



Title	2006年度 グラフ理論講義ノート
Author(s)	井上, 純一; Inoue, Jun-ichi
Description	<a href="http://www005.upp.so-net.ne.jp/j_inoue/index.html">http://www005.upp.so-net.ne.jp/j_inoue/index.html</a> <a href="http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/">http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/</a>
Issue Date	2006
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/15412">https://hdl.handle.net/2115/15412</a>
Rights(URL)	<a href="https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/">https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/</a>
Type	learning object
File Information	GraphTheory06_slide5.pdf, 第5回講義スライド



# グラフ理論 #5

第5回講義 5月8日

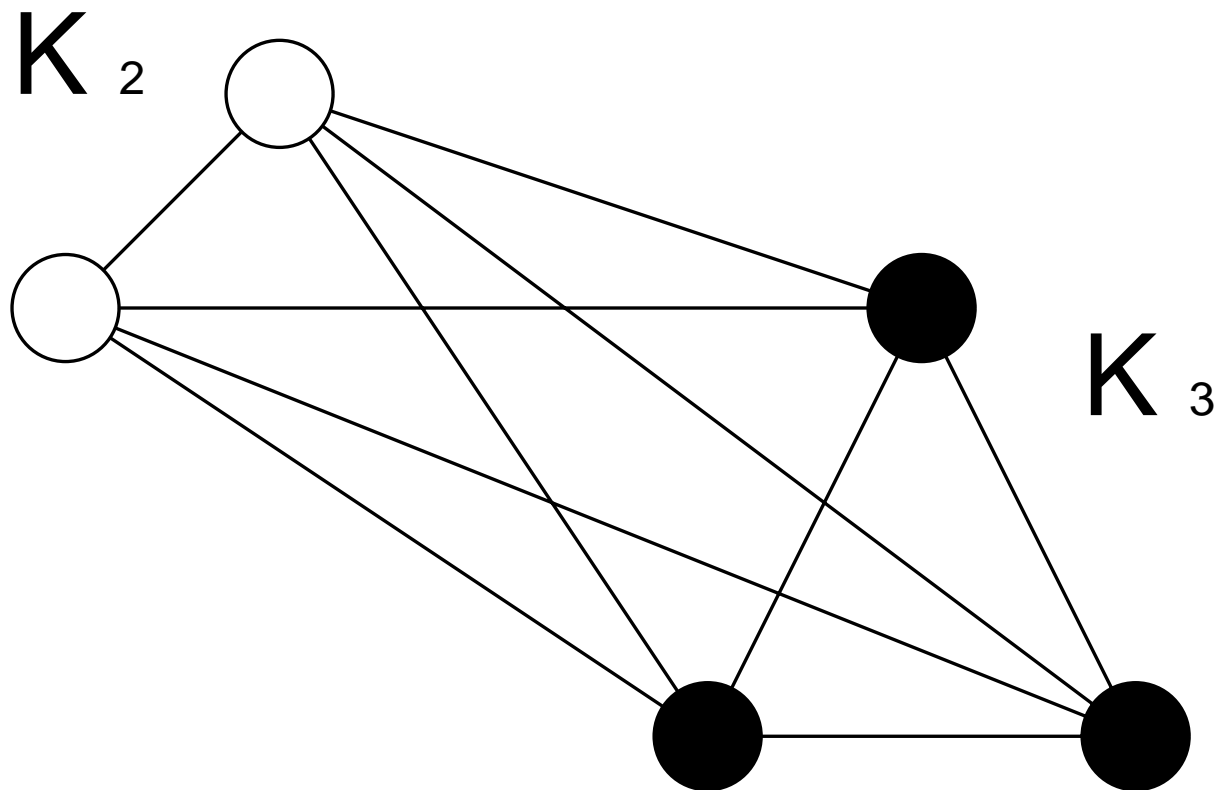
---

--- オイラー・グラフとハミルトン・グラフ ---

情報科学研究科 井上純一

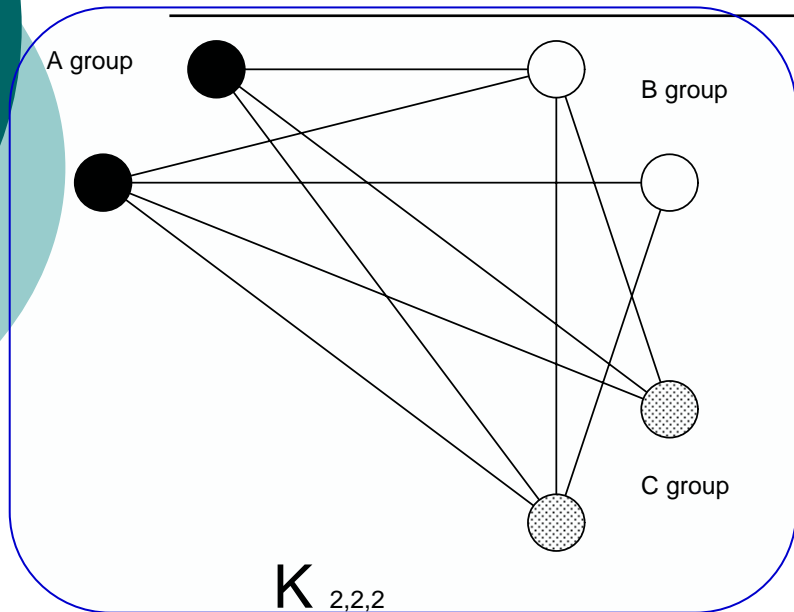
[http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j\\_inoue/](http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/)

# 演習問題3 (1)の解答例

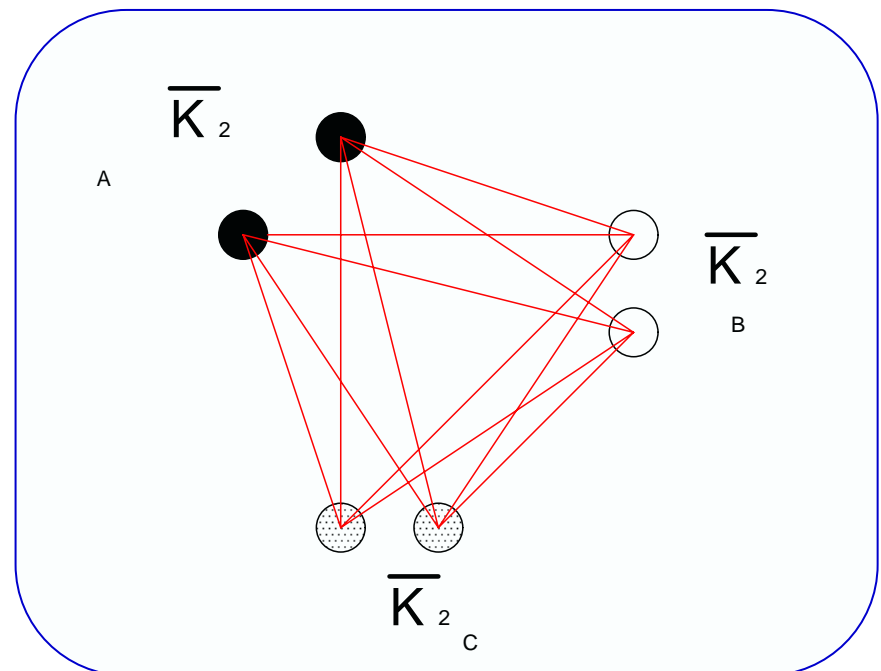
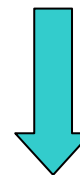


