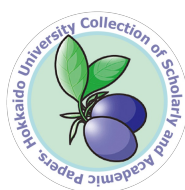




HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	応用数理サマーセミナー 2006 確率微分方程式
Author(s)	石村, 直之; 石渡, 哲哉; 坂上, 貴之 他
Citation	Hokkaido University technical report series in mathematics, 113, 1
Issue Date	2006-01-01
DOI	https://doi.org/10.14943/15738
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/17078
Type	departmental bulletin paper
File Information	0001617.pdf



応用数理サマーセミナー 2006

確率微分方程式

日本応用数理学会・北海道大学数学 COE 共催

事業委員：石村 直之，石渡 哲哉，坂上 貴之
櫻井 鉄也，長山 雅晴，奈良 高明
速水 謙，降旗 大介，松尾 宇泰

Series #113. September, 2006

HOKKAIDO UNIVERSITY
TECHNICAL REPORT SERIES IN MATHEMATICS

- #89 S. Izumiya (Ed.) M. Takahashi, T. Miyao, G. Okuyama, Y. Nakano and K. Inui, 第1回数学総合若手研究集会 COE Conference for Young Researchers, 143 pages. 2005.
- #90 J. Saal, 1st COE Lecture Series H^∞ -calculus for the Stokes operator on L_q -spaces, 34 pages. 2005.
- #91 S. Miyajima, F. Takeo and T. Nakazi (Eds.), 第13回関数空間セミナー報告集, 111 pages. 2005.
- #92 N. Umeda, 第4回COE研究員連続講演会 反応-拡散方程式の大域解と爆発解について, 8 pages. 2005.
- #93 K. Arima, 第2回COE研究員連続講演会 極小モデルプログラムの入門およびその正標数への拡張, 25 pages. 2005.
- #94 Y. Nakano, 学位論文 Doctoral thesis “OPTIMAL HEDGING IN THE PRESENCE OF SHORTFALL RISK” 43 pages. 2005.
- #95 Keiji Matsumoto and Masao Jinzenji (Eds.), 2004年度談話会・特別講演アブストラクト集, 17 pages. 2005.
- #96 T. Ozawa, Y. Giga, S. Jimbo, G. Nakamura, Y. Tonegawa and K. Tsutaya (Eds.), Proceedings of the 30th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 83 pages. 2005.
- #97 M. Watanabe, 第5回COE研究員連続講演会 『逆散乱法』入門, 52 pages. 2005.
- #98 M. Takeda, T. Mikami (Eds.), Probability and PDE, 48 pages. 2005.
- #99 M. Van Manen, The 6th COE Lecture Series “From the cut-locus via medial axis to the Voronoi diagram and back” 42 pages. 2005.
- #100 K. Hayami, T. Nara, D. Furihata, T. Matsuo, T. Sakurai and T. Sakajo (Eds.), 応用数理サマーセミナー「逆問題」, 196 pages. 2005.
- #101 B. Forbes, The 7th COE Lecture Series トーリックミラー対称性, 56 pages. 2005.
- #102 H. Kubo, T. Ozawa and K. Yamauchi, SAPPORO GUEST HOUSE SYMPOSIUM ON MATHEMATICS 20 “Nonlinear Wave Equations”, 68 pages. 2005.
- #103 A. Miyachi and K. Tachizawa, Proceedings of the Harmonic Analysis and its Applications at Sapporo, 107 pages. 2005.
- #104 S. Izumiya (Ed), Y. Numata, J. Ishimoto, I. Sasaki, Y. Nagase and M. Yamamoto, 第2回数学総合若手研究集会 - The 2nd COE Conference for Young Researchers -, 274 pages. 2006.
- #105 T. Yamamoto, O. Hatori, M. Hayashi and T. Nakazi (Eds.), 第14回関数空間セミナー, 112 pages. 2006.
- #106 Y. Daido, 学位論文 Doctoral thesis “RECONSTRUCTION OF INCLUSIONS FOR THE INVERSE BOUNDARY VALUE PROBLEM OF HEAT EQUATION USING PROBE METHOD”, 68 pages. 2006.
- #107 T. Yamamoto, 学位論文 Doctoral thesis “Singular fibers of two colored differentiable maps and cobordism invariants”, 333 pages. 2006.
- #108 S. Izumiya, Singularity theory of smooth mappings and its applications: a survey for non-specialists, 41 pages. 2006.
- #109 J. Cheng, B. Y. C. Hon, J. Y. Lee, G. Nakamura and M. Yamamoto, Inverse Problems in Applied Sciences - towards breakthrough - Organizing Committee, 96 pages. 2006.
- #110 K. Matsumoto, 超幾何関数早春学校, 87 pages. 2006.
- #111 T. Ozawa, Y. Giga, S. Jimbo, G. Nakamura, Y. Tonegawa, K. Tsutaya and T. Sakajo, The 31th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 91 pages. 2006.
- #112 H. Okamoto, D. Sheen, Z. Shi, T. Ozawa, T. Sakajo and Y. Chen, Book of Abstracts of the First China-Japan-Korea Joint Conference on Numerical Mathematics & The Second East Asia SIAM Symposium, 78 pages. 2006.

応用数理サマーセミナー 2006

確率微分方程式

札幌, 2006

日本応用数理学会・北海道大学数学 COE 共催

序

応用数理サマーセミナーは、抽象的な数学概念とその応用について、その方法と現状を多くの人に提供する目的でスタートしました。昨年度にその第一回目が開催され「逆問題」をテーマとし、大好評のうちに終えることができました。

本年度は、「確率微分方程式」をテーマに、その代表的な応用例である「数理ファイナンス」に関して基礎から応用までの幅広い話題が俯瞰できるようプログラムを構成しました。

初日は確率微分方程式の基礎を高岡浩一郎先生に解説していただき、二日目以降は数理ファイナンスから3つの話題を、長井英生先生、中川秀敏先生、関根順先生に提供していただきます。

偶然にも今年度スペインで開催された国際数学者会議(ICM)において、確率微分方程式の基礎を与えた伊藤清先生がガウス賞を授与されました。数理ファイナンスへの応用が評価されての受賞です。抽象的な数学概念が、長い年月を経て社会において応用され大きな成果を生み出したということは数学とその応用のある一つの姿を示しています。本セミナーを通じて、参加者が確率微分方程式に対する関心を引き出すのは勿論のこと、その一つの姿を感じる契機となれば幸いです。

事業委員： 石村直之，石渡哲哉，坂上貴之，櫻井鉄也
長山雅晴，奈良高明，速水謙，降旗大介，松尾宇泰

******* プログラム *******

9 月 11 日(月)

■13:00-13:30 ガイダンス

■13:30-15:00 基礎1

「確率微分方程式の基礎」 高岡浩一郎先生 (一橋大学)

■15:20-16:50 基礎2

「確率微分方程式の基礎」 高岡浩一郎先生 (一橋大学)

■17:00-18:30 PCセッション

9 月 12 日 (火)

■10:00-12:00 応用A

「フィルタリング, 確率制御, そして数理ファイナンス」 長井英生先生 (大阪大学)

■13:30-15:30 応用B

「信用リスク・モデルへの応用」 中川秀敏先生 (東京工業大学)

■16:00-17:30 PCセッション

■18:30ー 懇親会

9 月 13 日 (水)

■10:00-12:00 応用C

「動的ポートフォリオ最適化に纏わる問題」 関根順先生 (京都大学)

確率微分方程式の基礎

応用数学会サマーセミナー「確率微分方程式」

2006 年 9 月 11 ～ 13 日，於 北海道大学

高岡浩一郎¹（一橋大学大学院商学研究科）

¹〒 186-8601 東京都国立市中 2-1 一橋大学大学院商学研究科, Email: takaoka@math.hit-u.ac.jp

目次

第1章	はじめに	3
第2章	Brown 運動 (Wiener 過程)	4
2.1	数学的定義	4
2.2	見本関数に関する性質	6
第3章	確率積分	7
3.1	序：通常の Stieltjes 積分との違い	7
3.2	Brown 運動についての伊藤積分	8
3.3	伊藤過程	9
3.4	2つの伊藤過程の quadratic covariation	11
第4章	伊藤の公式	12
4.1	伊藤の公式と例	12
第5章	確率微分方程式	14
5.1	例	14
5.2	強解と弱解, 存在と一意性	16
第6章	マルチンゲール	18
6.1	定義, 例, 性質	18
6.2	拡散過程および偏微分方程式との関係	20
6.3	マルチンゲール表現定理	21
第7章	確率の変更	22
7.1	Girsanov-丸山の定理 (の特別なケース)	22
第8章	数理ファイナンスへの応用 (オプション価格理論の基礎)	23
8.1	Black-Scholes 価格変動モデル	23
8.2	オプションとは	23
8.3	マルチンゲールを用いたオプション価格計算	24
8.4	偏微分方程式を用いたオプション価格計算	25
第9章	付録	27
9.1	Brown 運動, 伊藤解析や確率微分方程式に関する歴史の概観	27
9.2	その他の話題に関する簡単な紹介	27
9.2.1	フィルトレーション, 適合的過程	27
9.2.2	停止時刻	28

9.2.3	Stratonovich 積分	28
9.2.4	多次元の伊藤積分	29
9.2.5	セミマルチンゲール	29
9.2.6	多様体上の確率微分方程式	30
9.2.7	確率偏微分方程式	30
9.2.8	Backward Stochastic Differential Equations	30
9.3	テキストブックの紹介	30

第1章 はじめに

確率微分方程式 (stochastic differential equation, SDE) とは、端的に言うと「ノイズ項の入った微分方程式」のことである。物理・工学・経済など様々な分野においてノイズを伴い時間発展する系を考えることが多いし、また（ランダムとは限らないが）複雑な系の一部をノイズ項として扱うほうが便利だと考えられるケースも多いが、確率微分方程式はそれらの系の記述や解析に用いられる。

「確率微分方程式」というときは通常、(有限次元の) 常微分方程式に “Gauss 白色雑音” 項を加えた

$$\dot{X}_t = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t) \dot{B}_t \quad (1.1)$$

(ただし $\dot{B}_t$ は Gauss 白色雑音とする) という形の方程式を指すことが多いので、このチュートリアルでも、主にこの形の方程式に関して解説を行う。数学的にはこの式 (1.1) を直接扱うのではなく、積分形にした

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s \quad (1.2)$$

にきっちり数学的な定義を与えて、論じていく。ただし B_t は Gauss 白色雑音を時間積分した確率過程で、**Brown 運動 (Wiener 過程)** と呼ばれている。ここで、Brown 運動の見本関数は連続だが微分可能でなく、有限変動でもないため、式 (1.2) 右辺第 2 項の積分は通常の Stieltjes 積分の範疇では扱えない。つまり、通常の微積分の範疇に入らないのである。しかし、確率的に変動していることをうまく用いて **確率積分** という概念としてきっちり定義可能であることが 1942 年に伊藤清氏によって発見され、また置換積分に相当する **伊藤の公式** などの解析ツールも整備された。このチュートリアルでは、これら **確率解析** もしくは **伊藤解析 (Itô Calculus)** と総称されている解析の枠組みとそれに基づく確率微分方程式論について、基礎的事項を解説していく。説明の際にはできるだけ数学的厳密さも損ねないように注意するつもりであるが、主な狙いはイメージをつかんで頂くことに置き、随所で例を挙げながら説明しようと思う。

確率微分方程式の応用は多岐にわたるが、この 90 分 × 2 コマのチュートリアルの最後のほうは数理ファイナンスの基礎 (オプション価格理論) についての解説にあてる予定である。これにより、サマーセミナー 2 ~ 3 日目の長井氏、中川氏、関根氏の講演にスムーズにつなげることもねらいとしている。

なお、多様体上の確率微分方程式や、偏微分方程式にノイズ項を加えた **確率偏微分方程式** などについては、このチュートリアルでは扱わないが、本稿の最終章に簡単な紹介とともに文献等を記したので、ご興味がある方は参照して頂きたい。

第2章 Brown 運動 (Wiener 過程)

2.1 数学的定義

定義 2.1.1. 実数値確率変数の列 $B = (B_t)_{t \geq 0}$ が次の 4 性質を満たす時, 1 次元標準 Brown 運動 (Wiener 過程) であるという. 以下, 単に Brown 運動と呼ぶことにする.

