



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	2006年度 グラフ理論講義ノート
Author(s)	井上, 純一; Inoue, Jun-ichi
Description	http://www005.upp.so-net.ne.jp/j_inoue/index.html http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/
Issue Date	2006
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/15412
Rights(URL)	https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/
Type	learning object
File Information	GraphTheory06_slide7.pdf, 第7回講義スライド



グラフ理論 #7

第7回講義 5月22日

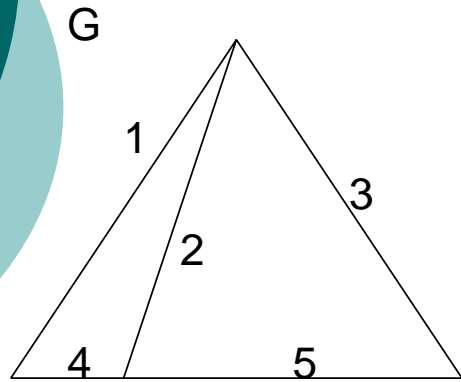
--- 木の数え上げ ---

情報科学研究科

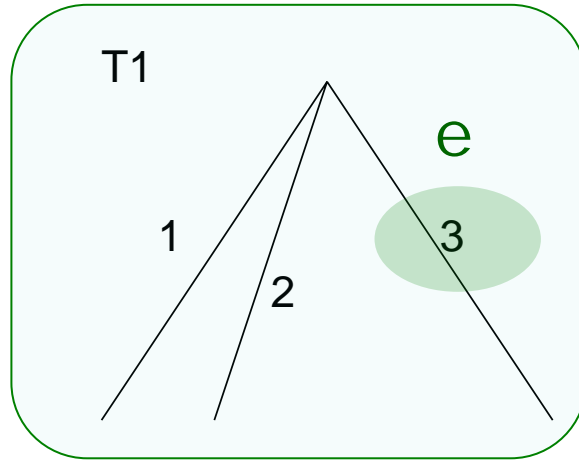
井上純一

http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

演習問題6 (1) の解答例

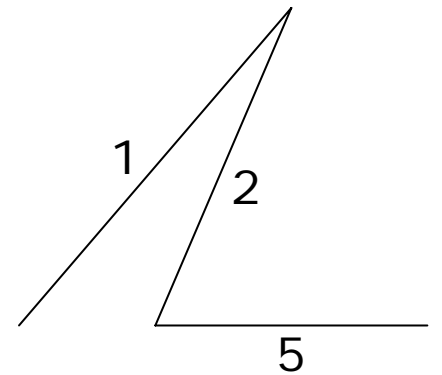
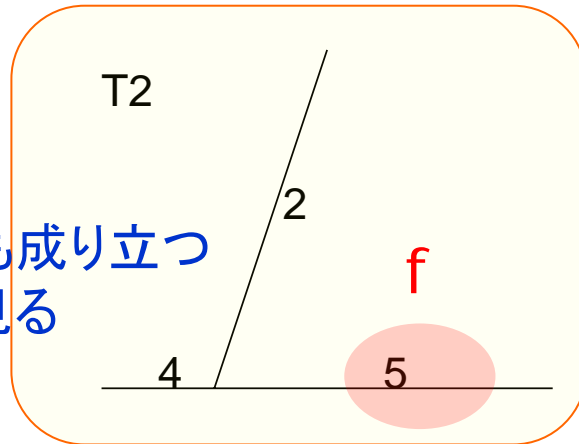