$K_2$ と $K_3$ の結び $K_2 + K_3$

# 演習問題3 (2)の解答例



← この両者は同形である



$$E(\overline{K}_2 + \overline{K}_2 + \overline{K}_2)$$

$$= \{u_A u_B \mid u_A \in V(A) \cap u_B \in V(B)\}$$

$$\cup \{u_B u_C \mid u_B \in V(B) \cap u_C \in V(C)\}$$

$$\cup \{u_C u_A \mid u_C \in V(C) \cap u_A \in V(A)\}$$

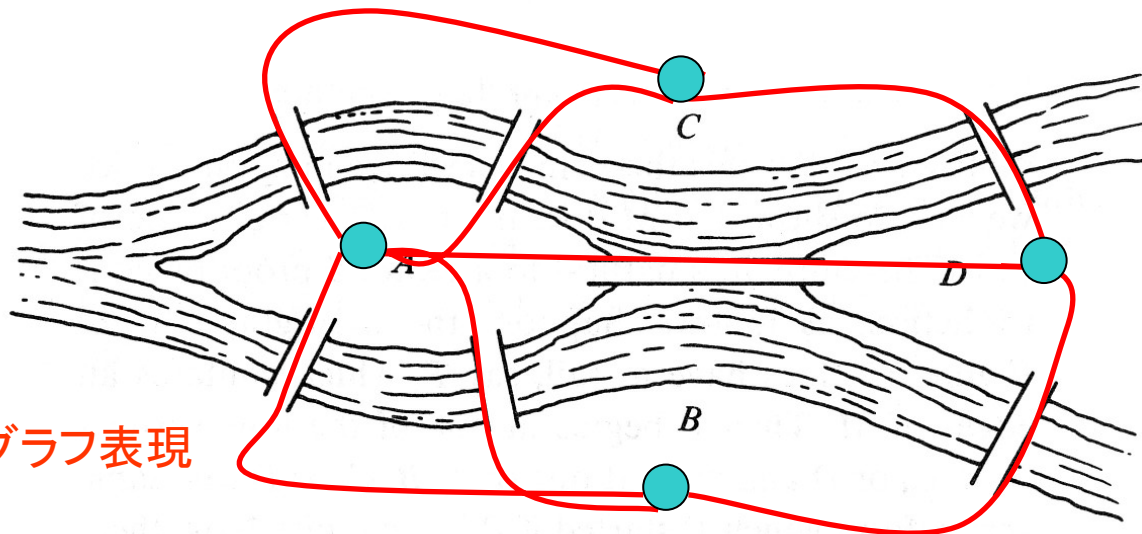
# ケーニヒスベルグ橋の問題



全ての橋を1回ずつ通ってもとにもどる閉路が存在するか？

点Aから出発し、全ての辺を1度ずつ通って点Aにもどる閉路はあるか？

“Introductory  
Graph Theory”  
G. Chartrandより

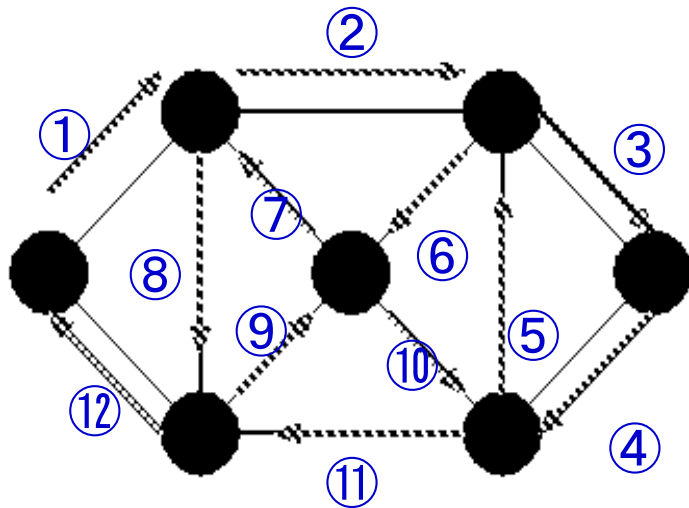


問題のグラフ表現

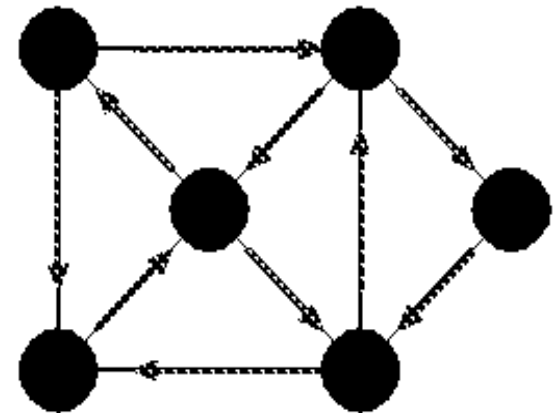
# オイラー・グラフ

オイラー・グラフ (Eulerian graph) : 全ての辺を含む閉じた小道がある連結グラフ

半オイラー・グラフ(semi-Eulerian graph) : 全ての辺を含む小道がある連結グラフ  
(閉じてなくてもよい)