1. $B_0 = 0$
2. 各自然数 n と時刻 $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ に対して, n 個の確率変数

$$B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$$

は独立である (独立増分性).

3. 各時刻 $0 \leq s < t$ に対して, 確率変数 $B_t - B_s$ の分布は $N(0, t-s)$ である. 特に, 確率変数 B_t の分布は $N(0, t)$.
4. 確率 1 で, 見本関数 (経路, *sample path*) が連続である.

定義 2.1.2. $(\sigma B_t + bt)_{t \geq 0}$ という形の確率過程 (ただし σ と b は定数とする) を, 一般化された Brown 運動と呼ぶ. また,

$$S_t = S_0 \exp(\sigma B_t + bt)$$

という形の確率過程 S を 幾何 Brown 運動と呼ぶ. ただし S_0 は定数とする.

注 2.1.3. Brown 運動は, 連続時間の確率過程の中で最も中心的な役割を果たしている. 実際, Brown 運動は以下の全てのクラスに入っている.

- 拡散過程 (§6.2 参照)
- Lévy 過程 (独立・定常増分性を有する確率過程*)
- Markov 過程 (拡散過程と Lévy 過程を含む)
- マルチンゲール (「公平なゲーム」, 第 6 章参照)
- Gauss 過程 (有限次元分布がすべて正規分布)

また, Brown 運動自体は定常過程ではないが, それを時間微分した Gauss 白色雑音 (定義 2.2.8) は定常過程である.

注 2.1.4. 1 次元対称ランダムウォークのメッシュを細かくした極限として, Brown 運動を捉えることも可能である.

*正確には, Lévy 過程はこれ以外にも確率連続性も満たすものを指す.

注 2.1.5. *Brown* 運動に限らず確率過程一般に対して言えることであるが、単に B_t と記すだけでは、時刻 t を固定した時の確率変数を考えているのか、時刻を動かして確率過程全体を考えているのが判然としない時があるので、後者であることを明示したい場合は

$$(B_t)_{t \geq 0} \quad \{B_t\}_{t \geq 0} \quad \{B_t\} \quad \{B_t : t \geq 0\} \quad B_\bullet \quad B$$

などと記すほうが望ましい。一方、前者であることを明示したい場合は「確率変数 B_t 」と述べるのが良いと思う。

注 2.1.6. 分野や文献によって記号や用語の使い方が微妙に異なるので、注意が必要である。

- *Brown* 運動を表す記号として、本稿のような B のほかに W や z を用いることも多い。また、白色雑音のほうを W （ドット無し）と記すこともある。
- 本稿の一般化された *Brown* 運動（定義 2.1.2）を単に「*Brown* 運動」と呼び、代わりに本稿の *Brown* 運動を「標準 *Brown* 運動」と呼ぶ文献も多い。
- 現象としての *Brown* 運動と、その数学的モデルとしての *Wiener* 過程とを、概念的にきっちり分けて論じる分野もある。

注 2.1.7. 上記の定義 2.1.1 を満たす確率過程が数学的に実在すること（つまり定義 2.1.1 が過剰決定系でないこと）は、本質的には *N. Wiener* [25] によって証明された。また次のように、定義 2.1.1 の性質の一部は余分であるとも言える。

- 4 番目の性質（見本関数の連続性）は、他の 3 つの性質から導くことができる**。
- 性質 1, 2, 4 および定常増分性を満たすような確率過程は、一般化された *Brown* 運動（定義 2.1.2）に限られる。

命題 2.1.8. $(B_t)_{t \geq 0}$ が *Brown* 運動の時、任意の正定数 c に対して、スケール変換した確率過程

$$\left(\frac{B_{ct}}{\sqrt{c}} \right)_{t \geq 0}$$

も再び *Brown* 運動になる。

定義 2.1.9. d 個の互いに独立な 1 次元 *Brown* 運動

$$(B_t^{(i)})_{t \geq 0}, \quad i = 1, 2, \dots, d$$

を成分とする $\mathbb{R}^d$ 値確率過程

$$(B^{(1)}, B^{(2)}, \dots, B^{(d)})^\top$$

を、 d 次元標準 *Brown* 運動（*Wiener* 過程）という。

**正確に言うと、性質 1 ~ 3 をみたす確率過程は連続修正（continuous modification）を持つ。

2.2 見本関数に関する性質

Brown 運動の見本関数は、連続であるが非常にガタガタしている。本節では、具体的な数学的性質として3つの定理を挙げておく。見本関数に関するその他の性質については、Karatzas & Shreve [14] などに詳しい。

定理 2.2.1. 確率 1 で、Brown 運動の見本関数は *nowhere differentiable* である。

定理 2.2.2. Brown 運動の見本関数は有限変動 (*finite variation*)[†] でない。つまり、各 $T > 0$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left| B_{\frac{i}{n}T} - B_{\frac{i-1}{n}T} \right| = \infty \quad a.s. \quad (2.1)$$

注 2.2.3. 式 (2.1) の左辺を、Brown 運動の見本関数の時刻 T までの全変動 (*total variation*) という。 t について C^1 級の関数 $(x_t)_{t \geq 0}$ は、時刻 T までの全変動が

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left| x_{\frac{i}{n}T} - x_{\frac{i-1}{n}T} \right| = \int_0^T \left| \frac{dx_t}{dt} \right| dt < \infty$$

となるので、有限変動である。

定義 2.2.4. $T > 0$ とする。Brown 運動の時刻 T までの **2 次変分** (2 次変動, *quadratic variation*) は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left\{ B_{\frac{i}{n}T} - B_{\frac{i-1}{n}T} \right\}^2$$

で定義される確率変数のことである[‡]。記号では $\langle B \rangle_T$ と記す。

定理 2.2.5. Brown 運動の時刻 T までの 2 次変分 $\langle B \rangle_T$ は存在し、確率 1 で T に等しい。

注 2.2.6. 数学的に厳密な式ではないが、

$$“ dB_t = \pm \sqrt{dt} ” \quad \text{あるいは} \quad “ (dB_t)^2 = dt ”$$

と思うと便利ことが多い。

注 2.2.7. 連続かつ有限変動な関数の 2 次変分は、恒等的に 0 になる。

定義 2.2.8. Brown 運動を時刻 t について超関数微分した確率過程を、Gauss 白色雑音という。実数値確率過程にはならない。Gelfand [6] などを参照されたい。

[†]有界変動 (*bounded variation*) というのも多いが、本稿では有限変動と呼ぶことにする。

[‡]極限は確率収束の意味である。

第3章 確率積分

特に断らない限り、本章の確率過程は全て実数値とする。多次元の確率積分もほぼ同様に定義されるが、注意点は §9.2.4 を参照されたい。

3.1 序：通常の Stieltjes 積分との違い

$(x_t)_{t \geq 0}$ は実数値の有限変動関数とする。このとき、Lebesgue 可積分な実数値関数 $H = (H_t)_{t \geq 0}$ が、ある可積分条件* を満たせば、各 $T \geq 0$ に対して Lebesgue-Stieltjes 積分

$$\int_0^T H_t dx_t \quad (3.1)$$

が定義可能である[†]。特に H が連続な時は Riemann-Stieltjes 積分としても定義可能であり、

$$\int_0^T H_t dx_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n H_{t_i} \{ x_{\frac{i}{n}T} - x_{\frac{i-1}{n}T} \} \quad (3.2)$$

となる。ただし各 t_i は小区間 $[\frac{i-1}{n}T, \frac{i}{n}T]$ 内で任意に選んだ点である。どんな点を選んでも収束先が同一になるのが、「Riemann-Stieltjes 積分可能」の定義である[‡]。

前章で見たように Brown 運動の見本関数は有限変動でないので、式 (3.1) の x を Brown 運動の見本関数で単純に置き換えると、狭いクラスの被積分過程 H に対してしか Stieltjes 積分を定義できない。しかし、確率的に変動していること（本質的にはマルチンゲール性）をうまく用いて、充分広いクラスの被積分過程に対して積分が定義可能になる。また通常の Riemann-Stieltjes 積分 (3.2) とは異なり、各 t_i を小区間のどこでとるかによって、収束先が変わる。

- 左端での H の値をとる定義方法を **伊藤積分** という。
- 右端での H の値をとる定義方法を **後ろ向き伊藤積分** という。
- 左端での H の値と右端での H の値の平均をとる定義方法を **Stratonovich 積分** という。

それぞれ長所がある。伊藤積分については以下の §3.2 ~ §3.4 で解説する。Stratonovich 積分は、伊藤積分に 2 次変分（の半分）を加えた形になるので、伊藤積分を用いて書き換え可能である。§9.2.3 で解説する。

*各 $T \geq 0$ に対して $\int_0^T |H_t| |dx_t| < \infty$ 。

[†] x が C^1 級の時は、式 (3.1) は $\int_0^T H_t \dot{x}_t dt$ と等しい。

[‡] H が連続かつ有限変動ならば、連続関数 x について (x は有限変動でなくても良い) Riemann-Stieltjes 積分が定義可能であることも知られている。部分積分を用いる。

3.2 Brown 運動についての伊藤積分

定理および定義 3.2.1. $(H_t)_{t \geq 0}$ が次の3つの性質を満たすとする.

1. (*Brown* 運動 B から生成されるフィルトレーションについて) 適合的である[§].
2. 局所有界である[¶].
3. 確率 1 で, 見本関数が左連続で, かつ各時刻で右極限を持つ.

このとき, 極限

$$\int_0^t H_s dB_s := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n H_{\frac{i-1}{n}t} \{ B_{\frac{i}{n}t} - B_{\frac{i-1}{n}t} \} \quad (3.3)$$

が存在する^{||}. これを H の B についての伊藤積分という.

注 3.2.2. H が上記定義中の1番目の条件を満たし, かつ, 2番目の条件を緩めた「確率 1 で, 各 $t \geq 0$ に対して可積分条件

$$\int_0^t H_s^2 ds < \infty \quad (3.4)$$

を満たす」という性質を満たす場合にも (3番目の条件は不要), 伊藤積分が定義可能であることが知られている.

注 3.2.3. H が確定的 (*deterministic*) で可積分条件 (3.4) を満たすケースにおける伊藤積分のことを, **Wiener 積分** と呼ぶ. §9.1 も参照のこと.

例 3.2.4. $\int_0^t B_s dB_s$ を計算してみよう. 定義式 (3.3) より

$$\begin{aligned} \int_0^t B_s dB_s &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n B_{\frac{i-1}{n}t} \{ B_{\frac{i}{n}t} - B_{\frac{i-1}{n}t} \} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{B_{\frac{i-1}{n}t} + B_{\frac{i}{n}t}}{2} - \frac{B_{\frac{i}{n}t} - B_{\frac{i-1}{n}t}}{2} \right\} \{ B_{\frac{i}{n}t} - B_{\frac{i-1}{n}t} \} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \{ B_{\frac{i}{n}t}^2 - B_{\frac{i-1}{n}t}^2 \} - \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \{ B_{\frac{i}{n}t} - B_{\frac{i-1}{n}t} \}^2 \\ &= \frac{B_t}{2} - \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \{ B_{\frac{i}{n}t} - B_{\frac{i-1}{n}t} \}^2 \\ &= \frac{B_t}{2} - \frac{t}{2} \end{aligned}$$

となる. ここで3つ目の等号のところでは $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ の形の計算を行っている. 4つ目の等号は, 隣り合う添え字 i についての打ち消し合いから成立している. また, 最後の等号では *Brown* 運動の2次変分が効いてくる.

