



Title	極渦のある球面上での渦層の運動
Author(s)	坂上, 貴之; SAKAJI, Takashi
Citation	研究集会「PDEs and Phenomena in Miyazaki 2003」報告集, 69-80
Issue Date	2003
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/15812">https://hdl.handle.net/2115/15812</a>
Type	conference paper
File Information	PDEs2003.pdf



# 極渦のある球面上での渦層の運動

坂上 貴之 (SAKAJO, Takashi)  
北海道大学大学院理学研究科数学専攻  
E-mail: sakajo@math.sci.hokudai.ac.jp

## 1 研究の背景

流れの速度場が急激に変化して高い渦度が局所的に存在する領域は“せん断流領域”と呼ばれ、流れ全体の運動を強く支配する。そのため、せん断流領域の運動を考えることは、流体力学における重要な研究テーマの一つとなっている。

このせん断領域の運動の数理モデルとして導入されたのが渦層である。まず、流れは非圧縮・非粘性とする。次に、渦層モデルでは渦度が分布する領域の厚さが極めて薄いと仮定する。すなわち、高渦度領域を全空間に埋め込まれた一つの速度場の不連続面として定義し、その面上で渦度が  $\delta$  関数的に分布しているものを渦層と呼ぶ。

本研究では球面上にある渦層の安定性について論じるが、その前に二次元渦層について知られている重要な事実をいくつか紹介する。二次元渦層は複素数値を持つ以下のような空間 1 パラメータ関数として定義される。

$$z(\Gamma, t) = x(\Gamma, t) + iy(\Gamma, t), \quad -\infty < \Gamma < \infty.$$

ここで  $\Gamma$  は渦層に沿った循環パラメータ、 $t$  は時間を表している。この時、渦層の時間発展は Birkhoff-Rott 方程式によって記述される。

$$\frac{\partial \bar{z}}{\partial t} = \frac{1}{2\pi i} \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Gamma'}{z(\Gamma, t) - z(\Gamma', t)}.$$

ただし、右辺の積分は Cauchy の主値積分の意味で定義し、 $\bar{z}$  は  $z$  の複素共役を表すものとする。この時、数学的および数値的な研究から、次の三つの性質が知られている。

### 1) Kelvin-Helmholtz 不安定性 [8]

Birkhoff-Rott 方程式の定常解  $z(\Gamma, t) = \Gamma$  の線形安定性を調べる。この定常解に次のようなフーリエ級数型の微少な摂動を加える。

$$z(\Gamma, t) = \Gamma + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(t) \exp(in\Gamma).$$

この時、各モード  $n$  の微小摂動係数  $a_n(t)$  の線形化方程式から、それらは次のように時間発展することがわかる。

$$|a_n(t)| \sim |a_n(0)| \exp(\pi|n|t).$$

これは、大きいモードの摂動ほど、急激に成長することを意味している。したがって、この Birkhoff-Rott 方程式の初期値問題は Hadamard の意味で Ill-posed である。このような線形不安定性を Kelvin-Helmholtz 不安定性と呼ぶ。

### 2) 有限時間での曲率特異点の生成

Moore[4] は Birkhoff-Rott 方程式の漸近解析によって、滑らかな初期値から始めた解に有限時間で特異点が発生することを示唆した。すなわち、彼は初期値  $z(\Gamma, t) = \Gamma + i\epsilon \sin \Gamma$  に対する漸近解析から、十分時間が経過した後の解のフーリエ係数が次の漸近形になることを示した。

$$|a_n(t)| \sim Cn^{-\frac{5}{2}} \exp\left(n\left(1 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\log \epsilon t\right)\right).$$

したがって、時刻  $t_c$  が

$$1 + \frac{1}{2}t_c + \frac{1}{4}\log \epsilon t_c = 0,$$

を満たす時、解の二階微分すなわち渦層の曲率が発散することがわかる。

### 3) Roll-up 構造の出現

最後の結果は、渦層の長時間発展に関するものである。しかし、上で示したように渦層の方程式は Ill-posed であり、かつ有限時間で解は滑かさを失うので、その時間を超えて渦層の長時間発展を考えることはできない。それに対して、Krasny[1] は以下のような Birkhoff-Rott 方程式の正則化方程式を考えて、その長時間発展を数値計算した。

$$\frac{\partial \bar{z}}{\partial t} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{z}(\Gamma, t) - \bar{z}(\Gamma', t)}{|z(\Gamma, t) - z(\Gamma', t)|^2 + \sigma^2} d\Gamma'.$$