ここで考えるグラフG



$$T_1 - e \cup f$$

T1, T2 : ベクトル空間の基
 T1, T2の元を e, f としても成り立つ
 ⇒ マトroid理論で後に見る

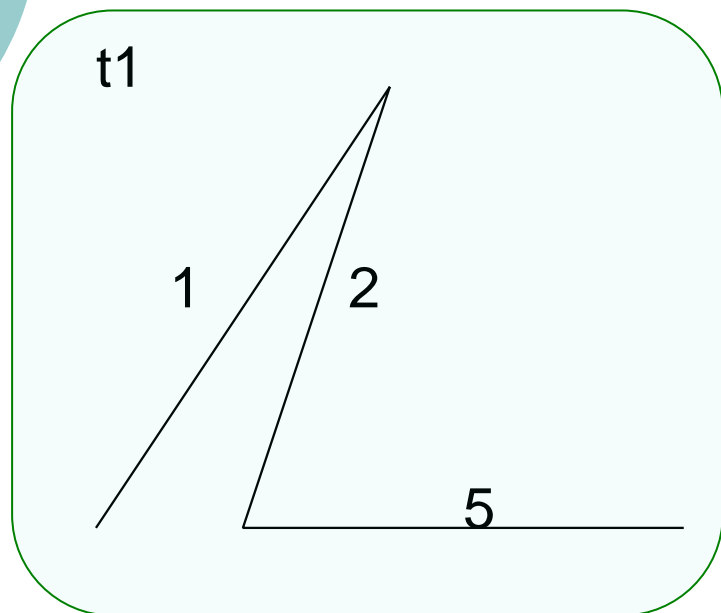


これもグラフGの
全域木である

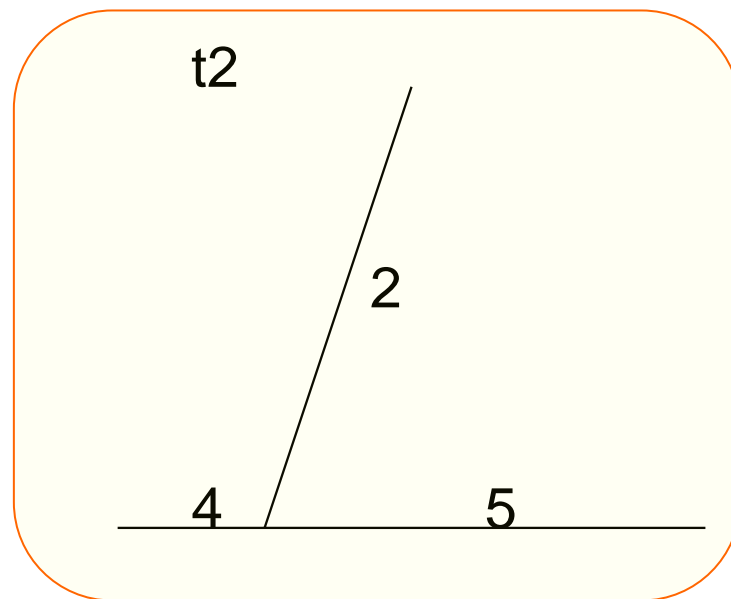
演習問題6

(2) の解答例

$$T_1 - \{e = 3\} \cup \{f = 5\} \simeq t_1$$



中間にできるグラフもやはり
グラフGの全域木になっている



$$t_1 - \{e = 1\} \cup \{f = 4\} \simeq t_2 = T_2$$

ケイリーの定理とその証明 #1

ケイリーの定理

n 点の異なるラベル付き木の総数は n^{n-2} 個である

(証明)

準備:

$\deg(v) = k - 1$ の点 v を含むラベル付き木: A

$\deg(v) = k$ の点 v を含むラベル付き木: B

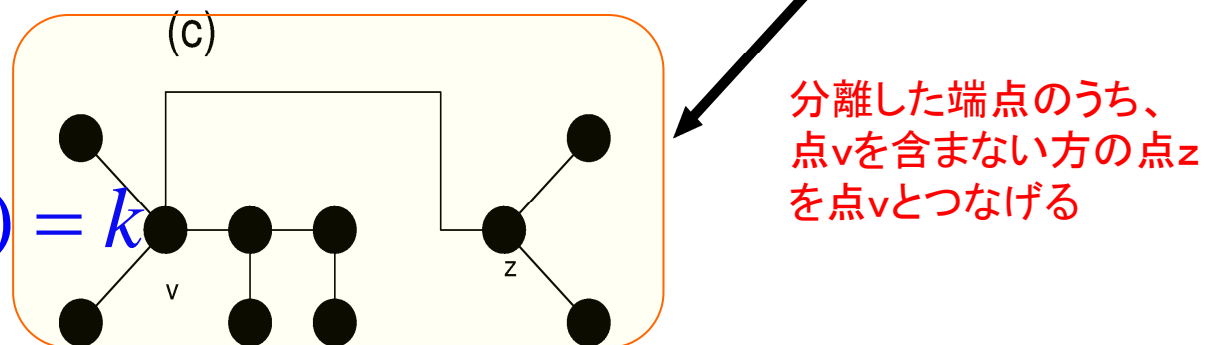
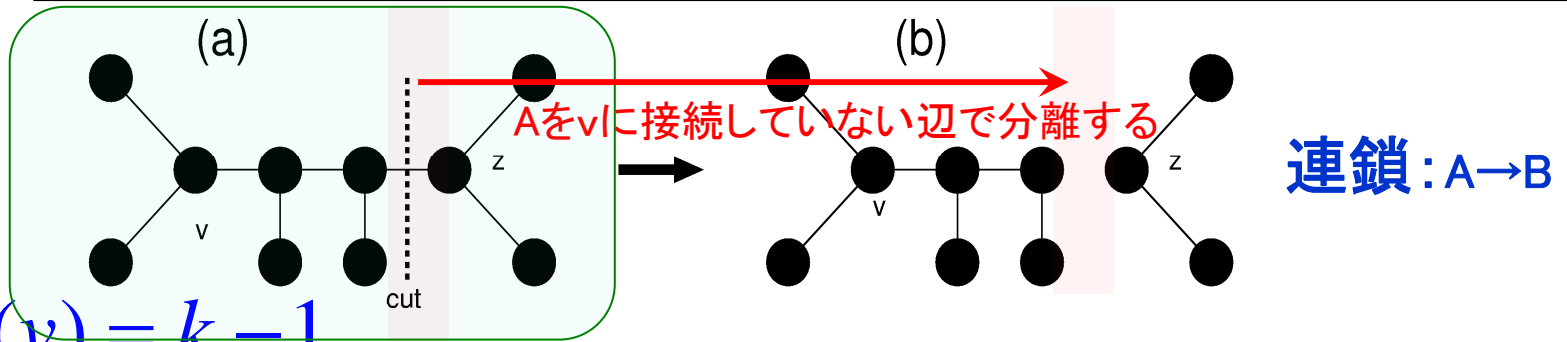
n 個の点からなるラベル付き木のある点の次数が k であるものの総数を $T(n, k)$ とする

証明のポイント:

「ラベル付き木 A からラベル付き木 B を作る連鎖の総数」
＝「ラベル付き木 B からラベル付き木 A を作る連鎖の総数」

という条件式から $T(n, k)$ を導く

ケイリーの定理とその証明 #2



切断する辺の選び方 :

$$\begin{aligned}
 (\text{点}v\text{に接続しない辺の選び方}) &= (\text{木}A\text{の辺数}) - (\text{点}v\text{の次数}) \\
 &= (n-1) - (k-1) = n-k
 \end{aligned}$$