定理 3.2.5. 定義 3.2.1 や注 3.2.2 の積分の結果得られる確率過程 $\int H dB$ は, 次の性質を持つ.

[§]§9.2.1 参照.

[¶]§9.2.2 参照.

^{||}この極限は, 確率収束の意味である.

1. $\int H dB$ は見本関数が連続となり、時刻 0 における値は 0 になる。
2. $\int H dB$ の 2 次変分は

$$\left\langle \int H dB \right\rangle_t = \int_0^t H_s^2 ds \quad (3.5)$$

となる。

3. (第 6 章で詳述するが) $\int H dB$ は (局所) マルチンゲールになる。「公平なゲームに賭けても損益の期待値はゼロ」という直感に対応した性質である。
4. 各 $t > 0$ に対して

$$\mathbb{E} \int_0^t H_s^2 ds < \infty$$

が満たされるならば、

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t H_s dB_s \right)^2 \right] = \mathbb{E} \int_0^t H_s^2 ds$$

が成り立つ。この関係式を **伊藤積分の等長性** という。

注 3.2.6. 2 次変分 (3.5) に関して、数学的に厳密な式ではないが、注 2.2.6 と同じ見方で

$$“ (H_t dB_t)^2 = H_t^2 dt ”$$

と考えると便利ことが多い。

注 3.2.7. *Stratonovich* 積分に比べ、**伊藤積分の長所**として次の 3 点が挙げられる。

- $(S_t)_{t \geq 0}$ を資産の価格変動、 $(H_t)_{t \geq 0}$ を時刻 t における資産保有量とした時の合計損益を積分 $\int_0^T H_t dS_t$ で表現する場合は、伊藤積分こそが自然な概念である。なぜなら確率積分の離散時間版

$$\sum_{i=1}^n H_{t_i} \{ S_{\frac{i}{n}T} - S_{\frac{i-1}{n}T} \}$$

を考えると、伊藤積分で各 t_i を小区間の左端 $\frac{i-1}{n}T$ と選ぶことは、小区間 $[\frac{i-1}{n}T, \frac{i}{n}T]$ での資産保有量を時刻 $\frac{i-1}{n}T$ までの情報のみを使って定めることに対応しているからである。

- 定理 3.2.5 の 3 番目と 4 番目の性質は、*Stratonovich* 積分に対しては成立しない。
- 伊藤積分は、定義可能な範囲が *Stratonovich* 積分よりも広い。

3.3 伊藤過程

定義 3.3.1.

$$X_t = X_0 + \int_0^t H_s dB_s + \int_0^t K_s ds \quad (3.6)$$

という形の確率過程を **伊藤過程** という。ただし、 H と K は (*Brown* 運動 B から生成されるフィルトレーションについて) 適合的な確率過程であり、確率 1 で、各 $t \geq 0$ に対して可積分条件

$$\int_0^t H_s^2 ds < \infty \quad \text{かつ} \quad \int_0^t |K_s| ds < \infty$$

を満たすとする。また X_0 は定数とする。式 (3.6) の右辺最終項は、通常の *Lebesgue* 積分である。

命題 3.3.2. (伊藤過程の性質)

1. 伊藤過程の, *Brown* 運動についての積分の部分 (マルチンゲール部分という) および通常の *Lebesgue* 積分の部分 (有限変動部分という) への分解は, 一通りに定まる.
2. 伊藤過程 (3.6) の 2 次変分 $\langle X \rangle_t$ は

$$\langle X \rangle_t = \int_0^t H_s^2 ds \quad (3.7)$$

である. 有限変動部分は 2 次変分に寄与しない.

注 3.3.3. 2 変数の確定的 (*deterministic*) な関数 $H(t, s)$ を用いて

$$X_t := \int_0^t H(t, s) dB_s$$

という伊藤積分を考えると, *Gauss* 過程を一般的に表現できるという定理があるが, 被積分過程が t に明示的に依存しているので伊藤過程の範疇に入るとは限らない. 例えば, 非整数次 *Brown* 運動は伊藤過程ではない. (§9.2.5 で述べるセミマルチンゲールでもない.)

定義 3.3.4. (伊藤過程についての積分) 伊藤過程 (3.6) を考える. 適合的な確率過程 L が

$$\int_0^t (L_s H_s)^2 ds < \infty \quad \text{かつ} \quad \int_0^t |L_s K_s| ds < \infty, \quad a.s.$$

という可積分条件を満たす時, L の X についての伊藤積分を

$$\int_0^t L_s dX_s := \int_0^t L_s H_s dB_s + \int_0^t L_s K_s ds \quad (3.8)$$

と定義する.

命題 3.3.5. 定義 3.3.4 の積分の結果得られる確率過程 $\int L dX$ は, 次の性質を持つ.

1. $\int L dX$ も伊藤過程となり, 時刻 0 における値は 0 になる.
2. $\int L dX$ の 2 次変分は

$$\left\langle \int L dX \right\rangle_t = \int_0^t (L_s H_s)^2 ds = \int_0^t L_s^2 d\langle X \rangle_s \quad (3.9)$$

となる.

3. L と X の双方について線型性を持つ.

注 3.3.6. 積分式 (3.6) を, 記号を簡略化して

$$dX_t = H_t dB_t + K_t dt \quad (3.10)$$

と (形式的に) 記すこともある. これを **微分形** という. 同様に, 式 (3.8) の微分形は

$$L_t dX_t = L_t H_t dB_t + L_t K_t dt \quad (3.11)$$

である. 直感的に分かりやすいので便利な表記法だが, 注意したいことは, (3.10) や (3.11) 自体には直接的な数学的意味付けがされていないということである. 式 (3.10) を dt で割った

$$“ \dot{X}_t = H_t \dot{B}_t + K_t ”$$

という等式には, 超関数論の範疇での意味が付いていない.

3.4 2つの伊藤過程の quadratic covariation

定義 3.4.1. $T > 0$ とし, X と Y は共に伊藤過程であるとする. X と Y の時刻 T までの *quadratic covariation* とは

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left\{ X_{\frac{i}{n}T} - X_{\frac{i-1}{n}T} \right\} \left\{ Y_{\frac{i}{n}T} - Y_{\frac{i-1}{n}T} \right\}$$

で定義される確率変数のことである**. 記号では $\langle X, Y \rangle_T$ と記す.

注 3.4.2. 定義から, $\langle X, X \rangle_T = \langle X \rangle_T$ である.

命題 3.4.3. $B^{(1)}$ と $B^{(2)}$ は2つの *Brown* 運動で, 両者の相関は定数 ρ であるとする.

(i) このとき, $\langle B^{(1)}, B^{(2)} \rangle_T = \rho T$ が成り立つ.

(ii) さらに一般的に, 2つの伊藤過程

$$X_t^{(i)} = X_0^{(i)} + \int_0^t H_s^{(i)} dB_s^{(i)} + \int_0^t K_s^{(i)} ds$$

(ただし $i = 1, 2$) の時刻 T までの *quadratic covariation* は

$$\langle X^{(1)}, X^{(2)} \rangle_T = \rho \int_0^T H_t^{(1)} H_t^{(2)} dt \quad (3.12)$$

である.

注 3.4.4. 特に, $\langle W, t \rangle_T = \langle t, t \rangle_T = 0$ である.

注 3.4.5. 前節の注 3.3.6 で述べた微分形は, 本節の式 (3.12) に対しては

$$d\langle X^{(1)}, X^{(2)} \rangle_t = \rho H_t^{(1)} H_t^{(2)} dt$$

となる.

注 3.4.6. 数学的に厳密な式ではないが,

$$“ d\langle X, Y \rangle_t = dX_t dY_t ”$$

と思うと便利ことが多い.

** 極限は確率収束の意味である.

第4章 伊藤の公式

4.1 伊藤の公式と例

伊藤の公式は「置換積分」の確率過程版である。 $(x_t)_{t \geq 0}$ を t について微分可能な実数値関数とし、 C^1 級の関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を考えるとき、合成関数の微分

$$\frac{df(x_t)}{dt} = f'(x_t) \frac{dx_t}{dt}$$

およびその積分形である置換積分

$$f(x_t) = f(x_0) + \int_0^t f'(x_s) dx_s \quad (4.1)$$

が成り立つ。ただし式 (4.1) の右辺第2項は Stieltjes 積分。ところが x の代わりに Brown 運動をはじめ伊藤過程の見本関数を考えると、微分可能でなく（有限変動でもない）非常にガタガタしているため、右辺第2項を伊藤積分として考えるのみならず右辺にもう1つ項が付け加わる形になる。「形式的に Taylor 展開を2次までとった形である」とも言える。

定理 4.1.1. (伊藤の公式*)

(i) B を Brown 運動とし、 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を C^2 級関数とする。このとき、確率過程 $(f(B_t))_{t \geq 0}$ は伊藤過程となり

$$f(B_t) = f(0) + \int_0^t f'(B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B_s) ds \quad (4.2)$$

が成立する。

(ii) さらに一般的に、 X を実数値の伊藤過程とし、 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を C^2 級関数とする。このとき、確率過程 $(f(X_t))_{t \geq 0}$ も再び伊藤過程となり

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d\langle X \rangle_s \quad (4.3)$$

が成立する。

(iii) さらに一般的に、 $X = (X^{(1)}, \dots, X^{(d)})^\top$ を $\mathbb{R}^d$ 値の伊藤過程、 $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ を C^2 級関数とする。このとき、確率過程 $(f(X_t))_{t \geq 0}$ も再び伊藤過程となり

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) + \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_s) dX_s^{(i)} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_s) d\langle X^{(i)}, X^{(j)} \rangle_s \end{aligned}$$

*伊藤の補題と呼ぶ分野もある。

が成立する．特に， $d = 2$ ， $X_t^{(1)} = B_t$ ， $X_t^{(2)} = t$ のケースでは，注 3.4.4 を念頭に置くと， C^2 級関数 $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned} f(B_t, t) &= f(0, 0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(B_s, s) dB_s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(B_s, s) ds \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(B_s, s) ds \end{aligned} \quad (4.4)$$

が成立することが分かる．なおここで $\mathbb{R}^2$ の第 1 成分を x ，第 2 成分を t とおいた．

証明は，§9.3 に載せた伊藤解析のテキストブックなどを参照されたい．

例 4.1.2. 定理 4.1.1 (i) において $f(x) := x^2$ を考えると

$$B_t^2 = 2 \int_0^t B_s dB_s + t$$

が成立する．これは例 3.2.4 の結果と一致する．

例 4.1.3. 定理 4.1.1 (ii) において $X_t := \sigma B_t + \mu t$ ， $f(x) := S_0 e^x$ を考えると（ただし σ ， μ ， S_0 は定数とする），幾何 Brown 運動

$$S_t = S_0 \exp(\sigma B_t + \mu t)$$

は伊藤過程で

$$S_t = S_0 + \sigma \int_0^t S_u dB_u + \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \int_0^t S_u du \quad (4.5)$$

を満たすことが分かる．また，式 (4.4) において $f(x, t) := S_0 \exp(\sigma x + \mu t)$ という設定を考えても，式 (4.5) が得られる．

注 4.1.4. 前章の注 3.3.6 で述べた微分形は，本章の式 (4.2) と (4.5) に対してはそれぞれ

$$\begin{aligned} df(B_t) &= f'(B_t) dB_t + \frac{1}{2} f''(B_t) dt, \\ dS_t &= \sigma S_t dB_t + \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) S_t dt \end{aligned}$$

である．これらを「左辺の確率過程の微小時間における増分を，ノイズ項 (dB_t の項) とそれ以外の項 (dt の項) とに分離した」と解釈すると便利なことが多い．

伊藤の公式には，離散時間の対応物もある．

命題 4.1.5. (離散伊藤公式： 藤田 [4]) 1 次元対称ランダムウォーク $(Z_t)_{t=0,1,\dots}$ と $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ に対して，

$$\begin{aligned} f(Z_{t+1}) - f(Z_t) &= \frac{f(Z_t + 1) - f(Z_t - 1)}{2} \{Z_{t+1} - Z_t\} \\ &\quad + \frac{f(Z_t + 1) - 2f(Z_t) + f(Z_t - 1))}{2} \end{aligned}$$

第5章 確率微分方程式

5.1 例

例 5.1.1. 前頁でも解説したように, σ, μ, S_0 が定数とすると, 幾何 *Brown* 運動

$$S_t = S_0 \exp(\sigma B_t + \mu t) \quad (5.1)$$

は伊藤過程となり式 (4.5) を満たす. また, この微分形は

$$dS_t = \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) S_t dt + \sigma S_t dB_t \quad (5.2)$$

である. これを, 「幾何 **Brown** 運動 (5.1) は確率微分方程式 (5.2) の解である」という. S_0 とし具体的な値を指定すると, それは初期条件になる.