Eulerian graph



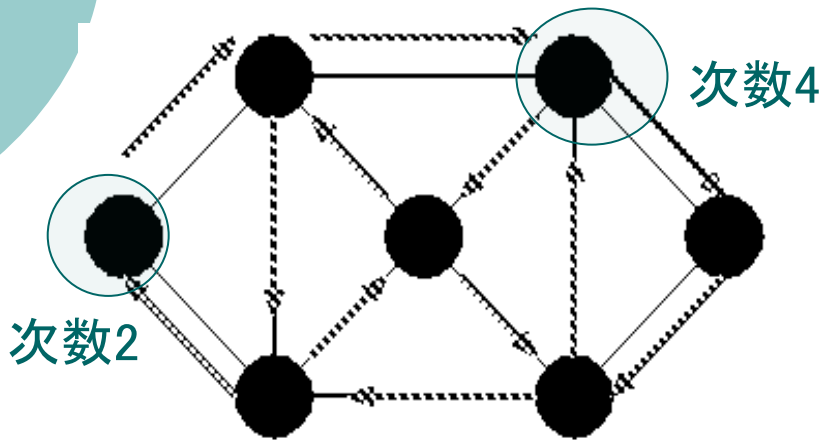
閉じない

Semi-Eulerian graph

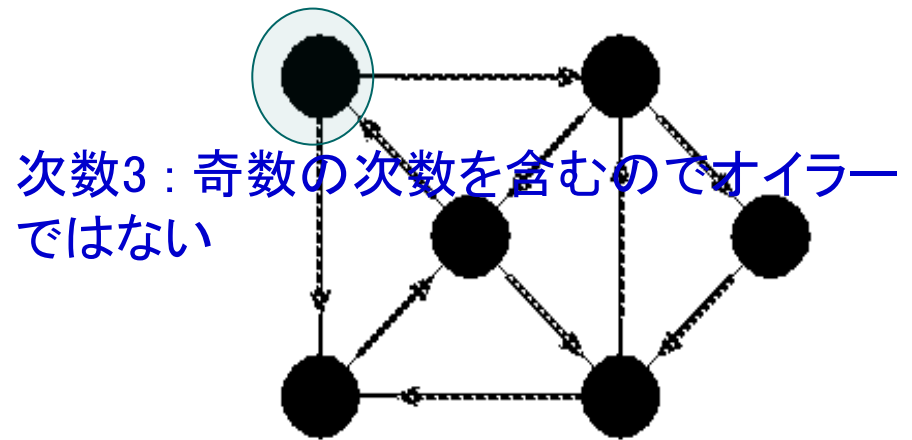
⇒ オイラー・グラフである条件は何か？

# 定理6・2とその証明 #1

連結グラフGがオイラー・グラフであるための必要条件はGの各点の次数が全て偶数であることである。



Eulerian graph



Semi-Eulerian graph

(証明)

必要性  $\Rightarrow$  Gのオイラー小道がある点を通過する毎に2を加えていくと、全ての辺はちょうど1回ずつ含まれるので、各点でこの和はその点の次数に等しく、それは偶数。

# 定理6・2とその証明 #2

(証明)  
十分性 (アウトライン) ←

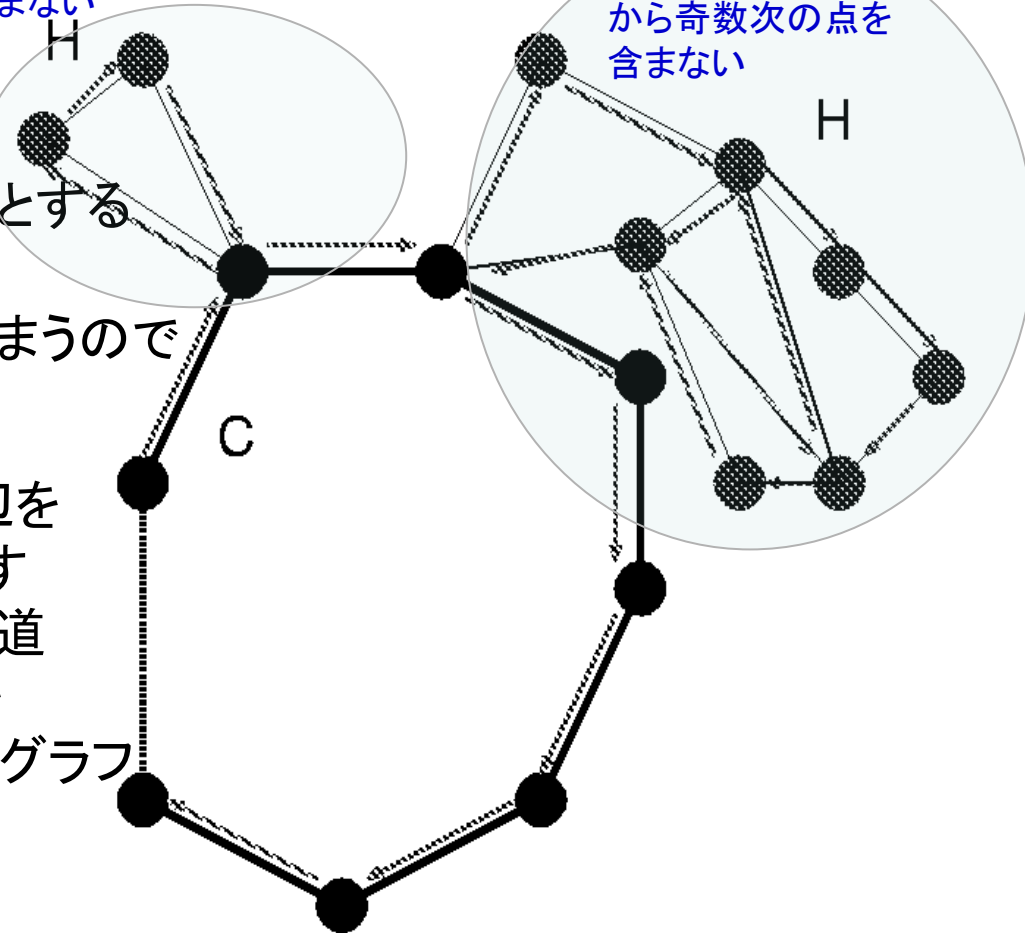
オイラー小道である  
から奇数次の点を  
含まない

オイラー小道である  
から奇数次の点を  
含まない

各点の次数が偶数であり、連結ならば  
必ず閉路を含む(補題 6・1)。これをCとする

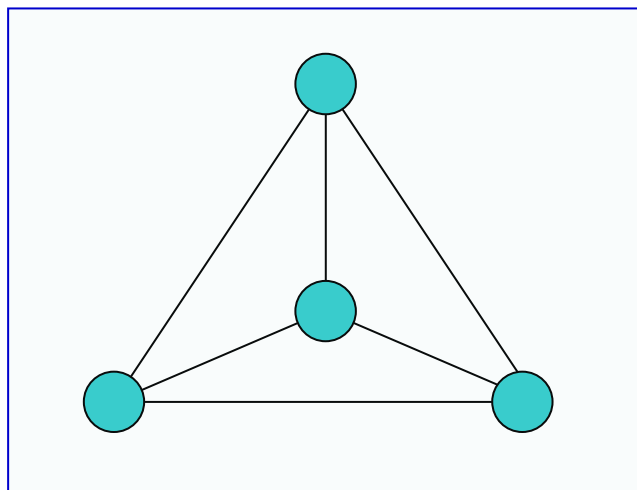
$G \subset C$  なら証明が終わってしまうので  
これは考えない。

C上の任意の点からスタートし、Cの辺を  
たどり、Hの孤立点でない点に出くわす  
たびに、その点を含むHのオイラー小道  
をたどり、その点に戻る・・・とう操作を  
行い、スタート点に戻れば、オイラー・グラフ  
が得られる。