ただし  $\sigma > 0$  は正則化パラメータである。この時、渦層には曲率の爆発が起らず、長時間経過すると二重螺旋渦巻形に巻き上がる (Roll-up) ことが知られるようになった。この渦巻解はもちろん Birkhoff-Rott 方程式の厳密解ではないが、数学的には Birkhoff-Rott 方程式の解を弱い意味で近似する解であることが知られている [3]。また、物理的に渦の二重螺旋構造は現実の流体現象に普遍的に見られるものであり、数値的には正則化渦層の方程式が高レイノルズ数を持つ現実流体の運動を精度よく近似する例 [6] 等も報告されており、応用上も重要なモデル方程式である。

## 2 球面上の渦層の運動

我々は、こうした二次元渦層について得られた知見を基に球面上にある渦度密度一定の渦層の時間発展を取り扱う。さらに、今回は球の両極に渦糸を固

定した系を考える。北極渦と南極渦の強さをそれぞれ  $\Gamma_1, \Gamma_2$  とし、時刻  $t$  として  $\alpha$  を渦層に沿った曲線パラメータとする時、渦層の位置を球面座標系で  $(\theta(\alpha, t), \varphi(\alpha, t))$  と表せば、極渦付きの球面渦層は以下の運動方程式に従う。

$$\theta_t = -\frac{1}{4\pi} \text{PV} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta' \sin(\varphi - \varphi')}{1 - \cos \gamma} d\alpha', \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \varphi_t = & -\frac{1}{4\pi} \text{PV} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi') - \sin \theta \cos \theta'}{\sin \theta (1 - \cos \gamma)} d\alpha' \\ & + \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\Gamma_1}{1 - \cos \theta} - \frac{\Gamma_2}{1 + \cos \theta} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

この方程式に対して、我々は、定常解  $\theta(\alpha, t) = \theta_0, \varphi(\alpha, t) = \alpha$  の線形安定性、および曲率爆発の有無とその極渦からの影響を調べた。さらに方程式を二次元の場合と同様に渦法によって正則化し、数値計算して二重螺旋 Roll-up 構造と極渦の影響についても調べた。

### 3 線形安定性

まず、渦層方程式 (1) と (2) の定常解を求める。今、渦層が同一緯度の上にある、すなわち  $\theta(\alpha, t) = \theta_0, \varphi(\alpha, t) = \alpha$  とする。これを方程式に代入して、

$$\begin{aligned} \theta_t &= -\frac{1}{4\pi \sin \theta_0} \text{PV} \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\alpha - \alpha')}{1 - \cos(\alpha - \alpha')} d\alpha' = 0, \\ \varphi_t &= \frac{\cos \theta_0}{2 \sin^2 \theta_0} + \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\Gamma_1}{1 - \cos \theta_0} - \frac{\Gamma_2}{1 + \cos \theta_0} \right) \equiv V_0. \end{aligned}$$

を得るので、これから  $\theta = \theta_0, \varphi = \alpha + V_0 t$  は渦層方程式の定常解であることがわかる。我々はこの定常解の線形安定性を調べる。

この定常解に以下のようなフーリエ級数型の微小摂動を加える。

$$\theta(\alpha, t) = \theta_0 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \theta_n(t) \exp(in\alpha), \quad \varphi(\alpha, t) = \alpha + V_0 t + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_n(t) \exp(in\alpha).$$

この時、摂動のフーリエスペクトル  $\theta_n(t)$  と  $\varphi_n(t)$  に対する線形化方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_n}{dt} &= \frac{|n|}{2 \sin \theta_0} \varphi_n, \\ \frac{d\varphi_n}{dt} &= \left( \frac{|n|}{2 \sin^3 \theta_0} - \frac{(\Gamma_1 + \Gamma_2 + 2\pi)(1 + \cos^2 \theta_0)}{4\pi \sin^3 \theta_0} - \frac{(\Gamma_1 - \Gamma_2) \cos \theta_0}{2\pi \sin^3 \theta_0} \right) \theta_n. \end{aligned}$$