また, 確率微分方程式

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t$$

の解は

$$S_t = S_0 \exp\left\{\sigma B_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right\}$$

である.

注 5.1.2. 通常の常微分方程式に対しては, 微分方程式自体とそれを積分形に直した積分方程式は共に数学的に意味が付き, 互いに移りあう. 一方, 確率微分方程式に対しては, 数学的に意味が付いているのはあくまでも積分形だけであり, 微分形は (注 3.3.6 でも述べたように) 形式的な表現に過ぎない. よって, 本当は「確率微分方程式」ではなく「確率積分方程式」と呼ぶほうが良いかもしれない.

例 5.1.3. $X_t := B_t^3$ に対して伊藤の公式を適用すると

$$dX_t = 3B_t dt + 3B_t^2 dB_t$$

であり, 右辺を X_t を使って書き直すと

$$\begin{cases} dX_t = 3X_t^{\frac{1}{3}} dt + 3X_t^{\frac{2}{3}} dB_t, \\ X_0 = 0 \end{cases} \quad (5.3)$$

となる. ゆえに, 確率微分方程式の初期値問題 (5.3) の1つの解は $X_t = B_t^3$ である. 実はこの確率微分方程式には他にも解があり, 任意の正定数 c に対して

$$X_t = \begin{cases} 0 & \text{if } t \leq c \\ (B_t - B_c)^3 & \text{if } t > c \end{cases}$$

もこの初期値問題の解になる. 解の一意性については, 次節で解説する.

例 5.1.4. 1次元確率微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} dX_t = b(c - X_t) dt + \sigma dB_t, \\ X_0 = x_0 \end{cases} \quad (5.4)$$

を考える。ただし σ, b, c, x_0 は定数とする。このとき

$$Y_t := e^{bt}(X_t - c) \quad (5.5)$$

と定義して伊藤の公式を適用すると、 Y は

$$\begin{cases} dY_t = \sigma e^{bt} dB_t, \\ Y_0 = x_0 - c \end{cases}$$

を満たし、この式の右辺には Y が入っていないので積分形に直すと

$$Y_t = (x_0 - c) + \sigma \int_0^t e^{bs} dB_s$$

となる。ゆえに X は式 (5.5) を用いて

$$X_t = c + e^{-bt}(x_0 - c) + \sigma e^{-bt} \int_0^t e^{bs} dB_s$$

となる。この確率過程は **Ornstein-Uhlenbeck 過程** と呼ばれている。物理現象の *Brown 運動* を表す *Wiener 過程* 以外の数学モデルとしても知られているし、経済の分野でも短期金利の変動モデルとして用いられる (**Vasicek モデル** という)。またこの *SDE* (5.4) は **Langevin 方程式** とも呼ばれている。定数 b が正とすると、方程式において

- $c > X_t$ の時はドリフトが正 (上向き)
- $c < X_t$ の時はドリフトが負 (下向き)

となる。このような性質を **平均回帰性** という。また、この X は *Gauss 過程* である。

例 5.1.5. *Ornstein-Uhlenbeck 過程* の *SDE* を一般化した、(多次元の) **線型確率微分方程式** も解くことができる。

$$\begin{cases} dX_t = (A_t X_t + b_t) dt + \sigma_t dB_t, \\ X_0 = x_0 \end{cases}$$

ただし

- W は d 次元 *Brown 運動*, X は n 次元の伊藤過程。
- σ_t, A_t, b_t は決定論的な関数*で、それぞれ $\mathbb{R}^{n \times d}$ 値, $\mathbb{R}^{n \times n}$ 値, $\mathbb{R}^n$ 値。
- $x_0 \in \mathbb{R}^n$

実際、 n 次元常微分方程式

$$\frac{d\Psi_t}{dt} = A_t \Psi_t, \quad \Psi_0 = E$$

の解 Ψ を用いて

$$X_t = \Psi_t \left\{ x_0 + \int_0^t \Psi_s^{-1} b_s ds + \int_0^t \Psi_s^{-1} \sigma_s dB_s \right\}$$

と書ける。この解 X も *Gauss 過程* である。

*正確には、局所有界性も必要である。

例 5.1.6. 式 (5.4) を少し変えた 1 次元確率微分方程式

$$\begin{cases} dX_t = b(c - X_t)dt + \sigma\sqrt{X_t}dB_t, \\ X_0 = x_0 \end{cases} \quad (5.6)$$

(ただし σ, b, c, x_0 は正定数) は今までのように「解く」ことはできないが、次節で見るように解が一意に定まり、さらに解はずっと非負値になる。平均回帰性も持つので、これも短期金利の変動モデルとして用いられる (**CIR モデル**[†]という)。この方程式の解は *Gauss* 過程にならない。

注 5.1.7. 1 次元の確率微分方程式に関しては、空間や時間を変数変換して方程式を解く方法や、第 7 章のように確率を変更することによってドリフトを変えて解くテクニックなどもある。また、解が途中で爆発するか否かに関する判定条件もいくつか知られている。ご興味ある方は、§9.3 に載せたテキストブックなどを参照されたい。

5.2 強解と弱解, 存在と一意性

前節でいくつか例を見たが、ここで解の種類やその存在、一意性についての性質を述べる。本節において B は d 次元 Brown 運動とし、 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ は定ベクトルであり、2つの関数

$$\begin{aligned} b &: [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \sigma &: [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times d} \end{aligned}$$

は決定論的な可測関数とする。

定義 5.2.1. (強解と弱解のラフな定義) *Brown* 運動 B から生成されるフィルトレーションについて適合的な $\mathbb{R}^n$ 値の確率過程 X が

$$X_t = x_0 + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s$$

を満たすとき、 X は確率微分方程式の初期値問題を

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dB_t, \\ X_0 = x_0 \end{cases} \quad (5.7)$$

の強解であるという。前節に挙げた例の解は、全て強解である。また、本稿では詳しく触れないが、 X が必ずしも B から生成されるフィルトレーションについて適合的とは限らない状況も考えることがあり、そういうケースのときは X は弱解であるという。

以下に、解の存在および一意性に関して知られている定理を 2 つ挙げる。前節の例 5.1.1, 5.1.4, および 5.1.5 には定理 5.2.2 が適用可能であり、例 5.1.6 には定理 5.2.3 が適用可能である。例 5.1.3 はどちらの定理も適用不可能で、実際、解は一意でない。

[†]Cox-Ingersoll-Ross モデル

定理 5.2.2. (n 次元 SDE でも成り立つ性質) $T > 0$ とする. 次の 3 条件を満たす正定数 K_1, K_2, C が存在するとする: 各 $x, y \in \mathbb{R}^n$ と $t \in [0, T]$ に対して

- $|b(t, x) - b(t, y)| \leq K_1 |x - y|,$
- $|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K_2 |x - y|,$
- $|b(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq C(1 + |x|).$

この時, 少なくとも時刻 T までは, 確率微分方程式 (5.7) には解が唯一[‡]存在し, 強解になる.

注 5.2.3. 定理 5.2.2 は常微分方程式の解の存在・一意性定理と似ている. 1 ~ 2 番目の条件式は係数に関する *Lipschitz* 連続性であり, これが一意性を保証している. また, 3 番目の条件式は *linear growth condition* といい, これが, 少なくとも時刻 T までは解が爆発しないことを保証している. 証明に *Picard's iteration method* を用いることも, 常微分方程式と同じである.

定理 5.2.4. (1 次元 SDE の解の一意性: 山田 & 渡辺 [26]) 確率微分方程式 (5.7) は 1 次元であるとする, つまり $n = 1$ とする. $T > 0$ とする. 係数は

- b は先の定理と同じく *Lipschitz* 連続である.
- σ は $\frac{1}{2}$ 次以上の *Hölder* 連続性を持つ. つまり, 次の条件を満たす定数 $K > 0$ および $\alpha \geq \frac{1}{2}$ が存在するとする: 各 $x, y \in \mathbb{R}$ と $t \in [0, T]$ に対して

$$|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K |x - y|^\alpha.$$

この時, 少なくとも時刻 T までは, 確率微分方程式の解は必ず強解になり一意[§]である.

[‡]正確には, *pathwise uniqueness* という.

[§]正確には, *pathwise uniqueness* が成立する.

第6章 マルチンゲール

6.1 定義, 例, 性質

マルチンゲールとは、「公平なゲーム」というイメージに対応したクラスの確率過程である。各時刻 t とその時刻までの各シナリオに対して、そのシナリオで条件付けた時の将来の確率過程の値の期待値が、時刻 t での値と一致するようなものである。

定義 6.1.1. (*Brown* 運動 B から生成されるフィルトレーションについて適合的な) 実数値確率過程 M が

- 各 $t \geq 0$ に対して $\mathbb{E}(|M_t|) < \infty$
- 各 $0 \leq t \leq s$ に対して確率 1 で $\mathbb{E}[M_s | \mathcal{F}_t] = M_t$

という2つの性質を満たす時、 M は **マルチンゲール** であるという。

例 6.1.2. *Brown* 運動 B はマルチンゲールである。実際、

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[B_s | \mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}[B_t + (B_s - B_t) | \mathcal{F}_t] \\&= \mathbb{E}[B_t | \mathcal{F}_t] + \mathbb{E}[B_s - B_t | \mathcal{F}_t] \\&= B_t + \mathbb{E}[B_s - B_t | \mathcal{F}_t] \\&\quad (B_t \text{ は } t \text{ 時点までの情報で見えるので}) \\&= B_t + \mathbb{E}[B_s - B_t] \\&\quad (B_s - B_t \text{ は } t \text{ 時点までの情報と独立なので}) \\&= B_t.\end{aligned}$$

例 6.1.3. 確率過程 $B_t^2 - t$ はマルチンゲールである。実際、

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[B_s^2 - s | \mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}[\{B_t + (B_s - B_t)\}^2 | \mathcal{F}_t] - s \\&= \mathbb{E}[B_t^2 | \mathcal{F}_t] + \mathbb{E}[2B_t(B_s - B_t) | \mathcal{F}_t] + \mathbb{E}[(B_s - B_t)^2 | \mathcal{F}_t] - s \\&= B_t^2 + 2B_t \cdot \mathbb{E}[B_s - B_t | \mathcal{F}_t] + \mathbb{E}[(B_s - B_t)^2 | \mathcal{F}_t] - s \\&\quad (B_t \text{ は } t \text{ 時点までの情報で見えるので})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= B_t^2 + 2 B_t \cdot \mathbb{E}[B_s - B_t] + \mathbb{E}[(B_s - B_t)^2] - s \\
&\quad (B_s - B_t \text{ は } t \text{ 時点までの情報と独立なので}) \\
&= B_t^2 + 0 + (s - t) - s \\
&= B_t^2 - t.
\end{aligned}$$