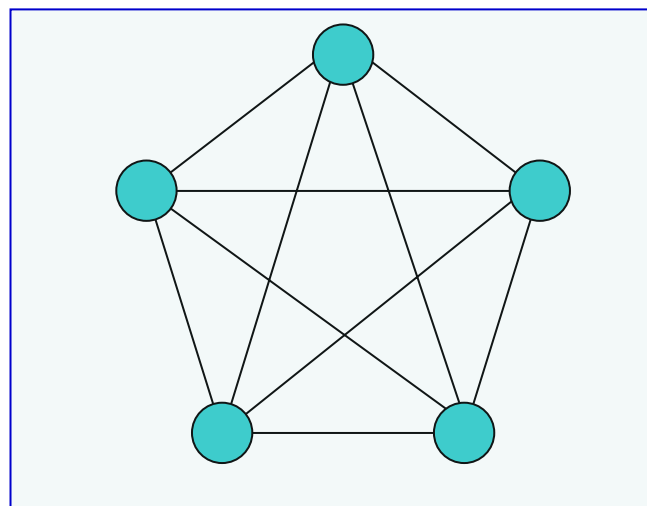


# 例題 6.1 (1)

---



オイラー・グラフでない



オイラー・グラフである

完全グラフの場合には

$$n - 1 = \text{偶数}$$

つまり、点数が奇数の場合に限り、オイラー・グラフとなる。

# 例題 6.1 (2)

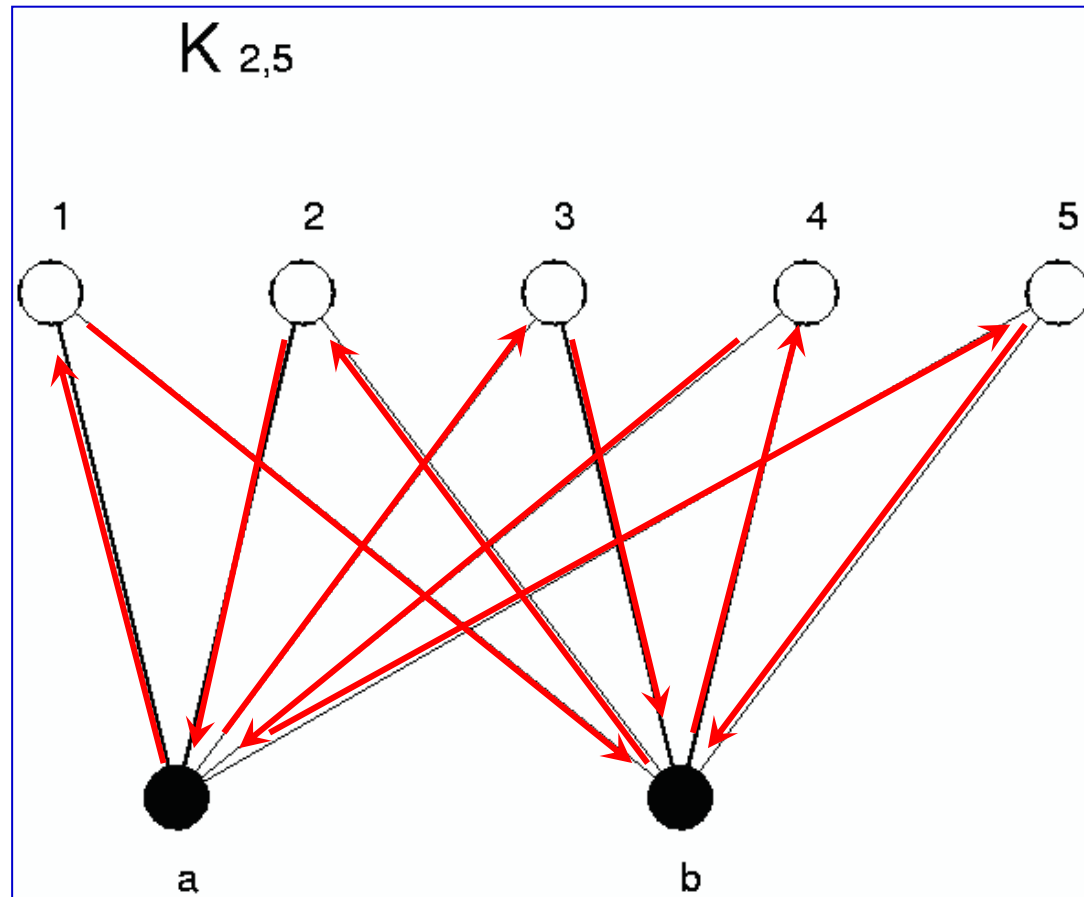
$K_{s,t}$  に関しては

$s \geq 2$ , かつ,  $t$  が奇数ならば

$a \rightarrow 1 \rightarrow b \rightarrow 2 \rightarrow a \rightarrow 3 \rightarrow b \rightarrow 4 \rightarrow a$   
 $\rightarrow 5 \rightarrow b$