この線形化方程式の固有値  $\lambda_n$  は次のように与えられる。

$$\lambda_n = \pm \frac{1}{2 \sin^2 \theta_0} \sqrt{(|n| - \kappa_1(1 + \cos^2 \theta_0) - \kappa_2 \cos \theta_0) |n|},$$

ただし  $\kappa_1 = \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2 + 2\pi}{2\pi}$ ,  $\kappa_2 = \frac{\Gamma_1 - \Gamma_2}{\pi}$  である. したがって, もし  $n$  が

$$|n| < \kappa_1(1 + \cos^2 \theta_0) + \kappa_2 \cos \theta_0, \quad (3)$$

を満たしていれば, 摂動のフーリエスペクトル  $\theta_n(t)$  と  $\varphi_n(t)$  は中立安定になる. 一方で十分大きな  $n$  に対しては正の固有値は漸近的に  $\frac{|n|}{2 \sin^2 \theta_0}$  に近づくので, 平面における Kelvin-Helmholtz 不安定性と同様の成長をする. このことから, 極渦の存在により, 摂動の低次モードのいくつかは中立安定になるが, 十分高次のモードの不安定化は抑えられないことがわかる.

この線形安定性の結果を二つの具体的な場合で考察する. まず第一は二つの極渦の大きさが等しい時,  $\kappa_2 = 0$  を考える. 安定性の条件 (3) は

$$|n| < \kappa_1(1 + \cos^2 \theta_0). \quad (4)$$

のようになる. したがって, 極渦がない場合, すなわち  $\kappa_1 = 1$  の時, 摂動の第一スペクトル  $\theta_1(t)$  と  $\varphi_1(t)$  は赤道を除く任意の場所で中立安定になっている. 一方,  $\kappa_1$  を固定して考えると, 渦層の位置  $\theta_0$  が極に近づくにつれて, 中立安定になるフーリエ係数の数は増加する.

次に地球上の渦度の総和が 0 になっている場合を考える. この時  $\Gamma_1 + \Gamma_2 = -2\pi$  なので, 安定性の条件は

$$|n| < \kappa_2 \cos \theta_0. \quad (5)$$

に等価である. これによると北極渦が南極渦より強い場合, つまり  $\Gamma_1 > \Gamma_2$  の時, 北半球にある渦層はいくつかの中立安定な低次のフーリエスペクトルを持つ. 逆に南半球にある渦層については, すべてのフーリエスペクトルは不安定である.

## 4 特異点の発生

球面渦層に発生する特異点を数値計算によって検出する. 特異点を数値的に精度よく調べる方法として, Sulem らによるスペクトル検出法 [14] が知られているので, 我々もこれを利用する. この方法では, まず解のフーリエ係数が十分時間が経過した後には次の漸近形を持つと仮定する.

$$\begin{aligned} |\theta_n(t)| &\sim C_\theta n^{-p_\theta} \exp(-\delta_\theta n), \\ |\varphi_n(t)| &\sim C_\varphi n^{-p_\varphi} \exp(-\delta_\varphi n), \end{aligned}$$

なお  $C_\theta$  や  $C_\varphi$ ,  $p_\theta$ ,  $p_\varphi$ ,  $\delta_\theta$ ,  $\delta_\varphi$  は  $n$  よらないパラメータである. それから, 渦層方程式を数値的に解いて, 各時間ステップ毎に得られた数値データから上の解の漸近形への最小二乗法によるあてはめを行って, これらのパラメータの値を求める. そして最後に  $\delta_\theta$  と  $\delta_\varphi$  が 0 になる時刻を推定する. この時間

において、解のフーリエスペクトルはベキ減衰となり、ここで解は特異性を持つことになる。パラメータ  $p_\theta$  と  $p_\varphi$  は解の何階微分が爆発するかを決定するパラメータである。なお、このような方法で渦層に現れる特異点を検出する研究はこれまでも数多く行われている [2, 5, 7, 10, 13].

