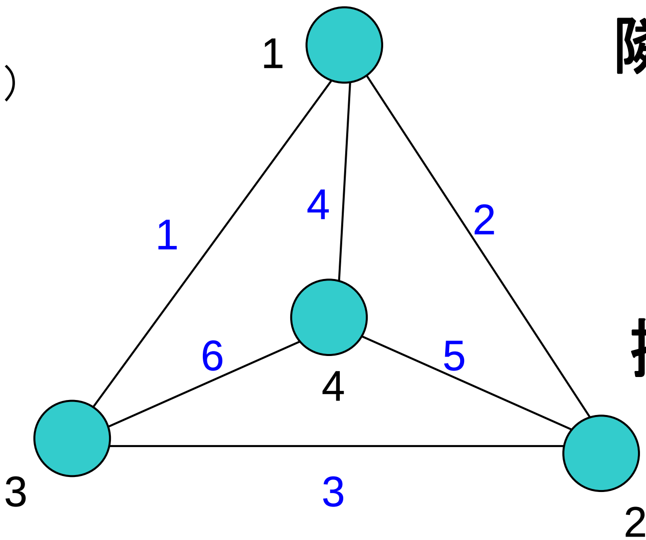


グラフの行列表現

点数 n 変数 m のグラフに対して

隣接行列：点 i と点 j を結ぶ辺の本数を第 ij 要素とする n x n の行列
接続行列：点 i が辺 j に接続している場合、第 ij 要素が1であり、接続していなければ0
である　n x m　の行列

例）



次数列は(3,3,3,3)

隣接行列

ループが無いので対角要素はゼロ

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0\,1\,1\,1 \\ 1\,0\,1\,1 \\ 1\,1\,0\,1 \\ 1\,1\,1\,0 \end{pmatrix}$$

和3は点1の次数

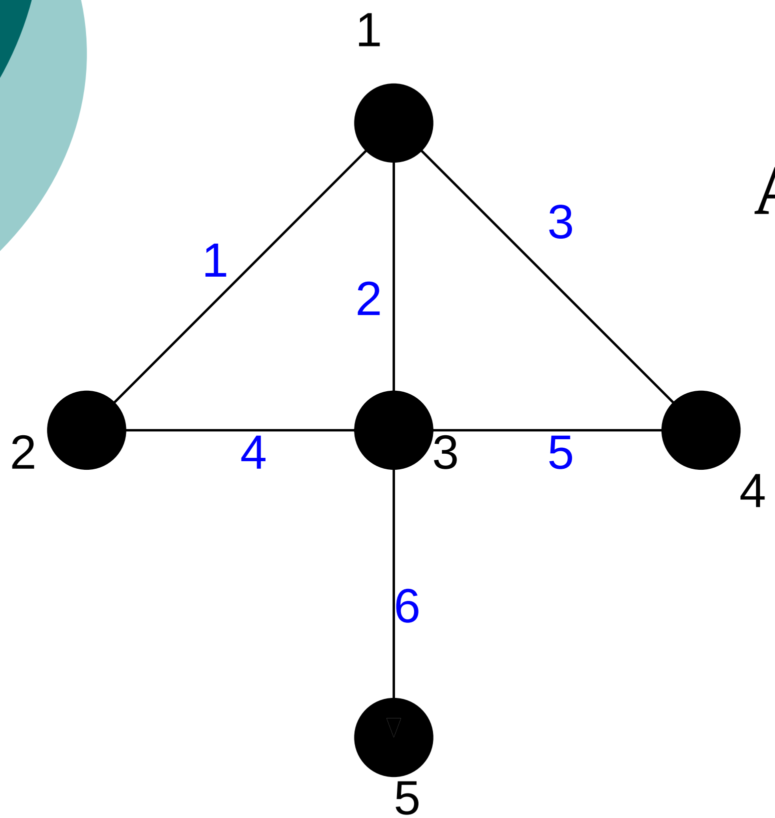
対称行列

接続行列

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1\,1\,0\,1\,0\,0 \\ 0\,1\,1\,0\,1\,0 \\ 1\,0\,1\,0\,0\,1 \\ 0\,0\,0\,1\,1\,1 \end{pmatrix}$$

握手補題から
この和は必ず2

例題2.3の(2)



$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0\,1\,1\,1\,0 \\ 1\,0\,1\,0\,0 \\ 1\,1\,0\,1\,1 \\ 1\,0\,1\,0\,0 \\ 0\,0\,1\,0\,0 \end{pmatrix}$$

点1につながっている
点は2,3,4なので
1x2,1x3,1x4成分に
1が立っている

隣接行列

点1につながっている
辺は1,2,3なので
1x1,1x2,1x3に1が立っている

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1\,1\,1\,0\,0\,0 \\ 1\,0\,0\,1\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,1\,1\,1 \\ 0\,0\,1\,0\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0\,1 \end{pmatrix}$$

接続行列