のような経路でオイラー小道を作  
ることは可能。

オイラー閉路をもつオイラーグラフ  
になるためには、 $t$  が偶数である  
が必要になる



半オイラー・グラフ

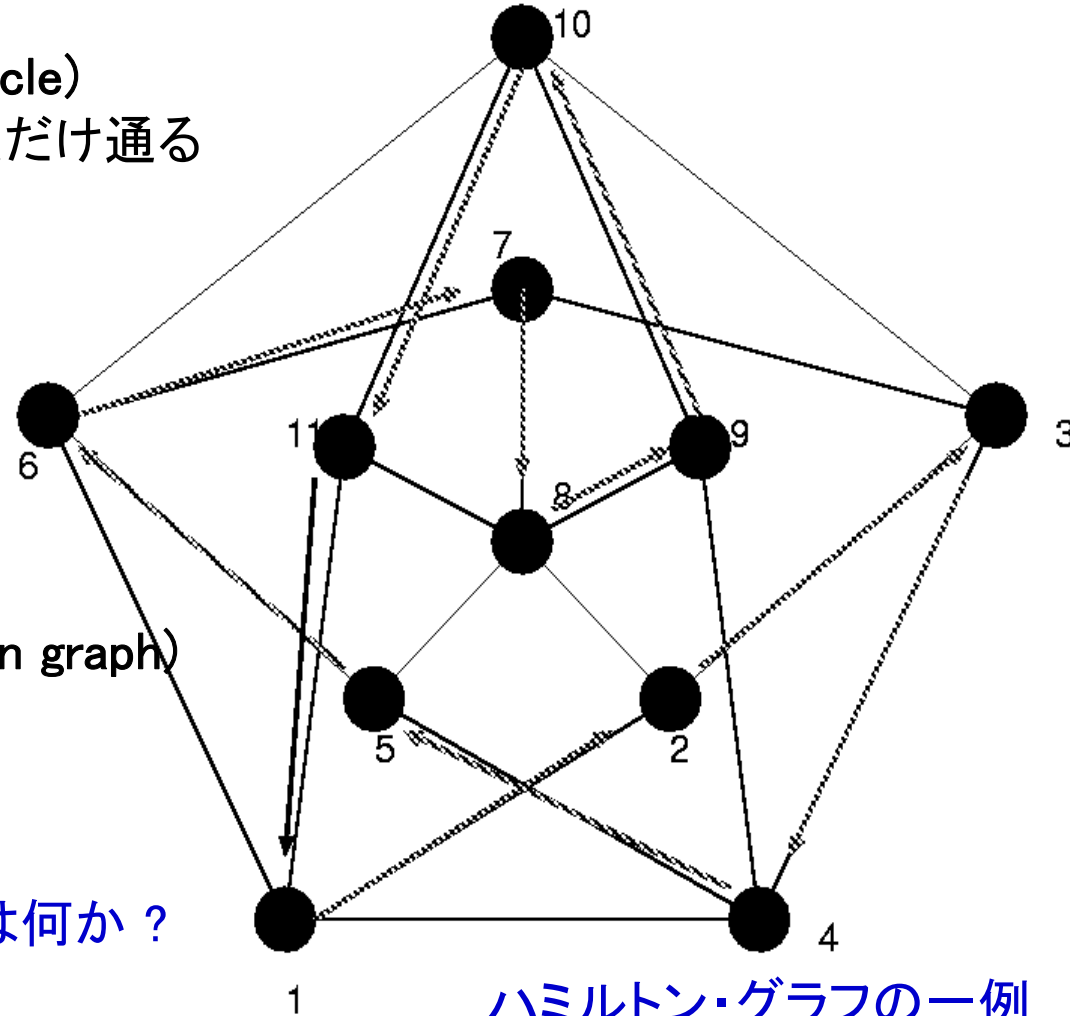
# ハミルトン・グラフ

ハミルトン閉路 (Hamiltonian cycle)  
: グラフGの各点をちょうど一度だけ通る  
閉じた小道

ハミルトン・グラフ (Hamiltonian graph)  
: ハミルトン閉路によりなるグラフ

半ハミルトン・グラフ (semi-Hamiltonian graph)  
: 全ての点を通る道があるグラフ  
(閉じなくてよい)

⇒ ハミルトン・グラフである条件は何か？



ハミルトン・グラフの一例

# Ore (オーレ)の定理

単純グラフGには  $n \geq 3$  個の点があるとする。隣接していない任意の2点  $v, w$  に対し

$$\deg(v) + \deg(w) \geq n$$

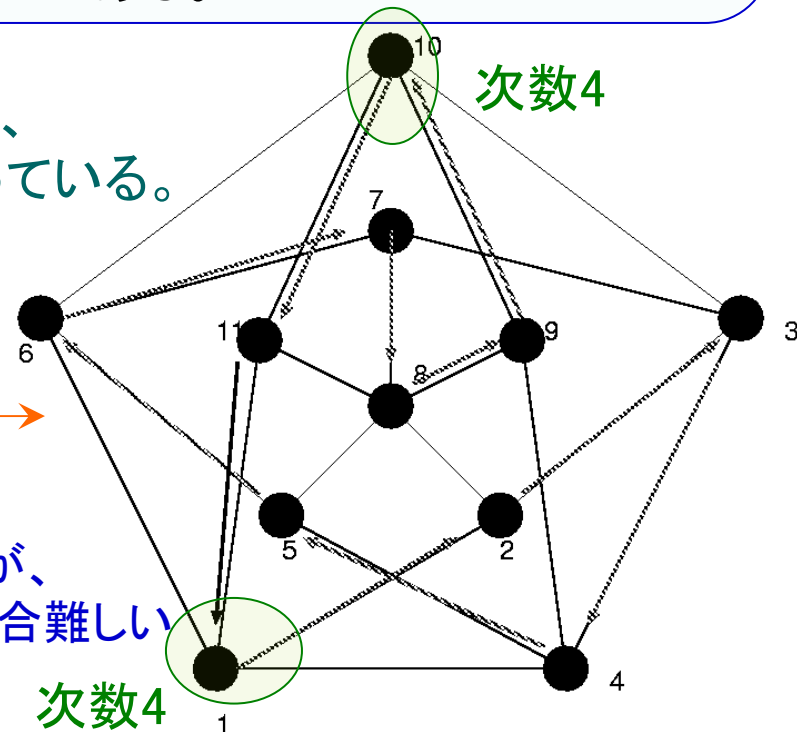
が成立するとき、Gはハミルトン・グラフである。

Oreの定理

直観的には各点への接続辺が十分多ければ、ハミルトン閉路があるであろうということを言っている。これは十分条件であることに注意。

このグラフはOreの定理を満たさないが、ハミルトン・グラフである

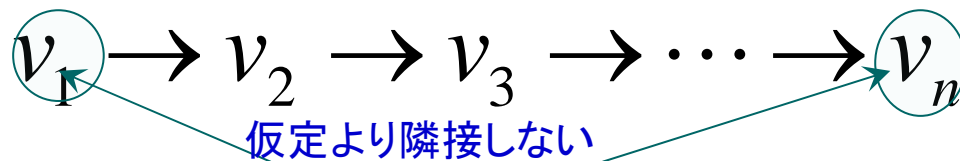
「ハミルトン・グラフであることを示す」ことは易しいが、「ハミルトン・グラフでないことを示す」のは多くの場合難しい



# Oreの定理の証明(アウトライン)

(証明)

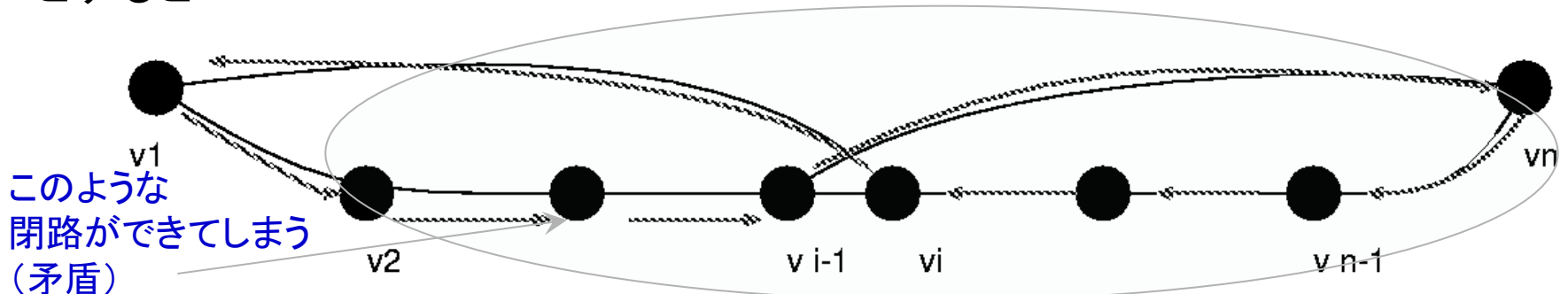
「グラフGはハミルトンではないが、条件式を満たす」として矛盾を引き出す。  
Gがぎりぎりハミルトンでない、とすると、全ての点を含む道：