さて、このような数値検出法がうまく働くためには、かなり精度の高い数値計算が要求されるが、渦層の方程式は Kelvin-Helmholtz 不安定性から Hadamard の意味で非適切な問題なので、僅かな数値的な丸め誤差が混入するだけでも、その誤差が急激に拡大して数値計算は破綻してしまう。また方程式には特異積分が含まれているため単純な台形公式では精度が上らない。こうした問題について、我々は Krasny によるフーリエフィルタリングの方法 [2] と Sidi と Israeli[12] による交代選点台形公式を用いて、高精度の数値計算を実現した。また、時間方向の積分には 4 段 4 次の Runge-Kutta 法を用い、渦層は  $N = 4096$  点で離散近似している。なお、数値計算の初期値として次を用いた。

$$\theta(\alpha, 0) = \theta_0 + 0.01 \sin \alpha, \quad \varphi(\alpha, 0) = \alpha + 0.01 \sin \alpha, \quad (6)$$

図 1 は  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = -\pi$  および  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0$ ,  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \pi$  の場合の解の特異点の生成時刻を渦層の位置  $\theta_0$  に対してそれぞれプロットしたものである。前述の安定性の条件 (4) によると、第一の場合すべての摂動のスペクトルは不安定、第二の場合は第一スペクトル  $\theta_1(t)$  と  $\varphi_1(t)$  が中立安定、第三の場合は第一と第二スペクトルが中立安定である。この図からわかることは、中立安定なモードが多い程、解の存在時間は長くなっているが、いずれの場合でも特異性が発生するということである。したがって、極渦が存在しても特異性の発生は抑制できない。その理由は、極渦によって低次のスペクトルが安定になるものの、方程式の持つ非線形性により初期の摂動が徐々に高次のスペクトルの摂動を励起するため、結局のところ極渦による線形安定性で抑えきれない高次モードの不安定性が解の特異点の生成につながるからである。また、渦層の位置  $\theta_0$  が極に近付くと、解の存在時間が短くなっているが、これは回転速度が  $\theta_0 \rightarrow 0$  で  $V_0 \rightarrow \infty$  になることに由来する。ちなみに、このいずれの場合も発生する特異性は平面の場合と同様曲率の爆発  $p_\theta \sim 2.5$ ,  $p_\varphi \sim 2.5$  である。

次に、 $\Gamma_1 + \Gamma_2 = -2\pi$  とし  $\Gamma_1 > \Gamma_2$  の場合の特異性の発生時刻を図 2 に示す。線形安定性から、この場合は北半球の渦層の方が多くの安定な低次フーリエスペクトルを持つが、この図も安定なモードが多い程解の存在時間が長くなる傾向にあることを示している。なお、本来であれば渦層が北極に近付く程安定なモードは多くなり、極ほど解の存在時間は長くなりそうだが、実際には中緯度領域でピークを迎えている。これは北極付近では渦層の線形安定性による特異化よりも極に近付くことによる特異性の方が強く寄与しているためである。

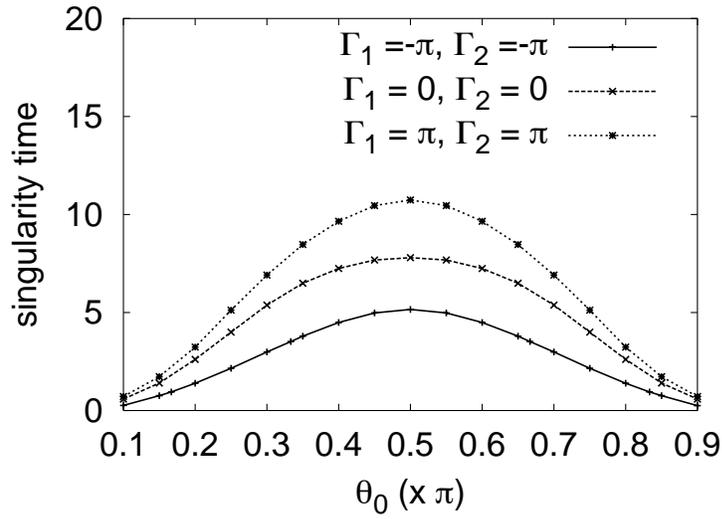


図 1: 極渦の大きさが  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0, \pm\pi$  の場合の, 渦層の位置  $\theta_0$  に対する特異点発生時刻. 二つの渦糸の強さの和  $\Gamma_1 + \Gamma_2$  が増加して安定な低次のモードが増える程, 解の存在時間は長くなる.