例 6.1.4. 幾何 *Brown* 運動

$$S_t = S_0 \exp(\sigma B_t + \mu t)$$

がマルチンゲールになるための必要十分条件は

$$\mu = -\frac{\sigma^2}{2}$$

である。実際,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\exp(\sigma B_s + \mu s) | \mathcal{F}_t] &= e^{\mu s} \mathbb{E}[\exp\{\sigma B_t + \sigma(B_s - B_t)\} | \mathcal{F}_t] \\
&= e^{\mu s} \exp(\sigma B_t) \cdot \mathbb{E}[\exp\{\sigma(B_s - B_t)\} | \mathcal{F}_t] \\
&\quad (B_t \text{ は } t \text{ 時点までの情報で見えるので}) \\
&= e^{\mu s} \exp(\sigma B_t) \cdot \mathbb{E}[\exp\{\sigma(B_s - B_t)\}] \\
&\quad (B_s - B_t \text{ は } t \text{ 時点までの情報と独立なので}) \\
&= e^{\mu s} \exp(\sigma B_t) \cdot \exp\left\{\frac{\sigma^2}{2}(s - t)\right\} \\
&= \exp\left(\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2}t\right) \exp\left\{\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)s\right\}.
\end{aligned}$$

命題 6.1.5. マルチンゲール M に対して, 時刻 t での期待値 $\mathbb{E}(M_t)$ は t に依存しない。

定理 6.1.6. 確率過程 H が (*Brown* 運動 B から生成されるフィルトレーションについて) 適合的であり, 各 t に対して

$$\mathbb{E} \int_0^t H_s^2 ds < \infty \quad (6.1)$$

ならば, H を *Brown* 運動 B について確率積分した結果の確率過程 $\int H dB$ は (2 乗可積分な) マルチンゲールになる。

注 6.1.7. この定理は「公平なゲームに賭けても損益の期待値はゼロ」という直感に対応した性質である。なお, H が式 (6.1) を満たさない時は, $\int H dB$ が局所マルチンゲール*になることは保証される。マルチンゲールと局所マルチンゲールの違いは, かなり微妙だといえる。

*時間的に, 局所的にマルチンゲールになっているもの。§9.2.2 参照。

注 6.1.8. 例 3.2.4 より

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{B_t^2 - t}{2}$$

である。この右辺がマルチンゲールであることは例 6.1.3 で示したので、左辺もマルチンゲールだが、これは定理 6.1.6 の結果と符合している。

また、幾何 Brown 運動に関する例 6.1.4 の内容は、 S に伊藤の公式を適用して得られる式

$$dS_t = \sigma S_t dB_t + \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) S_t dt$$

において dt の係数がゼロになるための必要十分条件と一致する。

命題 6.1.9. 確率変数 Y は $\mathbb{E}(|Y|) < \infty$ をみたすとする。このとき、

$$M_t := \mathbb{E}[Y | \mathcal{F}_t]$$

と定義した確率過程 M は、マルチンゲールになる。

6.2 拡散過程および偏微分方程式との関係

Brown 運動 B が時間的にも空間的にも一様に時間発展しているため、確率微分方程式 (5.7) の解 X は (ラフに言って) Markov 性を持つ。つまり、時刻 t 以降の時間発展の確率法則が、時刻 t における位置 X_t のみによって定まり、時刻 t までにたどってきた経路には依存しない。

とくに、SDE の係数が t 依存しないケース

$$\begin{cases} dX_t &= b(X_t) dt + \sigma(X_t) dB_t, \\ X_0 &= x_0 \end{cases} \quad (6.2)$$

では、解は時間的に一様な Markov 過程となる。係数が定理 5.2.2 と同じ条件を満たす時、唯一の強解が存在することになるが、これを **伊藤拡散過程** という。Markov 性よりもさらに強い強 Markov 性と呼ばれる性質を満たす。

以下、多次元でも議論可能だが、簡単のため 1 次元の X に話を限定する。拡散過程に対して、**生成作用素** と呼ばれる微分作用素

$$A := \frac{\sigma(\cdot)^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b(\cdot) \frac{\partial}{\partial x}$$

が中心的な役割を果たす。 C^2 級の 2 変数関数 f に対して伊藤の公式を適用すると

$$\begin{aligned} f(X_t, t) &= f(x_0, 0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(X_s, s) dX_s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(X_s, s) ds + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_s, s) d\langle X \rangle_s \\ &= f(x_0, 0) + \int_0^t \sigma(X_s) \frac{\partial f}{\partial x}(X_s, s) dB_s + \int_0^t \left(\frac{\partial}{\partial t} + A \right) f(X_s, s) ds \end{aligned}$$

となり、そして例えば f の 2 次までの偏導関数がすべて有界ならば、最終式の Brown 運動についての伊藤積分の結果はマルチンゲールになるので命題 6.1.5 から期待値が 0 になって、

$$\mathbb{E}[f(X_t, t)] = f(x_0, 0) + \mathbb{E}\left[\int_0^t \left(\frac{\partial}{\partial t} + A\right) f(X_s, s) ds\right] \quad (6.3)$$

となる。ゆえに、もしさらに関数 f が偏微分方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + A\right) f = 0$$

を満たせば、式 (6.3) から

$$\mathbb{E}[f(X_t, t)] = f(x_0, 0)$$

となる。この考え方を用いて、あるいはこの考え方をさらにもう少し進めることによって、拡散過程の汎関数の期待値と偏微分方程式の解との関係式を導くことができる。Dynkin の公式、Kolmogorov の後退方程式、Feynman-Kac の公式など。

6.3 マルチンゲール表現定理

定理 6.3.1. *Brown 運動 B から生成されるフィルトレーションについての任意のマルチンゲール M は、 B についての伊藤積分の形に書ける。つまり、被積分過程 H をうまく選ぶと、確率 1 で各時刻 t に対して*

$$M_t = M_0 + \int_0^t H_s dB_s$$

となる。

§8.3 で、マルチンゲール表現定理がオプションの複製に用いられることを説明する。

第7章 確率の変更

元の確率 $\mathbb{P}$ を絶対連続な別の確率 $\mathbb{Q}$ に置き換えるとする。このとき、

- 確率過程 X が伊藤過程であるという性質
- 伊藤積分の値、および伊藤の公式の内容

は確率 $\mathbb{Q}$ の下でも不変であることが知られている (c.f. Protter [20] 第2章)。このことから、伊藤積分が見本関数「ほぼ」1本で決まっているという解釈が成り立つ。この解釈は、伊藤積分を投資の合計損益とみなす数理ファイナンス・金融工学の立場からは非常に重要であると思われる。

確率過程が伊藤過程であるという性質は確率の変更について不変だが、マルチンゲール部分と有限変動部分への分解の仕方は変わる。具体的には次のような定理がある。

7.1 Girsanov-丸山の定理 (の特別なケース)

定理 7.1.1. $T > 0$ とし、元の確率 $\mathbb{P}$ の下での1次元 Brown 運動 $(B_t)_{t \in [0, T]}$ を考える。また、 c は定数とする。元の確率との重みの比*が

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp\left(-cB_T - \frac{c^2}{2}T\right)$$

となるような確率 $\mathbb{Q}$ の下で、確率過程

$$B_t^{\mathbb{Q}} := B_t + ct$$

は Brown 運動になる。

注 7.1.2. 元の確率 $\mathbb{P}$ の下での伊藤過程

$$X_t = X_0 + \int_0^t H_s dB_s + \int_0^t K_s ds$$

は、確率 $\mathbb{Q}$ の下でも伊藤過程になるが、マルチンゲール部分と有限変動部分への分解は

$$X_t = X_0 + \int_0^t H_s dB_s^{\mathbb{Q}} + \int_0^t (K_s - cH_s) ds$$

と変わるわけである。また、 B 自体は、新しい確率 $\mathbb{Q}$ の下ではドリフト付きの Brown 運動になる。

注 7.1.3. Girsanov-丸山の定理は本来は、定数ドリフト以外のケースにも適用できる定理である。詳しくは、§9.3 に載せた伊藤解析のテキストブックなどを参照されたい。

*Radon-Nikodym density という。

第8章 数理ファイナンスへの応用（オプション価格理論の基礎）

8.1 Black-Scholes 価格変動モデル

B は 1 次元 Brown 運動であるとする。ある銘柄の株価 S が確率微分方程式

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t \quad (8.1)$$

を満たすというモデルを、**Black-Scholes モデル**という。ただし μ は定数であり、 σ は正定数である。この SDE は §5.1 の最初に挙げた例であり、解は幾何 Brown 運動

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \sigma B_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t \right\} \quad (8.2)$$

となる。ただし、 S_0 は現時点 $t = 0$ において市場で現に提示されている株価と考える。つまり、 S_0 ランダムではない値（定数）とみなす。

式 (8.1) を S_t で割ると

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dB_t$$

となり、この式の左辺は株式の瞬間的な投資収益率を表すとみなせるので、定数 μ を期待収益率と呼び、また、ノイズの大きさを表す定数 σ をボラティリティ（volatility, 価格変動率、予想変動率）という。

この他に、（連続複利の）金利が定数 r であると仮定して安全債券*と呼ばれる証券 e^{rt} も考えることが多いが、本稿では簡単のため、 $r = 0$ と設定して議論を進めることにする。

8.2 オプションとは

2つの正定数 T, K を考える。「満期 T , 行使価格 K のヨーロピアン・コールオプション」とは、満期 T で上記の株式を K 円で買う権利のことである。満期でのこの権利の価値は

$$(S_T - K)^+ \quad (8.3)$$

という確率変数になる。ただし $x^+ = \max\{x, 0\}$ 。また、「満期 T , 行使価格 K のヨーロピアン・プットオプション」とは、満期 T で株式を K 円で売る権利のことであり、満期での権利価値は

$$(K - S_T)^+ \quad (8.4)$$

*bank account process ともいう。数理ファイナンスでは、この証券価格を B_t という記号で表すことが多い。

という確率変数になる。

満期前の時刻 t におけるこの権利の価値を知りたい。つまり、確率変数 (8.3) や (8.4) は満期 T にならなければ値が確定しないが、それよりも前の時点 t におけるこれら確率変数の値段を知りたいのである。以下の §8.3 では Black-Scholes モデルに基づき、マルチンゲールを用いて価格計算を行う。§8.4 では偏微分方程式を用いた計算方法について解説する。2つの方法の結果は一致する。

8.3 マルチンゲールを用いたオプション価格計算

第 7 章のように確率を変更して、§8.1 の株価 $(S_t)_{t \in [0, T]}$ を見てみよう。 $\lambda := \frac{\mu}{\sigma}$ とおく。前章の Girsanov-丸山の定理より、元の確率 $\mathbb{P}$ との重みの比が

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp\left(-\lambda B_T - \frac{\lambda^2}{2}T\right)$$

となるような確率 $\mathbb{Q}$ の下で、確率過程 $B_t^{\mathbb{Q}} := B_t + \lambda t$ は Brown 運動になる。このとき、式 (8.1) は $B^{\mathbb{Q}}$ を用いて

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t \\ &= \sigma S_t dB_t^{\mathbb{Q}} \end{aligned} \quad (8.5)$$

と書き換えられるし、式 (8.2) は

$$S_t = S_0 \exp\left\{\sigma B_t^{\mathbb{Q}} - \frac{\sigma^2}{2}t\right\} \quad (8.6)$$

と書き換えることができる。§6.1 の議論から、 $\mathbb{Q}$ の下で S はマルチンゲールになる。

確率変数 $(S_T - K)^+$ を基に

$$M_t := \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t]$$

と定義した確率過程 M は、命題 6.1.9 より $\mathbb{Q}$ -マルチンゲールになる。ゆえに、§6.3 のマルチンゲール表現定理から、次のような適合的過程 H が存在する：確率 1 で、各時刻 $t \in [0, T]$ に対して

$$\begin{aligned} M_t &= M_0 + \int_0^t H_u dB_u^{\mathbb{Q}} \\ &= M_0 + \int_0^t \frac{H_u}{\sigma S_u} dS_u \end{aligned} \quad (8.7)$$

が成り立つ。ただし、最後の等号は式 (8.5) から成立する。特に、

$$M_T = (S_T - K)^+ \quad \text{および} \quad M_0 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(S_T - K)^+]$$