がある。

$$\deg(v_1) + \deg(v_n) \geq n$$

とすると



# 例題6.2

図のようなグラフの辺数は問題に与えられた

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2) + 2$$

となる。

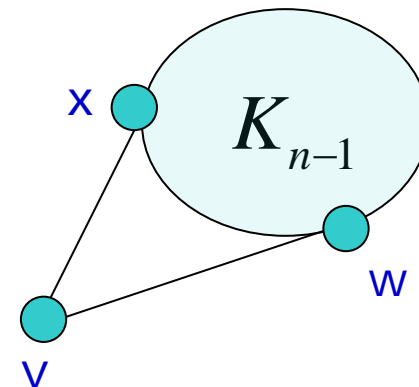
$K_{n-1}$ を構成する任意の点 $u_1$ と点 $v$ の次数和は

$$\deg(u_1) + \deg(v) = \boxed{n - 2 + 2 = n}$$

で定理を満たす。

$K_{n-1}$ の辺を削除し、代わりにこの辺で $v$ と $K_{n-1}$ の1辺を結ぶと、辺を削除した点を $z$ とすれば

$$\deg(v) + \deg(z) = 3 + (n-3) = n \text{で定理を満たす。}$$



オーレの定理をぎりぎり満たす

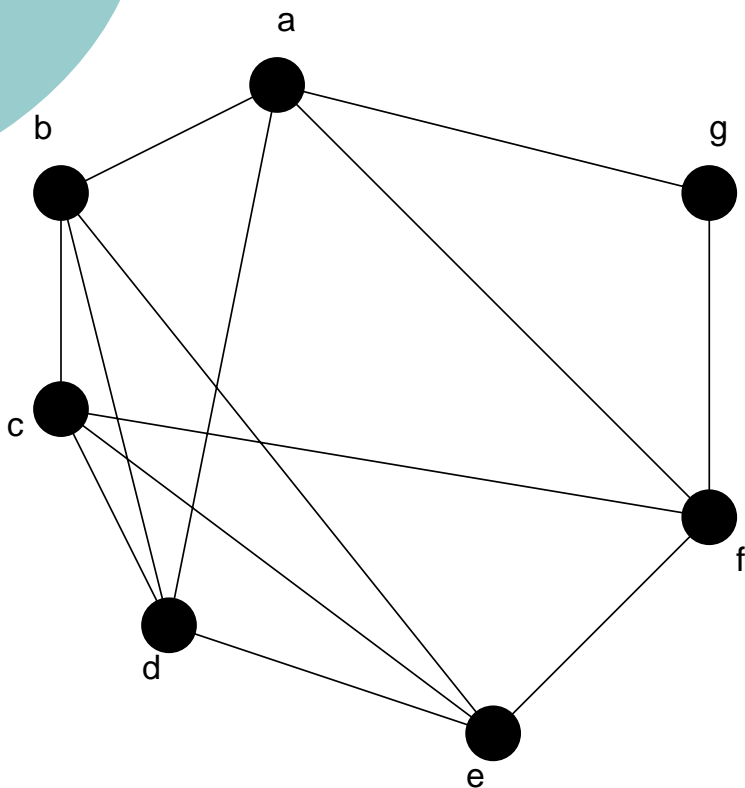