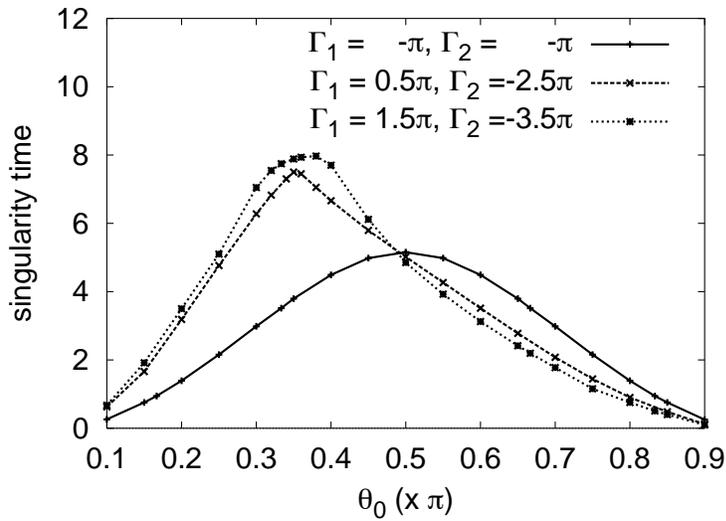


図 2: 極渦の強さが  $\Gamma_1 + \Gamma_2 = -2\pi$  かつ  $\Gamma_1 > \Gamma_2$  の場合の, 渦層の位置  $\theta_0$  に対する渦層の解の特異点発生時刻の様子. 安定な中立モードを多く持つ傾向にある北極渦層の方が存在時間が長い.

## 5 長時間発展

最後に渦法により渦層の方程式を以下のように正則化して、その長時間発展を数値計算する。

$$\theta_t = -\frac{1}{4\pi}PV \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta' \sin(\varphi - \varphi')}{1 - \cos \gamma + \sigma^2} d\alpha', \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \varphi_t = & -\frac{1}{4\pi}PV \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi') - \sin \theta \cos \theta'}{\sin \theta (1 - \cos \gamma + \sigma^2)} d\alpha' \\ & + \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\Gamma_1}{1 - \cos \theta} - \frac{\Gamma_2}{1 + \cos \theta} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

$\sigma > 0$  は渦法の正則化パラメータである。初期値は次を用いている。

$$\begin{aligned} \theta(\alpha, 0) &= \frac{\pi}{3} + 0.01 \sin \alpha, \\ \varphi(\alpha, 0) &= \alpha + 0.01 \sin \alpha. \end{aligned}$$

その数値計算結果を三つ示す。図3は極に渦がない時の正則化渦層の長時間発展である。時刻  $t < 10$  まで、渦層は安定に時間発展するが、それ以後不安定化して4つの螺旋渦を持つ渦構造に発展する。次に図4は  $\Gamma_1 = -2.5\pi$  および  $\Gamma_2 = 0.5\pi$  の場合の数値解である。この場合は解がすぐに不安定化して螺旋に巻き上がるが、渦巻は一つしか発生しない。最後の図5は北極渦と南極渦の強さがそれぞれ  $\Gamma_1 = 1.5\pi$  そして  $\Gamma_2 = -3.5\pi$  の時の時間発展である。こちら時刻  $t = 18$  になるまで渦層は安定であるが、結局は不安定化して、5つの二重螺旋渦巻を構成する。

これら結果と極渦の存在との関連について述べる。まず、極渦のない場合は初期摂動  $\theta_1(t)$  と  $\varphi_1(t)$  が中立安定であり、二番目の例ではすべてのスペクトルが不安定、最後の例では第一と第二フーリエスペクトルが中立安定になっている。次に最終的に現れる渦巻の数は、それぞれ4つ、1つ、5つとなっている。最後に解が不安定化して巻き上がる時刻は、中立安定なモードの数が多いほど、遅くなっている。この事実から次のように考察できる。線形中立安定なモードの数が増えると安定性が増すので、解が不安定化するのに長い時間がかかるが、方程式の非線形性より高次の不安定モードにエネルギーが移行すると、そのモードが急激に成長して結果として解全体が不安定になる。さらに、この不安定なモードのうち、どれかが選択的に大きくなって解全体の形状を決まるので、低次の中立安定モードの数が多い程、最終的に出現する渦巻の数は多くなる。