$$(\text{連鎖} : A \rightarrow B \text{の総数}) = \underline{T(n, k-1)}(n-k)$$

Aの総数

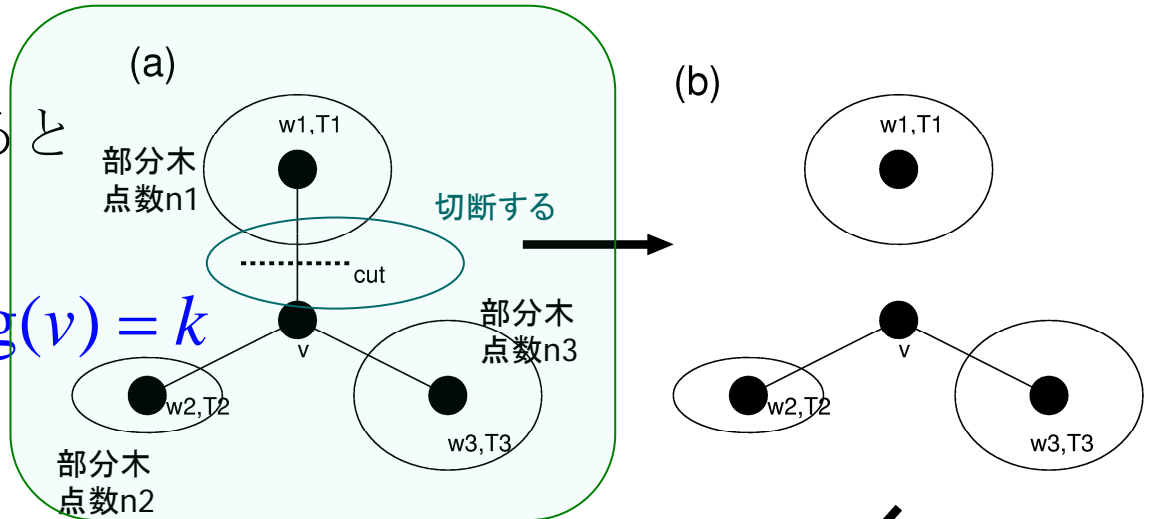
ケイリーの定理とその証明 #3

連鎖: $B \rightarrow A$:

部分木 T_i の点数を n_i とすると

$$n-1 = \sum_{i=1}^k n_i$$

$$B: \deg(v) = k$$

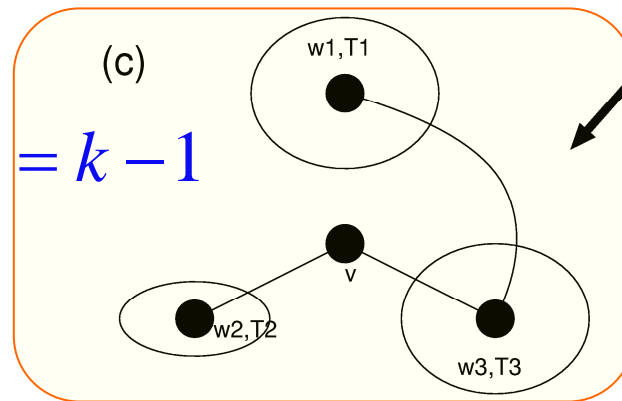


連鎖 $B \rightarrow A$ の総数

$$A: \deg(v) = k - 1$$

$$T(n, k) \sum_{i=1}^k (n-1-n_i)$$

$$= T(n, k)(n-1)(k-1)$$



T_1 以外の部分木
(例えば、 T_3 内の
任意の点 u と T_1 内の
任意点 w_i を結ぶ)

$$(点vを除く点数) - (部分木 T_i に属する点数) = (n-1) - n_i \quad (\text{通り})$$

ケイリーの定理とその証明 #4

[連鎖 : $A \rightarrow B$ の総数] = [連鎖 : $B \rightarrow A$ の総数] とおくと

$$(n - k)T(n, k - 1) = (n - 1)(k - 1)T(n, k)$$

$k = n - 1, n - 2, n - 3, \dots$ を書き出してみると

定義より1である

$$T(n, n - 2) = T(n, n - 1)(n - 1)(n - 2)$$

$$T(n, n - 3) = \frac{1}{2}(n - 1)^2(n - 2)(n - 3)$$

$$T(n, n - 4) = \frac{1}{3!}(n - 1)^3(n - 2)(n - 3)(n - 4)$$

これを一般化し、 $k = k + 1$ のとき

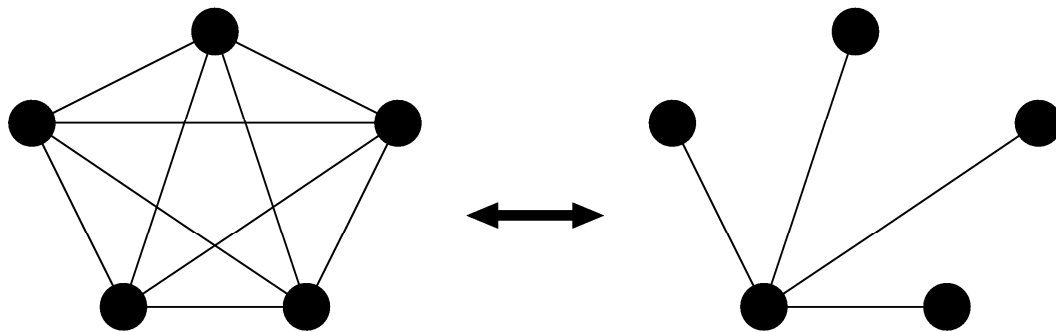
$$T(n, k) = \frac{(n - 1)^{n - k + 1}(n - 2)}{(k - 1)(k - 2) \dots} = {}_{n - 2}C_{k - 1}(n - 1)^{n - k - 1}$$