この操作を繰り返しても、オーレの定理が破れることはない。

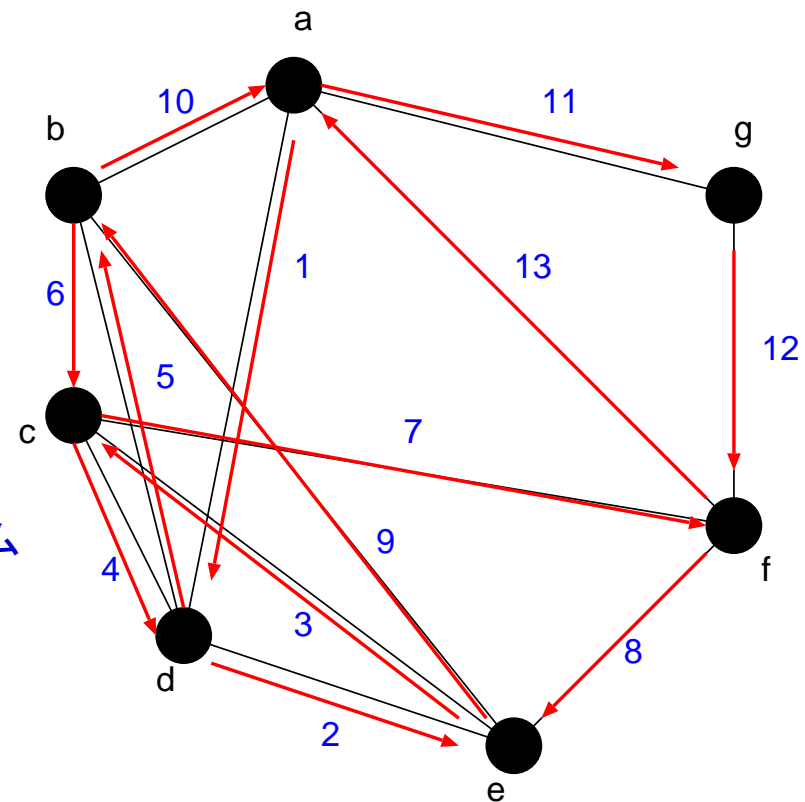
# 例題6.3の1

会場	a	b	c	d	e	f	g
道数	4	4	4	4	4	4	2

全ての次数  
が偶数なので  
一筆書き可能



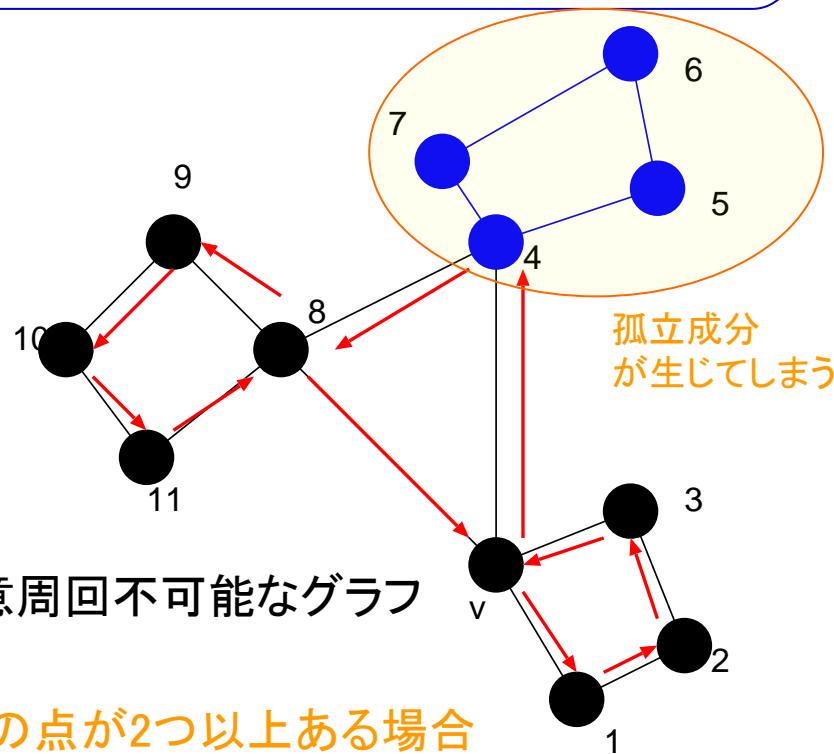
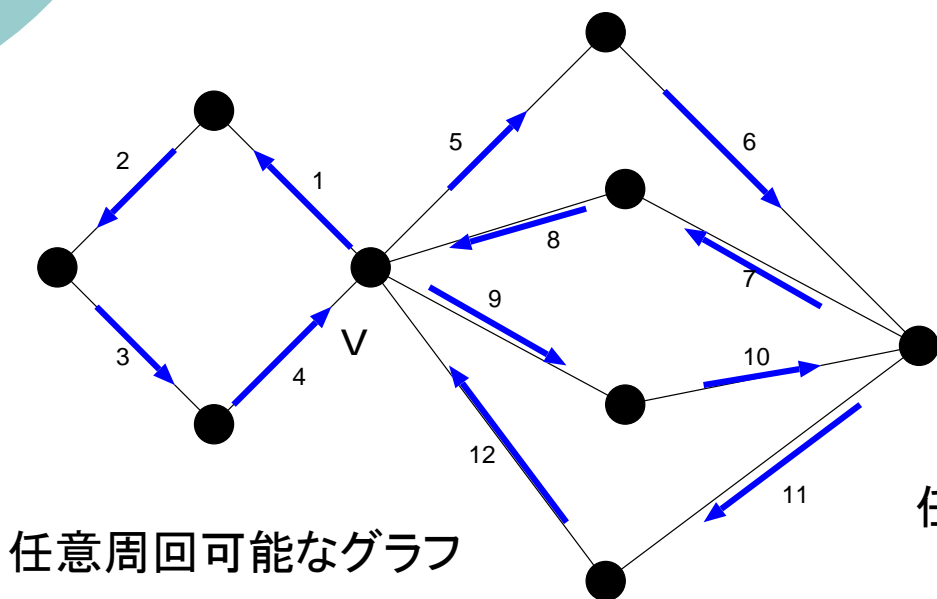
フローリー  
のアルゴリズム  
より



# 例題6.3の2(任意巡回可能性)

ある点 $v$ からスタートする限りは、同じ辺を2度と通らないようにして勝手な方向をたどればオイラー小道が得られる

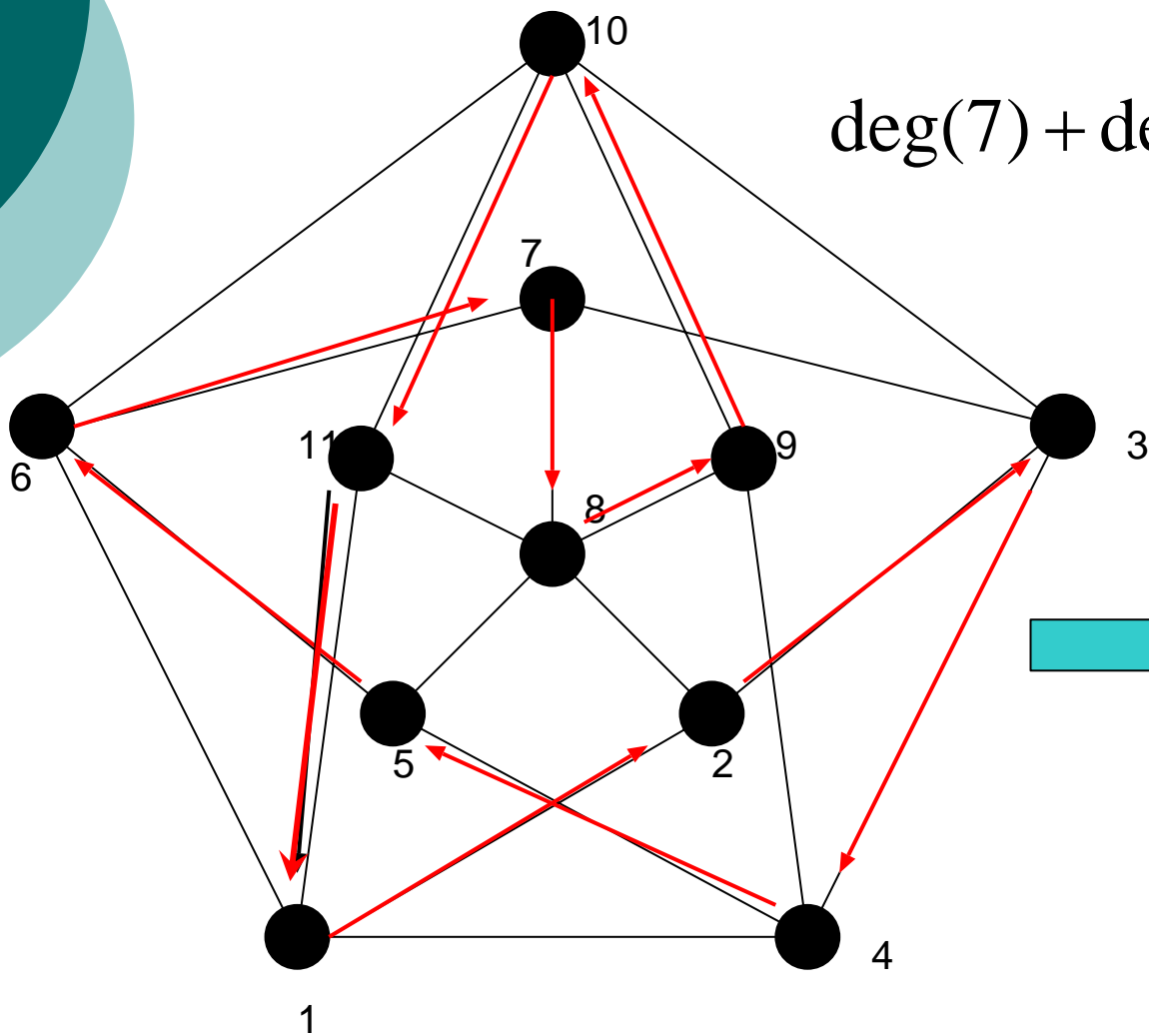
任意巡回可能



次数4以上の点が2つ以上ある場合に孤立成分が生じてしまう

# 例題6.3の3

(オーレの定理を満たさないハミルトングラフの例)