なので、式 (8.7) で $t = T$ のときを考えると

$$(S_T - K)^+ = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(S_T - K)^+] + \int_0^T \frac{H_u}{\sigma S_u} dS_u$$

となる。この式は、時刻 0 で $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(S_T - K)^+]$ 円を用意し、その後、各時刻 t で $\frac{H_t}{\sigma S_t}$ 単位の株式を保有していくと、満期 T においてコールオプション $(S_T - K)^+$ を確率 1 でピッタリ複製で

きることを意味する。よって、一物一価の法則 から、複製の元手 $\mathbb{E}^Q[(S_T - K)^+]$ 円がコールオプションの時刻 0 での価格と結論付けられる。同様に、時刻 t でのオプション価格は

$$\mathbb{E}^Q[(S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t] \quad (8.8)$$

となる。式 (8.6) を念頭において期待値を計算すると、

$$\text{式 (8.8)} = S_t \Phi(d_+) - K \Phi(d_-)$$

となる。ただし

$$d_{\pm} := \frac{\log\left(\frac{S_t}{K}\right) \pm \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

であり、 Φ は標準正規分布の分布関数

$$\Phi(x) := \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz$$

である。この価格式を、ヨーロッパ・コールオプションに対する **Black-Scholes 式** という。

注 8.3.1. 金利 r が正のときの *Black-Scholes* 式は

$$S_t \Phi(d_+) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_-)$$

となる。ただし

$$d_{\pm} := \frac{\log\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r \pm \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

注 8.3.2. 株式の期待収益率 μ は、最終的な価格式に入らない。また、*Black-Scholes* 式は、ボラティリティ σ について単調増加になる。

注 8.3.3. 元の確率 $\mathbb{P}$ の下ではなく、株価過程 S をマルチンゲールにするような確率 $\mathbb{Q}$ の下でオプションの満期価値の期待値をとったものが、現在価値になるわけである。これは *Harrison & Kreps [7]* や *Harrison & Pliska [8] [9]* らの業績である。

8.4 偏微分方程式を用いたオプション価格計算

この方法は、Black & Scholes の原論文 [3] に近い方法である。満期 T 、行使価格 K のヨーロッパ・コールオプションを考え、途中の時刻 t での価値を C_t と記すことにする。確率過程 S の Markov 性から、 C_t が $c(S_t, t)$ の形に書けると予想して話を進める。つまり、ある決定論的 (deterministic) な 2 変数関数

$$c : (0, \infty) \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$$

が存在し、その第 1 変数に S_t を代入し第 2 変数に t を代入したものが、 C_t に一致すると仮定して話を進める。

時刻 0 で元手 x 円を用意し、その後の各時刻 t で ϕ_t 単位の株式を保有するによって、オプションを複製することを考える。この戦略を組む時の時刻 t でのポートフォリオ価値は

$$V_t := x + \int_0^t \phi_u dS_u$$

となる。微分形では

$$dV_t = \phi_t dS_t = \phi_t \{ \sigma S_t dB_t + \mu S_t dt \} \quad (8.9)$$

となる。

複製するということは満期 T で $V_T = C_T$ ということだが、一物一価の法則より、途中のすべての時刻 t においても確率 1 で

$$V_t = C_t \quad (8.10)$$

が成り立つ。伊藤の公式を $c(S_t, t)$ に適用すると

$$\begin{aligned} dc(S_t, t) &= \frac{\partial c}{\partial s}(S_t, t) dS_t + \frac{\partial c}{\partial t}(S_t, t) dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial s^2}(S_t, t) d\langle S \rangle_t \\ &= \frac{\partial c}{\partial s}(S_t, t) \{ \sigma S_t dB_t + \mu S_t dt \} + \frac{\partial c}{\partial t}(S_t, t) dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial s^2}(S_t, t) \sigma^2 S_t^2 dt \end{aligned}$$

となる。また、式 (8.9) と (8.10) から、上式の最終辺は式 (8.9) の右辺と等しくなるので、両者の dB_t の係数どうしと dt の係数どうしをそれぞれ比較することによって、

$$\phi_t = \frac{\partial c}{\partial s}(S_t, t) \quad \text{かつ} \quad \frac{\partial c}{\partial t}(S_t, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial s^2}(S_t, t) \sigma^2 S_t^2 = 0$$

が成り立つ必要がある。この等式は確率過程としての等式だが、 S_t がどんな正の値も取りうるので、結局、決定論的な偏微分方程式

$$\frac{\partial c}{\partial t}(s, t) + \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 c}{\partial s^2}(s, t) = 0 \quad (8.11)$$

が満たされれば良いことになる。満期条件

$$c(s, T) = (s - K)^+ \quad (8.12)$$

が付く。この偏微分方程式は、 $s = e^x$ と変数変換すると定係数の熱方程式に変換される。なお、時間が通常の熱方程式とは逆向きの形になっているため、通常見られる初期条件が今回は満期条件になっている。これを解くことによっても、前節の Black-Scholes 式が得られる。

注 8.4.1. 金利 r が正のときは、偏微分方程式は

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 c}{\partial s^2} + r s \frac{\partial c}{\partial s} - r c = 0$$

となる。

注 8.4.2. 偏微分方程式の導出の際には、ヨーロピアン・コールの特性は満期条件 (8.12) のみに反映されていることに注意してほしい。ゆえに、ヨーロピアン・プットの価格 $P_t = p(S_t, t)$ も同じ偏微分方程式 (8.11) を満たし、満期条件だけが $p(s, T) = (K - s)^+$ と変わる。さらに、コール、プットに限らず、デリバティブの満期価値が満期株価のみに依存するようなものは、全て Black-Scholes の偏微分方程式を満たすわけである。

注 8.4.3. 今回のような偏微分方程式を用いる方法と、前節のようにマルチンゲールを用いる方法が同一のオプション価格を与えることは、数学的には §6.2 で言及した Feynman-Kac の公式によって保証されている。

第9章 付録

9.1 Brown 運動, 伊藤解析や確率微分方程式に関する歴史の概観

植物学者 R. Brown が顕微鏡で花粉微粒子の微運動を発見したのは 1827 年のことである。1900 年に, L. Bachelier [1] がパリ証券取引所の株価変動を調べ Brown 運動との共通点を見出し, Brown 運動を初めて定量的に考察したが, 彼の発見はその後忘れ去られ, 1960 年代に再発見されることになる。また 1905 年に, A. Einstein が物理学の視点から定式化を行った。数学的定義を満たす確率過程が存在することは, 本質的には 1923 年に N. Wiener [25] が証明した。

確率積分に関するラフなアイデアは, 伊藤清氏の他に P. Lévy や N. Wiener も持っていた。Lévy は多くの性質を直感的に導いたが, 数学的に厳密な定義付けには至らなかった。また, $(H_t)_{t \geq 0}$ が確定的 (deterministic) であるという特別なケースにおける伊藤積分 $\int H dB$ のことを **Wiener 積分** と呼ぶ。歴史的には Wiener 積分が先に発見されたが, その被積分関数を確率過程にしても定義が可能であるという決定的なステップが 1942 年に伊藤清氏 [12] [13] によって発見された。その後, 1967 年に国田寛氏と渡辺信三氏 [15] によって 2 乗可積分マルチンゲールについての伊藤積分の理論が確立され, 一般のセミマルチンゲール (後述) への拡張は主にフランスの研究グループによってなされた。

伊藤清氏が確率積分を考える動機 (の 1 つ) は, 本稿 §6.2 の式 (6.2) の形の確率微分方程式の解の存在を示すことによって, 拡散過程の数学的実在を証明することであった。伊藤積分が現れる前の Kolmogorov や Feller らによる拡散過程の研究は, 対応する生成作用素や遷移密度関数を解析学的に研究することに主眼があった。伊藤積分が現れたことにより, 拡散過程の見本関数を直接的に論じることが可能になり, 拡散過程に関する研究が飛躍的に進んだと言える。

9.2 その他の話題に関する簡単な紹介

9.2.1 フィルトレーション, 適合的過程

Brown 運動 B から生成されるフィルトレーションとは, B を見ている観測者が各時刻 t までに得る情報 (t と共に増えていく) を指していて, 日本語で「増大情報系」ともいう。また, Brown 運動 B から生成されるフィルトレーションについて適合的な確率過程 X とは, 各時刻 t における X_t の値が B の t 時点までの情報で確定するような確率過程である。例えば, 確率過程 B_t^2 や $\max_{s \leq t} B_s$ は適合的だが, 確率過程 B_{t+1} は適合的ではない。

数学的定義はそれぞれ

定義 9.2.1. 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ を考える。ただし

$$\begin{aligned}\Omega &:= C([0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}), \\ \mathcal{F} &:= \mathcal{B}(\Omega), \\ \mathbb{P} &: \text{Wiener 測度}\end{aligned}$$

このとき,

$$\mathcal{F}_t := \sigma\{B_s : s \leq t\}$$

と定義する。列 $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ を, *Brown* 運動 B から生成されるフィルトレーションという。

定義 9.2.2. 上記確率空間上の確率過程 X が, *Brown* 運動 B から生成されるフィルトレーションについて適合的であるとは, 各時刻 t に対して X_t が $\mathcal{F}_t$ 可測であることをいう。

9.2.2 停止時刻

定義 9.2.3. 上記確率空間上の可測関数

$$\tau : \Omega \rightarrow [0, \infty]$$

が各 t に対して

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

を満たせば, τ は (*Brown* 運動 B から生成されるフィルトレーションについて) **停止時刻** であるという。

注 9.2.4. つまり, τ の値が t 以下か否かは, 時刻 t までの情報で判定できるようなランダム時刻が「停止時刻」である。投資の判断をする時刻も, この「停止時刻」の範疇に入る。

また, 本稿で何箇所か現れる「局所有界」や「局所マルチンゲール」という概念は, 数学的には, 停止時刻の増大列が存在して, それらの停止時刻までは有界であったりマルチンゲールであったりすることを指す。「時間的に局所的」という意味あいである。

9.2.3 Stratonovich 積分

§3.1 の確率積分全般に関する説明も参照して頂きたい。

定理および定義 9.2.5. X と Y は共に伊藤過程であるとする。このとき, 極限

$$\int_0^t Y_s \circ dX_s := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{Y_{\frac{i-1}{n}t} + Y_{\frac{i}{n}t}}{2} \right\} \{X_{\frac{i}{n}t} - X_{\frac{i-1}{n}t}\}$$

が存在する*。これを Y の X についての *Stratonovich* 積分という。

命題 9.2.6. (*Stratonovich* 積分と伊藤積分の関係)

$$\int_0^t Y_s \circ dX_s = \int_0^t Y_s dX_s + \frac{1}{2} \langle X, Y \rangle_t \quad (9.1)$$

*この極限は, 確率収束の意味である。

例 9.2.7. 伊藤積分の例 3.2.4 に対応した *Stratonovich* 積分は

$$\int_0^t B_s \circ dB_s = \int_0^t B_s dB_s + \frac{1}{2} \langle B, B \rangle_t = \frac{B_t^2}{2}$$

注 9.2.8. *Stratonovich* 積分の利点は、伊藤の公式を考える時に、2 次の項が入らず通常の置換積分と同じ形になることである。例えば、式 (4.2) と (4.3) はそれぞれ

$$f(B_t) = f(0) + \int_0^t f'(B_s) \circ dB_s,$$

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) \circ dX_s$$

と書き直すことができる。他の式についても同様。2 次の項が入らないので、多様体上の確率解析 (§9.2.6) を議論する時は伊藤積分よりも *Stratonovich* 積分のほうが便利である。