## 6 まとめ

極渦を持つ球面上にある渦層の線形安定性と特異点形成、長時間発展を数理的および数値的に調べた。それによると、極渦の大きさと渦層の位置に応じ

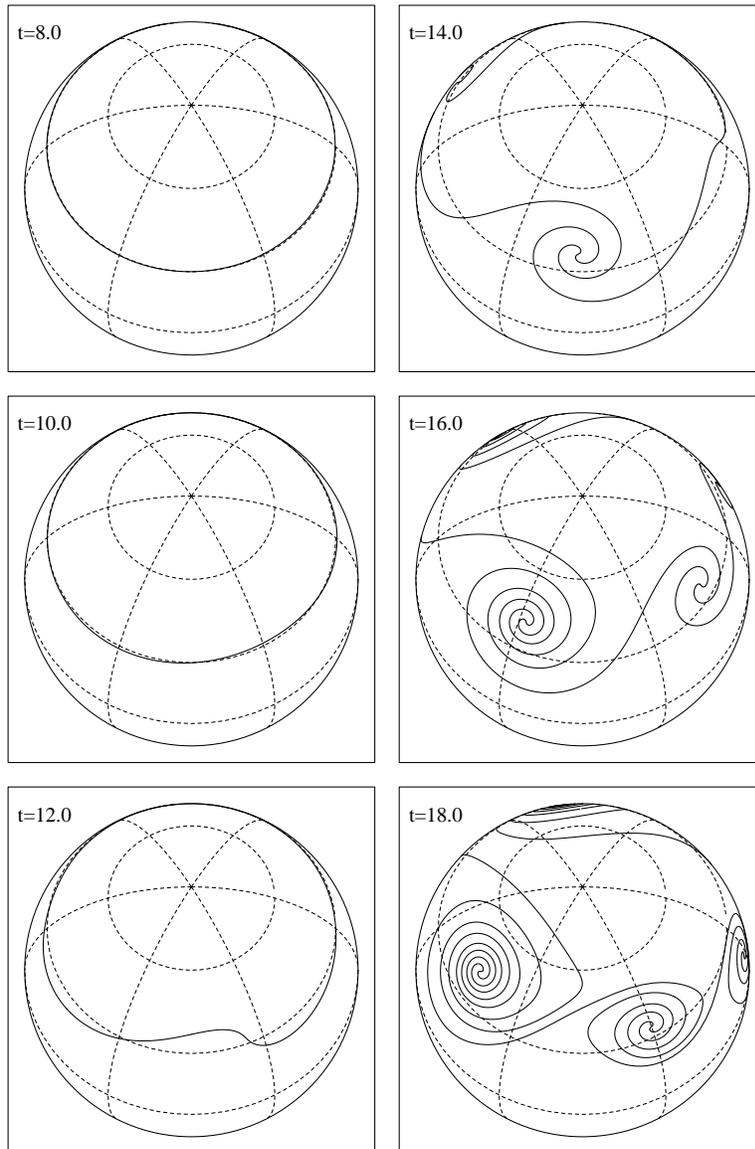


図 3: 極渦がない場合の渦層の長時間発展

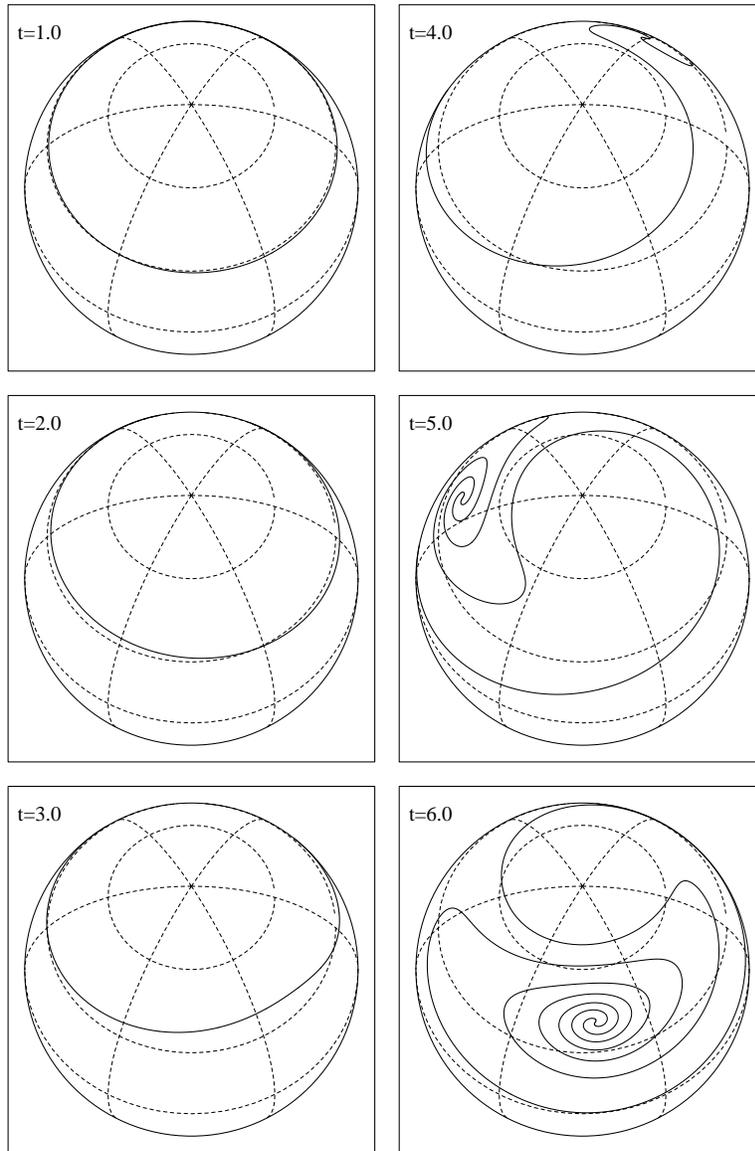


図 4: 極渦の大きさが  $\Gamma_1 = -2.5\pi$ ,  $\Gamma_2 = 0.5\pi$  の時の渦層の長時間発展

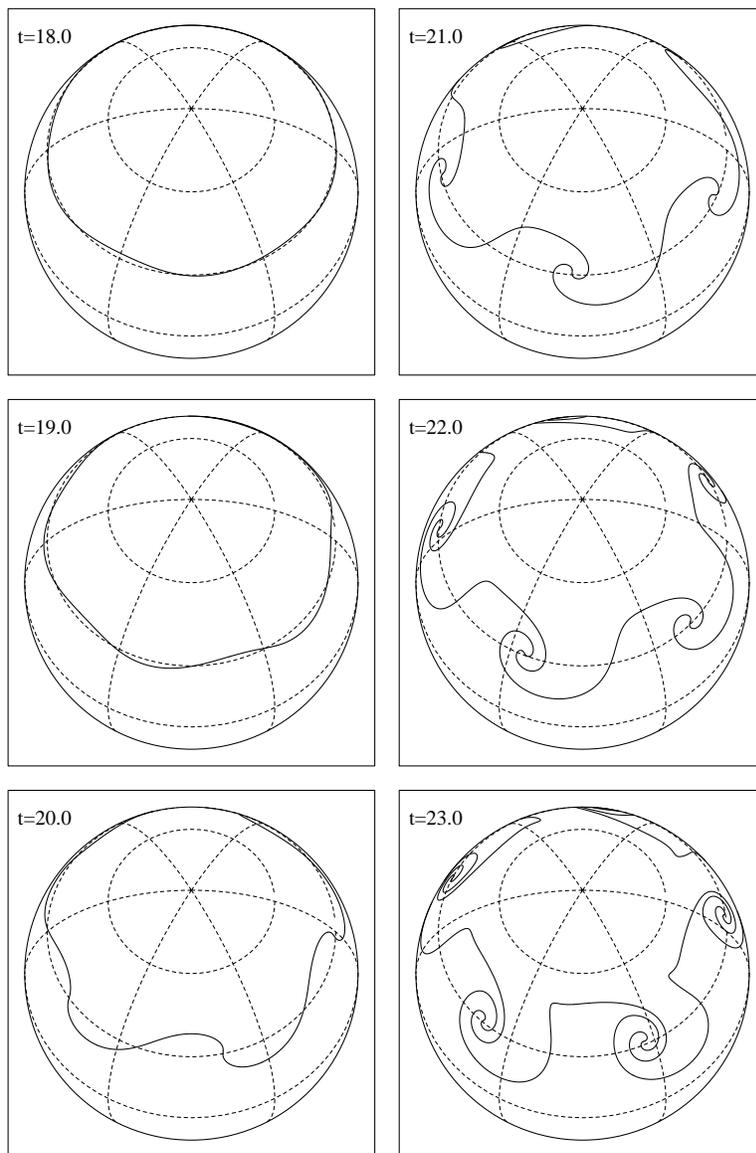


図 5: 極渦の大きさが  $\Gamma_1 = 1.5\pi$ ,  $\Gamma_2 = -3.5\pi$  の時の長時間発展

て、いくつかの低次の摂動のフーリエモードが線形中立安定になることがわかった。この安定性により、安定なモードが増える程、解は安定に長時間存在する。しかし、方程式の持つ非線形効果により初期の安定モードに加えた摂動から徐々に高次の不安定モードが励起され、それが急激に不安定化することで解全体も不安定化し、その結果、渦層には二次元と同様の曲率特異性が有限時間で発生する。さらに、渦法による正則化方程式の長時間発展の数値計算からは、解が安定なモードを持てば持つほど、より多くの渦巻きを持つ複雑な形状へ移行することがわかった。このような線形安定性が増す程、運動が複雑になって行く過程は、せん断流を持つ二次元渦層の運動 [11] においても見られた現象である。

最後に正則化渦層の長時間発展について議論しておく。数値計算の結果が示すように、中立安定なモードが増えれば現れる渦巻きの個数が増える。しかし、例えば図 3 の場合、モード 1 の摂動が中立安定だからといって 2 個の渦巻きが現れるわけではなく 4 つの渦巻が現れる。すなわち安定なモードの番号と現れる渦巻の数には単純な関係がないことを示している。どのようなメカニズムでこの渦巻の個数が選択されるかを考えることは今後の面白い課題である。

また、図 3 の渦巻きの中心は時間がたつにつれて緯度方向に大きくずれ運動を伴うが、一方図 5 では、渦巻の数が多いながらも、その中心は緯度方向に運動せず経度方向に回転するのみである。長時間発展後の渦巻き構造のこうした運動の違いが何によるのかを調べるために現在は極渦を持つ球面上の渦糸系の安定性などを調べており、その解釈が可能になっているが、この点については別のところで報告したい。