ケイリーの定理とその証明 #5

求めるラベル付き木の総数は

$$\begin{aligned} T(n) &= \sum_{k=1}^{n-1} T(n, k) = \sum_{k=1}^{n-1} n-2 C_{k-1} 1^{k-1} (n-1)^{(n-2)-(k-1)} \\ &= \{(n-1) + 1\}^{n-2} = n^{n-2} \quad (\text{証明終わり}) \end{aligned}$$

系: 完全グラフ K_n の全域木の総数は n^{n-2} である



K_5

点数 n のラベル付き木は完全グラフ K_n に一対一に対応する

点行列と行列木定理

グラフGの点行列: **D**

$$D_{ij} = \begin{cases} \text{点 } v_i \text{ の次数} & (i = j \text{ のとき}) \\ -(\text{点 } v_i \text{ と点 } v_j \text{ を結ぶ辺数}) & (i \neq j \text{ のとき}) \end{cases}$$

このとき、グラフGの全域木の本数は点行列の任意の余因子で与えられる

$$\tau(G) = (-1)^{i+j} |\mathbf{D}(\bar{i}, \bar{j})|$$

行列木定理の応用例

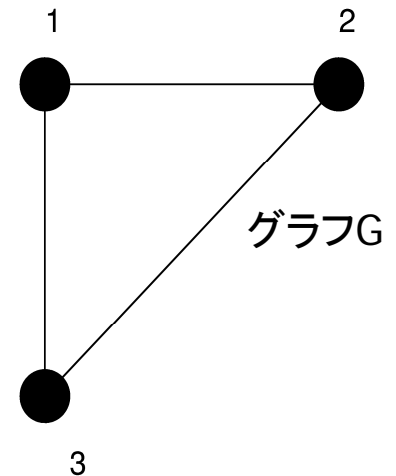
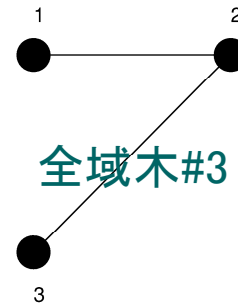
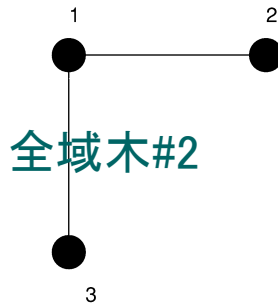
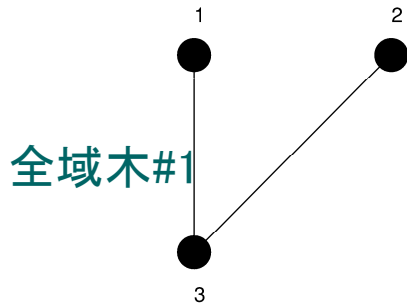
隣接行列 \mathbf{A} が

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ で与えられるグラフ G の全域木の総数 $\tau(G)$ を求めよ