注 9.2.9. $\int Y \circ dX$ という記号の代わりに $\int Y \partial X$ という記号を用いる文献もある。

9.2.4 多次元の伊藤積分

X を $\mathbb{R}^d$ 値の伊藤過程とし、 H を $\mathbb{R}^d$ 値の適合的過程とする（各成分がそれぞれ伊藤過程、適合的過程になっているということ）。伊藤過程の異なる成分どうしの **quadratic covariation** が 0 ならば、伊藤積分 $\int H dX$ は各成分ごとの確率積分の和として定義される。しかし、伊藤過程の異なる成分どうしの **quadratic covariation** が 0 でないケースでは、各成分ごとの伊藤積分が定義不可能でも全体として積分が定義可能なこともある。例えば $d = 2$ として

$$X_t^{(1)} := B_t, \quad X_t^{(2)} := X_t^{(1)} + t,$$

$$H_t^{(1)} := -\frac{1}{\sqrt{t}}, \quad H_t^{(2)} := \frac{1}{\sqrt{t}}$$

（ただし B は 1 次元 Brown 運動）と定義すると、各成分ごとには積分は定義できないがベクトル伊藤積分としては

$$\int_0^t H_s dX_s = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{s}} ds = 2\sqrt{t}$$

となる。多次元の伊藤の公式（定理 4.1.1 の (iii)）においても、多次元のマルチンゲール表現定理においても、伊藤過程の異なる成分どうしの **quadratic covariation** が 0 でないケースでは正確にはベクトル伊藤積分を考える必要がある。

9.2.5 セミマルチンゲール

局所マルチンゲールと有限変動過程の和の形に書き表される確率過程を、セミマルチンゲール[†]という。伊藤過程、Lévy 過程やマルチンゲールを全て含むクラスである。現在では、セミマルチンゲールの枠組み内で伊藤解析を論じることが多い。

セミマルチンゲール X の見本関数が連続なケースにおける伊藤積分 $\int H dX$ は、本稿のような伊藤過程についての確率積分と数学的難しさはあまり変わらないが、 X の見本関数にジャンプ

[†]半マルチンゲールともいう。

がある場合は、伊藤積分の定義も難しくなる。被積分過程 H も、可予測過程と呼ばれるものに限定される。ジャンプがある場合の確率積分も解説している文献としては Rogers & Williams [22] や Protter [20] が挙げられるので、具体的な定義方法はそちらを参照されたい。ただし Rogers & Williams [22] では被積分過程 H は局所有界なものに限定されている。

9.2.6 多様体上の確率微分方程式

Ikeda & Watanabe [11] および Rogers & Williams [22] で、それぞれ 1 つの章が解説にあてられている。

9.2.7 確率偏微分方程式

偏微分方程式にノイズ項が加わったものである。無限次元の確率微分方程式と捉えることもできる。舟木 [5] の第 6 章を参照されたい。

9.2.8 Backward Stochastic Differential Equations

W を Brown 運動とすると、確率変数 ξ に対して

$$\begin{cases} dX_t &= -f(t, X_t, Y_t) dt + Y_t dB_t, \\ X_T &= \xi \end{cases}$$

を満たす X と Y を同時に同定する問題が Pardoux & Peng [19] により提唱され、backward stochastic differential equations (BSDE) と呼ばれている。第 8 章のオプション複製も、この枠組み内で定式化できる。

9.3 テキストブックの紹介

伊藤解析や確率微分方程式に関する邦書としては、渡辺 [24], 長井 [17], 舟木 [5] や, Øksendal [18] の邦訳などがある。英語の本としては Ikeda & Watanabe [11], Rogers & Williams [22], Karatzas & Shreve [14], Revuz & Yor [22], Protter [20] などが挙げられる。

伊藤解析と数理ファイナンスへの応用に関するテキストとしては, Lamberton & Lapeyre [16] (訳書あり), 藤田 [4], Steele [23], Bjork [2] などが挙げられる。また, デリバティブに関して, 制度面も含めて幅広い内容をカバーしている本としては Hull [10] がある。

関連図書

- [1] Bachelier, L., “Théorie de la spéculation,” *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **17** (1900), 21–86. 英訳版は次の本に収録されている： *The Random Character of Stock Market Prices*, edited by P. Cootner, MIT press, 1964.
- [2] Björk, T., *Arbitrage Theory in Continuous Time*, 2nd edition, Oxford University Press, 2004.
- [3] Black, F. & M. Scholes, “The pricing of options and corporate liabilities,” *J. Political Economy* **81** (1973), no. 3, 637–659.
- [4] 藤田 岳彦『ファイナンスの確率解析入門』講談社 2002 年.
- [5] 舟木 直久『確率微分方程式』岩波書店 1997 年.
- [6] Gelfand, I.M., *Generalized Functions*, Academic Press, 1977.
- [7] Harrison, J.M. & D.M. Kreps, “Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets,” *J. Econom. Theory* **20** (1979), 381–408.
- [8] Harrison, J.M. & S.R. Pliska, “Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading,” *Stochastic Processes and Their Applications* **11** (1981), 215–260.
- [9] Harrison, J.M. & S.R. Pliska, “A stochastic calculus model of continuous trading: complete markets,” *Stochastic Processes and Their Applications* **15** (1983), 313–316.
- [10] Hull, J.C., *Options, Futures, and Other Derivatives*, 6th edition, Prentice-Hall, 2005. (第 5 版の邦訳あり, 金融財政事情研究会)
- [11] Ikeda, N. & S. Watanabe, *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*, 2nd edition, North Holland/Kodansha, 1989.
- [12] 伊藤清, Markoff 過程を定める微分方程式, 『全国紙上数学談話会誌』 **1077** (1942), 1352–1400.
- [13] Itô, K., “On stochastic differential equations,” *Mem. Amer. Math. Soc.* **4** (1951)
- [14] Karatzas, I. & S.E. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, 2nd edition, Springer, 1997. (邦訳あり, シュプリンガー・フェアラーク東京)
- [15] Kunita, H. & S. Watanabe, “On square integrable martingales,” *Nagoya Math. J.* **30** (1967), 209–245.
- [16] Lamberton, D. & B. Lapeyre, *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*, Chapman & Hall, 1996. (原著は仏語. 邦訳あり, 朝倉書店)

- [17] 長井 英生『確率微分方程式』共立出版 1999 年.
- [18] Øksendal, B., *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*, 5th edition, Springer, 1998. (邦訳あり, シュプリンガー・フェアラーク東京)
- [19] Pardoux, E. & S. Peng, “Adapted solution of a backward stochastic differential equation,” *Systems and Control Letters* **14** (1990), 55–61.
- [20] Protter, P., *Stochastic Integration and Differential Equations*, 2nd edition, Springer, 2003.
- [21] Revuz, D. & M. Yor, *Continuous Martingales and Brownian Motion*, 3rd edition, Springer, 1999.
- [22] Rogers, L.C.G. & D. Williams, *Diffusions, Markov Processes, and Martingales*, Volume 2, Wiley, 1990.
- [23] Steele, J.M., *Stochastic Calculus and Financial Applications*, Springer, 2000.
- [24] 渡辺 信三『確率微分方程式』産業図書 1975 年.
- [25] Wiener, N., “Differential space”, *J. Math. Phys.* **2** (1923), 131–174.
- [26] Yamada, T. & S. Watanabe, “On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations”, *J. Math. Kyoto Univ.* **11** (1971), 155–167.

フィルタリング, 確率制御, そして数理ファイナンス

長井 英生 (大阪大・基礎工)

確率微分方程式の理論は Itô Calculus と呼ばれ, その応用の広がりとは時と共に大きくなり, ますますその重要性が認識されつつある. 以前 [42] で 1960年代にその端緒を見た制御問題への応用と, その後の発展との関連から解説させていただいた. また, その後, 最近特に注目を集められるようになった数理ファイナンスと確率制御との関連から「応用数理」([41])に記事を書かせていただいた. 今回, 若干それらと重複する部分もあるが, 過去に得られている知見の整理・解説と共に, フィルタリング, 確率制御への確率微分方程式の応用の広がりが, 数理ファイナンスとの関連でさらに大きくなっている状況を最近の動向を含めて解説してみたい. ただ, 筆者の不勉強から, 掲げた文献は限られた狭い範囲から採られた偏ったものになっていることをお断りしておきたい.

1 フィルタリング

1.1 序論

系過程として定義された信号が, 何らかの雑音の混じったデータによって観測される場合, あるいは, 不確実な要因をもつ情報を通じて観測される場合に, 元の信号を推定する問題をフィルタリング (filtering) の問題という. 系過程 (system process) または 信号過程 (signal process) と呼ばれる確率過程 X_t が次の2つの場合について述べよう.

- 1) R^n 上の連続確率過程
- 2) 有限状態空間上の連続パラメーター確率過程

X_t は m 次元ベクトル値関数 $h(t, x)$ によって変換 (または符号化) されて, $h(t, X_t)$ の形で送信されるが, 途中で雑音 $\dot{V}_t$ が加わって

$$\dot{Y}_t = h(t, X_t) + \dot{V}_t$$

が観測されたとする. $\dot{V}_t$ は, 各時点で独立であるばかりか, X_t とも独立な確率変数とする白色雑音であるとする場合が多いが, 何らかの従属性を持った色つき雑音とする場合もある. あるいは, 散射雑音 (shot noise) と呼ばれる異なったタイプの雑音も考えられるが, ここでは取り扱わない. 文献を挙げるにとどめる ([66]). 観測量が点過程である場合は, 例えば [10], [62] 等がある. 白色雑音は通常, 数学的には超関数として定式化されるが, 分散が時間と観測量に依存する場合も同様に取り扱いが可能であり, $\dot{Y}_t$ の積分, すなわち

$$Y_t = \int_0^t h(s, X_s) ds + \int_0^t \lambda(s, Y_s) dW_s$$

を 観測過程 (observation process) とみなす. ここで W_t は X_t と独立な Brown 運動である.

一つ重要と思われる注意をしておこう。λ が系過程 X_t に依存する場合は、観測量 Y_t から系過程 X_t を推定する合理的な方法はまだ確立されていない。ところが、後に述べる数理ファイナンスの問題では観測量は証券価格過程として定義される確率過程であり、その確率過程を定めるヴォラティリティを推定する問題が重要となっているが、この問題は、まさに、上の定式化で言えば λ が系過程 X_t に依存する場合になっており、フィルタリングに関する基本的な問題が数理ファイナンスの問題から提起されているという状況になっている。([58]) これについては後にまた触れる。

もう一つ最近の数理ファイナンスとの関連から述べるならば、各時点独立な雑音として、白色雑音の一般化と考えられる雑音があり、それを上のようにその積分の形で考えると Lévy 過程を考えることになる。この Lévy noise と呼ばれる雑音も考察されるようになっている。これは市場の数理モデルを、飛躍 (jump) をもつ確率過程で定式化しようとする動きに基づいている。Black-Scholes モデルが必ずしも市場のデータと合致しないという認識の上になつて、新たにモデルを構築しようという試みである ([57], [38])。ここでは取り扱わないが現在研究が盛んに進行中の分野である。

さて、 X_t を信号過程としよう。便宜上 $E[|X_t|^2] < \infty$ および $E[\int_0^t |h(s, X_s)|^2 ds] < \infty$ としておく。観測量から、時刻 t までに得られる情報は数学的には、 $Y_s (s \leq t)$ を可測にする最小の完全加法族 $\mathcal{G}_t = \sigma(Y_s; s \leq t)$ として表わす。 X_t が非線形関数 $h(t, x)$ を通じて上の形の $Y_s (s \leq t)$ として観測されたとき、 X_t の最小 2 乗推定 $\hat{X}_t$ すなわち、 $\mathcal{G}_t$ 可測な L_2 関数 z の中で、

$$E[|X_t - z|^2]$$

を最小にするものを、 X_t の非線形フィルター (nonlinear filter) という。これは、条件つき平均 $E[X_t | \mathcal{G}_t]$ と一致する。より一般に、条件つき確率分布 $P(X_t \in dx | \mathcal{G}_t)$ を知ることができれば、

$$E[X_t | \mathcal{G}_t] = \int x P(X_t \in dx | \mathcal{G}_t)$$

として上の条件つき平均が得られるので、この条件付確率分布を求めることが問題とされる。信号過程 X_t がガウス過程で、変換が線型 $h(s, x) = H(s)x$ の場合には、観測過程 Y_t もガウス過程となることが知られている。この場合 $Y_s (s \leq t)$ で張られる L^2 の閉部分線形空間を H_t とすると、フィルター $E[X_t | \mathcal{G}_t]$ は X_t の H_t への直交射影となる。このとき、 $\hat{X}_t$ を X_t の "線形フィルター" (linear filter) という。 $E[X_t] = 0$ のとき、線形フィルターは Volterra 型の核 $K(t, s)$ ($K(t, s) = 0, t < s$) の観測過程 Y_s による確率積分

$$\hat{X}_t = \int_0^t K(t, s) dY_s$$

の形で表現され、この Volterra 核は Wiener-Hopf 型の積分方程式

$$K(t, s) + \int_0^t K(t, r) H(r) R(r, s) H(s)^* dr = R(t, s) F(s)^*$$

を解くことにより求められる ([32]). ここで, $R(t, s)$ はガウス過程 X_t の分散である. 特に, X_t が線形確率微分方程式の解として定義されるガウス-マルコフ過程の場合は, Kalman-Bucy フィルターと呼ばれるが, これについては次節で述べる.