## 参考文献

- [1] R. Krasny, Desingularization of periodic vortex sheet roll-up, *J. Comput. Phys.* vol. **65**, 292–313 (1986).
- [2] R. Krasny, A study of singularity formation in a vortex sheet by the point-vortex approximation, *J. Fluid Mech.* vol. **167**, 65 (1986).
- [3] J. Liu and Z. Xin, “Convergence of vortex methods for weak solutions to the 2-D Euler equation with vortex sheet data,” *Comm. Pure Appl. Math.* **48**, pp.611-628 (1995).
- [4] D.W. Moore, The spontaneous appearance of a singularity in the shape of an evolving vortex sheet, *Proc. R. Soc. Lond. A*, vol. **365**, 105–119 (1979).

- [5] Q. Nie and G. Baker, Application of adaptive quadrature to axisymmetric vortex sheet motion, *J. Comput. Phys.* vol. **143**, 49 (1999).
- [6] M. Nitsche and R. Krasny, A numerical study of vortex ring formation at the edge of a circular tube, *J. Fluid Mech.* , vol. **276**, 139-161 (1994).
- [7] M. Nitsche, Singularity formation in a cylindrical and a spherical vortex sheet, *J. Comput. Phys.*, vol. **173**, 208 (2001).
- [8] P.G. Saffman, *Vortex Dynamics*, (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992)
- [9] T. Sakajo and H. Okamoto, “Numerical computation of vortex sheet roll-up in the background shear flow,” *Fluid Dyn. Res.* **17**, pp. 195–212 (1996).
- [10] T. Sakajo, Formation of curvature singularity along vortex line in an axisymmetric, swirling flow, *Phys. Fluids*, vol. **14** No.8, 2886-2897 (2002).
- [11] T. Sakajo, Motion of a vortex sheet on a sphere with pole vortices, to appear in *Phys. Fluids*.
- [12] A. Sidi and M. Israeli, “Quadrature methods for periodic singular and weakly singular Fredholm integral equations,” *J. Sci. Comp.* **3**(2), pp.201–231 (1988).
- [13] M.J. Shelley, A study of singularity formation in vortex-sheet motion by a spectrally accurate vortex method, *J. Fluid Mech.* vol. **244**, 493 (1992).
- [14] C. Sulem, P.L. Sulem, and H. Frisch, Tracing complex singularities with spectral methods, *J. Comput. Phys.*, vol. **50**, 138 (1983).