



|                  |                                                                                                                            |
|------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Title            | 書評 Computational Homology                                                                                                  |
| Author(s)        | 坂上, 貴之                                                                                                                     |
| Citation         | 応用数理, 15(2), 184-185                                                                                                       |
| Issue Date       | 2005-06                                                                                                                    |
| Doc URL          | <a href="https://hdl.handle.net/2115/15890">https://hdl.handle.net/2115/15890</a>                                          |
| Rights           | ここに掲載した著作物の利用に関する注意: 本著作物の著作権は日本応用数理学会に帰属します。本著作物は著作権者である日本応用数理学会の許可のもとに掲載しております。第3者が日本応用数理学会の許可無く内容の全部、又は一部を再転載することを禁じます。 |
| Type             | journal article                                                                                                            |
| File Information | s15-2.pdf                                                                                                                  |



# Computational Homology: もう一つの数値計算の姿

坂上貴之

北海道大学大学院理学研究科

E-mail:sakajo@math.sci.hokudai.ac.jp.

平成 17 年 1 月 10 日

トポロジーとは対象を連続変形させても変化しない性質を調べる幾何学の一分野であり、例えば対象が「つながっている」とか「穴があいている」などの性質を扱う。日常の図形認識において我々はこうしたトポロジカルな性質を抽出して対象の類型化を行うことが多いので、そのトポロジー情報を何らかの意味で定量化できれば、そのメリットは大きい。ホモロジーとはこうしたトポロジー情報を代数的に定量化するために導入されたものだが、一般にホモロジーの数学研究では抽象的議論が主であり、具体的な対象のホモロジー計算には注意が払われないことが多い。これに対して、ホモロジー計算を計算機上で実行するというテーマに取り組んだのが Konstantin Mischaikow 教授らのグループであり、その理論と実装について記されたのが本書である。

本書は三部構成となっているが、本質的なのは第一部（七章）と第二部（四章）である。まず第一章でホモロジー計算の概念とその応用について概説した後、第二章では cubical sets という区間の直積からなる  $n$  次元以下の cube の和集合を考え、そのホモロジー計算について詳しく解説している。数学的にホモロジーは鎖複体 (Chain complex) という抽象構造に対して定義されるので、cubical sets はその単なる一例に過ぎないとも言えるが、実はこれは計算機に実装しやすいものであるのに加え、多くの対象のホモロジー計算がその近似 cubical sets のホモロジー計算に帰着できるので本章が計算機によるホモロジー計算の中核部分をなす。初学者は本章を丹念に読むことをお奨めする。続いて第三章や第四章ではホモロジー計算の実装に必要な整数係数の行列演算の理論と、それを用いたホモロジー計算のプログラムが記述されている。

第五章以降では写像に関連したホモロジー計算の理論とその計算機への実装方法が述べられている。一般に連続写像  $f: X \rightarrow Y$  が与えられた時、そこから  $X$  と  $Y$  のホモロジー間に準同型写像  $f_*$  を誘導できるが、逆にこの  $f_*$  から元の写像  $f$  の性質（不動点の存在など）を示すこともできる。そのため、この誘導写像をホモロジー計算で求めることは  $f$  の情報を得るのに有効なのである。

第二部ではホモロジー計算の応用を扱っている。特に重要なのは第八章と第十章であろう。第八章では画像処理における利用方法が示されている。すなわち与えられた画像から「連結している成分」や「穴が空いている個数」などの情報を抜き出し、二つの対象のトポロジーの違いを検出することができる。また、第十章は非線形力学への応用である。力学系理論では、解のトポロジカルな性質が重要な役割を果たす場合が多いので、そこでホモロジー計算が威力を発揮する。この章では力学系の基礎的な用語や概念を概説した後、計算機によるホモロジー計算からエノン写像にカオスが存在することを実際に証明する方法が与えられている。

最後に本書の意義について二つ強調したいことがある。まず、ホモロジー計算によるトポロジー情報の抽出は、従来の数値計算とは異なる新しい道具立てであるということ。もう一つはホモロジー計算が整数係数の行列計算により実装されるので、計算結果には浮動小数点演算に伴う誤差が含まれないということである。このことは、ホモロジー計算が単に図形認識だけでなく、数学的に厳密な証明を与える方法としても利用できることを意味しており、計算機支援による数学研究への応用が期待される。本号の特集がこの方向

での最先端を伝える恰好の記事となっているであろう。なお、彼らはこの本に基づいてプログラムパッケージ CHomP(Computational Homology Program) を作成・インターネット上で配布しており、簡単にホモロジー計算ができるようになっている。本書を学ぶことでその出力の意味を理解し、多くの問題に応用できるようになれば、我々はこれまでとは異なる成果を得ることができるであろう。