このグラフ G の点行列は

$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ なので

$$\tau(G) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3$$



例題7.5 の1

$$T(n, k) = {}_{n-2}C_{k-1} (n-1)^{n-k-1} \quad \text{より}$$

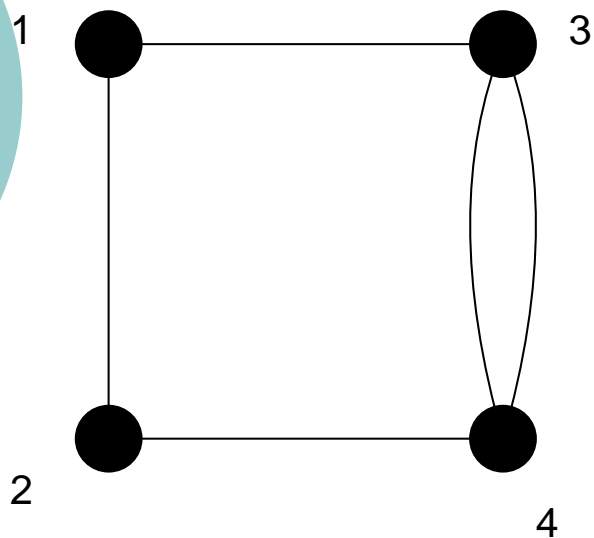
与えられた点が木の端点になっている場合の数は $k=1$ とにおいて

$$T(n, 1) = (n-1)^{n-2}$$

従って、与えられた点が端点となっている確率は

$$P(n) = \frac{(n-1)^{n-2}}{n^{n-2}} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-2} = e^{-1}$$

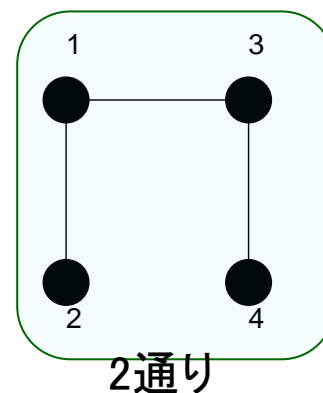
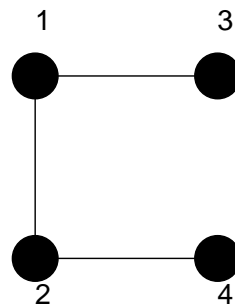
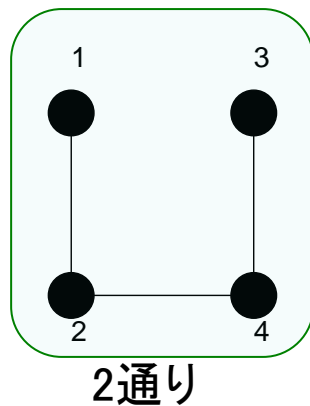
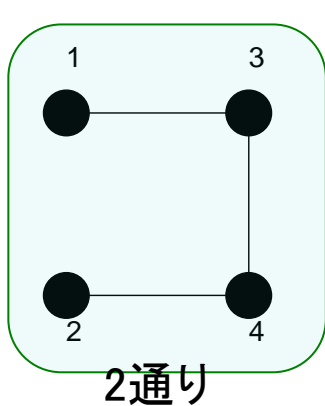
例題7.5 の2



点行列

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

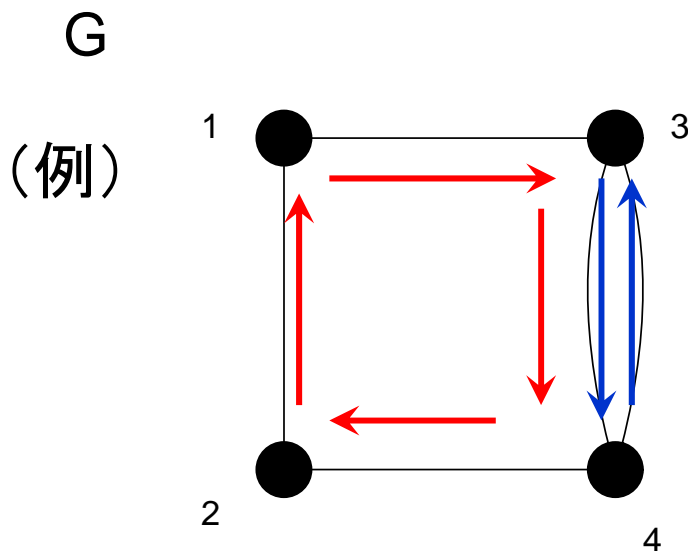
具体的な計算は講義ノート



閉路行列と閉路行列法

$$R_{ij} = \begin{cases} \text{閉路 } c_i \text{ を構成する辺数} & (i = j) \\ \pm(\text{閉路 } c_i \text{ と閉路 } c_j \text{ に共通な辺数}) & (i \neq j) \end{cases}$$

$$\tau(G) = |\mathbf{R}| \quad \text{全域木の個数}$$



$$R = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\tau(G) = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7$$

例題7.5の2と一致