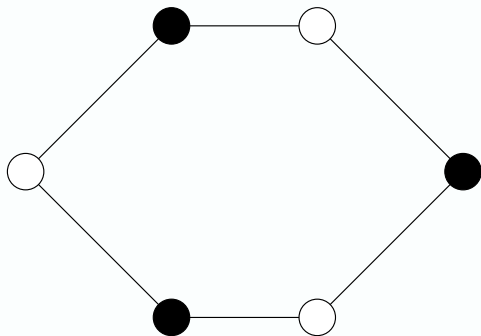
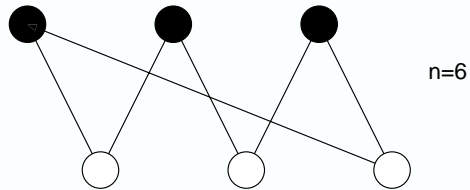
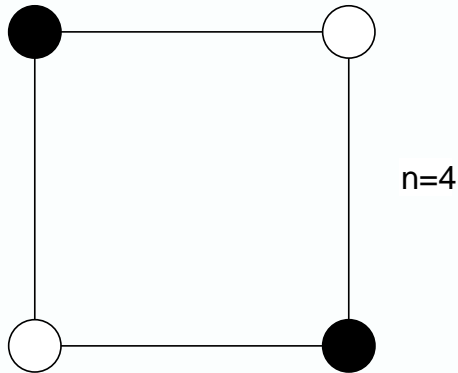
$$\deg(7) + \deg(10) = 3 + 4 = 7 < 11$$

オーレの定理を満たしては  
いないが、ハミルトンである

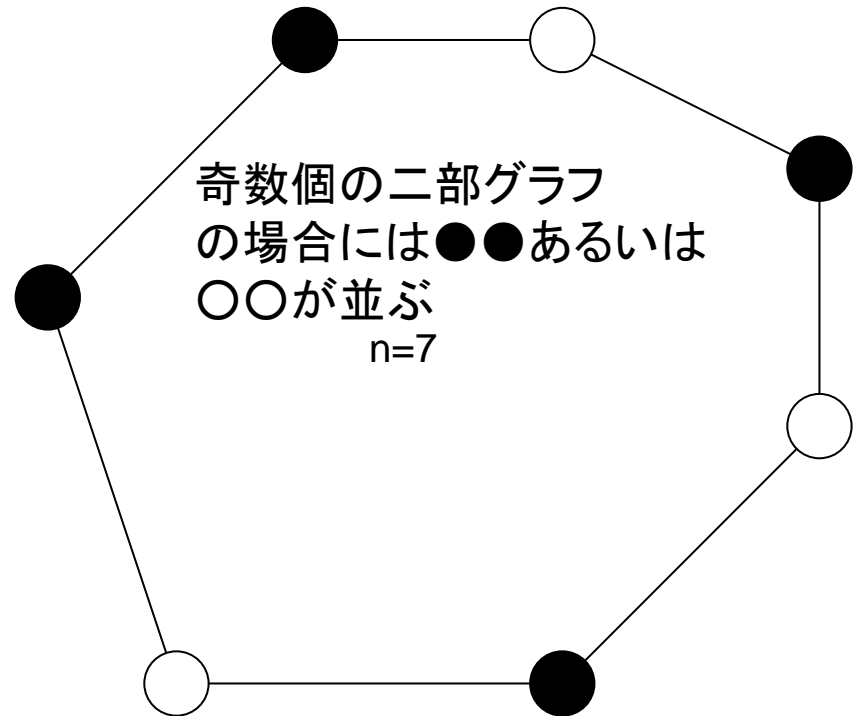


オーレの定理は  
ハミルトンであるための  
十分条件

# 例題6.4の1

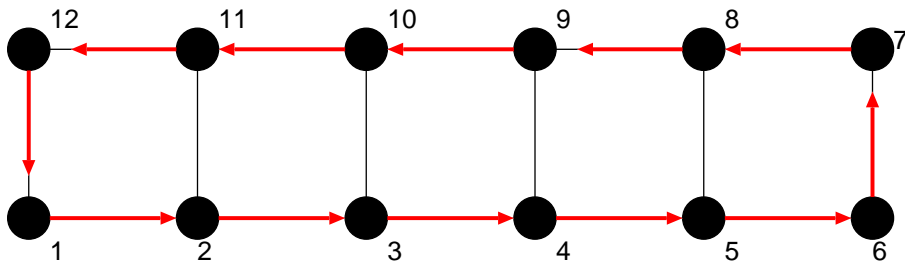
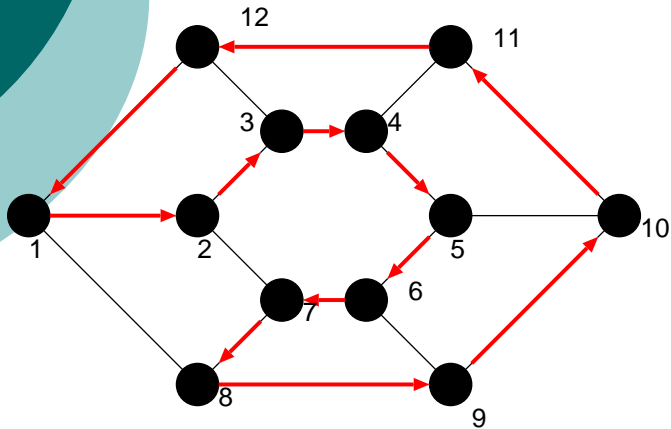


偶数個の点からなる二部グラフは  
○●を交互に並べることができて、ハミルトン



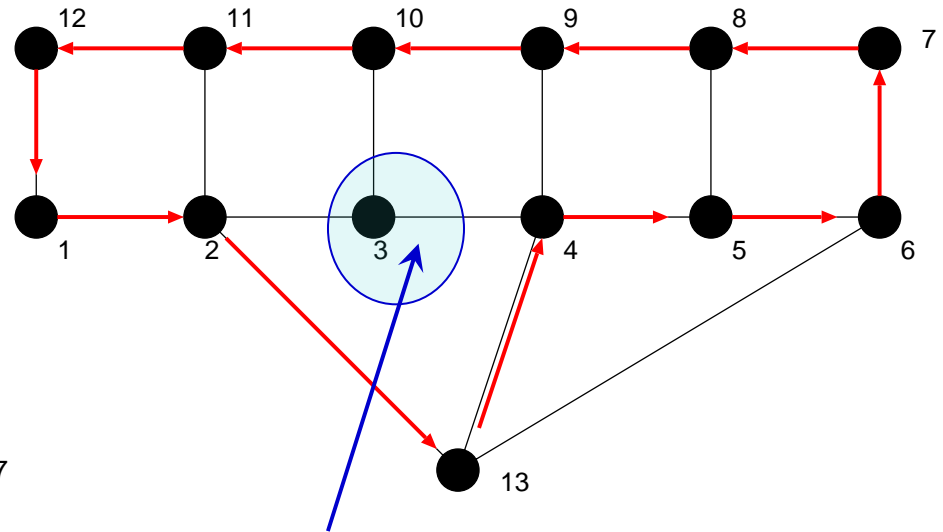
# 例題6.4の2

問題に与えられた中央の●を抜いた  
グラフとその同形グラフ



明らかにハミルトンである

問題に与えられたグラフ



例えば赤矢印の経路をとると  
この点を訪れることはできない。