X_t が確率微分方程式の解として定義される n 次元信号過程 $(X_t^1, \dots, X_t^n)$, に対する 非線形 (あるいは線形) フィルター $\hat{X}_t \equiv (\hat{X}_t^1, \dots, \hat{X}_t^n)$, あるいは, 有限状態空間上のマルコフ過程 X_t に対する $\hat{X}_t$ がしばしば問題とされる. 特に, X_t が有限状態空間上の連続時間マルコフ連鎖の場合 $\hat{X}_t$ を **Wonham フィルター** といい, これについては次々節で述べる.

しかしながら, 上で定義した平均 2 乗誤差を最小にするフィルタは, しばしばロバスト性に関する脆弱性から, 別な推定量を考察する試みが最近ではなされている. これは, 例えば平均 2 乗誤差の代わりに, あるパラメータ θ を導入して

$$E[e^{\theta \rho(X_t - z)}]$$

を最小にする $\mathcal{G}_t$ 可測関数を求める問題とする場合である. ここで ρ は狭義凸, 下に有界な関数である. ただ, 系過程が離散時間確率過程の場合以外は成功しているとはいえない状況である ([9]). 今後の発展が要請される分野であるように思える.

さて, まず最初にフィルタが有限次元の確率過程として与えられる 2 つの例を以下に挙げておく.

1.2 Kalman-Bucy フィルター

系過程を記述する確率微分方程式を

$$(1.1) \quad dX(t) = F(t)X(t)dt + G(t)dB(t), \quad X(0) = \xi$$

とし, 観測過程を

$$(1.2) \quad dY(t) = H(t)X(t)dt + R(t)dW(t), \quad Y(0) = 0$$

とする. ここで $B(t)$ と $W(t)$ は, 独立なブラウン運動で, それぞれ, N 次元, m 次元とする. そして, $G(t)dB(t)$, $R(t)dW(t)$ はそれぞれ, システムノイズ, 観測ノイズを表わす. $F(t)$, $G(t)$ は $N \times N$, $H(t)$ は $m \times N$, $R(t)$ は $m \times m$ 行列とする. また R は対称非負定値であるとする. $X(t)$ と $\hat{X}(t)$ の推定量との平均 2 乗誤差を最小にする推定量を $\hat{X}(t)$ とするとき, $\hat{X}(t)$ の満たすべき方程式は

$$(1.3) \quad \begin{aligned} d\hat{X}(t) &= F(t)\hat{X}(t)dt + \Pi(t)H^*(RR^*)^{-1}(t)(dY(t) - H(t)\hat{X}(t)dt), \\ \hat{X}(0) &= x \equiv E[\xi] \end{aligned}$$

であり, ここで $\Pi(t)$ は次の行列 Riccati 方程式の解である.

$$(1.4) \quad -\frac{d\Pi}{dt} + F(t)\Pi(t) + \Pi(t)F^*(t) - \Pi(t)H^*(RR^*)^{-1}H\Pi(t) + GG^*(t) = 0, \quad \Pi(0) = \Pi_0$$

また、ここで

$$\nu(t) = Y(t) - \int_0^t H(s) \hat{X}(s) ds$$

が 共分散行列を $R(t)$ とする $\sigma\{Y(s); s \leq t\}$ - ブラウン運動となる.

1.3 Wonham フィルター

X_t を n 個の集合に値をとる連続時間マルコフ連鎖とする. 状態空間を R^n の n 個の単位ベクトル $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ とし, このマルコフ連鎖の Q matrix を $Q(t)$ とする. このとき, 純粋飛躍型マルチンゲール M_t が存在して

$$dX_t = Q(t)^* X_t dt + dM_t, \quad X_0 = \xi \in E$$

と表される. 与えられた $A(t, x, y) : [0, T] \times E \times R^d \mapsto R^d$, $B(t, y) : [0, T] \times R^d \mapsto R^d \otimes R^d$ に対して, 観測過程を

$$dY_t^i = A(t, X_t, Y_t)^i dt + \sum_{j=1}^d B_j^i(t, Y_t) dW_t^j, \quad i = 1, 2, \dots, d$$

とし,

$$p_t^i = P(X_t = e_i | \sigma(Y_s, s \leq t)), \quad i = 1, \dots, n$$

とすると,

$$dp_t^i = (Q(t)^* p_t)^i dt + p_t^i [A(t, e_i, Y_t)^* - A(t, p_t, Y_t)^*] [BB^*]^{-1} [dY_t - A(t, p_t, Y_t) dt],$$

ただし,

$$A(t, p_t, y) = \sum_{i=1}^n A(t, e_i, y) p_t^i$$

となることが知られている ([36]). この p_t を Wonham フィルターという.

1.4 Kushner-Stratonovich 方程式

系過程が確率微分方程式の解として与えられているとき, 一般的にはフィルターは **Kushner-Stratonovich** 方程式とよばれる確率偏微分方程式を満たすことが知られている. 条件付確率分布の満たすべき方程式であることから, 一般には無限次元空間に値をとる方程式である. フィルターつき確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathcal{F}_t)$ 上の r 次元ブラウン運動 $\{B_t\}$ とそれに独立な m 次元ブラウン運動 $\{W_t\}$ が与えられているとする. 信号過程 X_t は次の確率微分方程式で定まるものとする.

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s.$$

ここで $b(s, x)$ は n ベクトル, $\sigma(s, x)$ は $n \times r$ 行列値関数であり, 一意的な解が存在するような適当な条件を満たしているとする. 観測過程は, m ベクトル値関数 $h(t, x)$ により,

$$Y_t = \int_0^t h(s, X_s) ds + W_t$$

と表されているとする. 条件つき確率分布 $\pi_t(dx) = P(X_t \in dx | \mathcal{G}_t)$, $\mathcal{G}_t = \sigma(Y_s; s \leq t)$ をとるとき, $\pi_t(f) \equiv \int f(x) \pi_t(dx)$ は次の確率偏微分方程式 (Kushner-Stratonovitch 方程式) をみたす.

(1.5)

$$\pi_t = E[f(X_0)] + \int_0^t \pi_s(Lf) ds + \int_0^t (\pi_s(h_s f) - \pi_s(h_s) \pi_s(f)) (dY_s - \pi_s(h_s) ds)$$

ただし $h_s(x) = h(s, x)$ かつ

$$Lf(x) = \sum_i b^i(s, x) D_i f + \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\sigma \sigma^*)^{ij}(s, x) D_{ij}^2 f$$

簡単にこの方程式について触れておく. 確率過程 $\nu_t \equiv Y_t - \int_0^t \pi_s(h_s) ds$ は $\mathcal{G}_t$ Brown 運動であり, 各 t で $\sigma(\nu_s; s \leq t) \subset \mathcal{G}_t$ をみたす. 実際,

$$E[\nu_t - \nu_s | \mathcal{G}_s] = E\left[\int_s^t (h(r, Y_r) - \pi_r(h_r)) dr | \mathcal{G}_s\right] + E[W_t - W_s | \mathcal{G}_s] = 0$$

がわかるから, ν_t が $\mathcal{G}_t$ マルチンゲールであり, その二次変分が $\langle \nu^i, \nu^j \rangle_t = \delta_{ij} t$, $i, j = 1, 2, \dots, m$ となることから Lévy の定理により $\mathcal{G}_t$ ブラウン運動であることがわかる. このことに注意すれば, (1.5) は伊藤の公式とマルチンゲールの表現定理から得られるであろうことは想像が付くであろうと思われる ([4],[36]).

さて, すべての t で $\sigma(\nu_s; s \leq t) = \mathcal{G}_t$ をみたすとき, ν_t は Y_t のイノベーション (innovation) という. 一般に ν_t は必ずしもイノベーションにならない. 十分条件として, (X_t, Y_t) が Gauss 過程の場合および $h(t, x)$ が有界関数の場合が知られている. ([21],[32]).

1.5 基準測度 (reference measure) と Zakai 方程式

確率偏微分方程式 (1.5) は確率測度に値をとるものであるが, 非線形であることから, 取り扱いが困難である. ここで述べる基準測度 (reference measure) による方法を用いることにより, まず, **Zakai 方程式**と呼ばれる, 測度 (必ずしも確率測度ではない) に値をとる線形の確率偏微分方程式を導き, その解から上の Kushner-Stratonovich 方程式の解を得ると言う方法がしばしばとられる.

$$\rho(t) = e^{-\int_0^t h^*(s, X_s) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t (h^* h)(s, X_s) ds}$$

とおき, $E[\rho(t)] = 1$, $t \leq T$ であるとする. このとき, 新しく確率測度 $\tilde{P}$ を $\frac{d\tilde{P}}{dP}|_{\mathcal{F}_T} = \rho(T)$ で定義する. Y_t は $(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{P}; \mathcal{F}_T)$ 上のブラウン運動となり, B_t と独立である.

$$\xi(t) = \rho^{-1}(t) = \exp\left(\int_0^t h^*(s, X_s) dY_s - \frac{1}{2} \int_0^t (h^*h)(s, X_s) ds\right)$$

とするとき, Bayes の公式により,

$$\pi_t(f) = \frac{\tilde{E}[f(X_t)\xi(t)|\mathcal{G}_t]}{\tilde{E}[\xi(t)|\mathcal{G}_t]}$$

となるが, これは, **Kallianpur-Striebel 公式** と呼ばれる. 非正規化条件つき確率による平均

$$p_t(f) = \tilde{E}[f(X_t)\xi(t)|\mathcal{G}_t]$$

を使えば, $\pi_t(f) = \frac{p_t(f)}{p_t(1)}$ である. また, この p_t は Zakai 方程式 と呼ばれる次の線形確率偏微分方程式を満たす.

$$p_t(f) = p_0(f) + \int_0^t p_s(Lf) ds + \int_0^t p_s(h_s^* f) dY_s$$

この導出は伊藤の公式と, 若干の martingale calculus により得られる. この方法により, 上で述べた Kalman-Bucy フィルターは其の特別な場合として具体的に求める事もできる ([4]). Zakai 方程式は線形である事から, 解析的な取り扱いが比較的容易で, 例えば, ある条件の下で変分法的方法で解を求める事ができる.

密度関数 $p_t(x)$ が存在する場合, それは

$$p_t(x) = p_0(x) + \int_0^t L^* p_s ds + \int_0^t p_s h_s^* dY_s$$

を満たす ([4]).

この方法は, 後に述べる risk-sensitive criterion をもつ部分可観測確率制御問題に対しても応用可能で, その際には, 修正 Zakai 方程式と呼ばれる制御確率偏微分方程式が導出され, そのことによりその方程式を制御確率過程とみなした制御問題に変換される ([44], [45]). その方法は数理ファイナンスへの応用として特に有効であるように思える.

Remark.

信号が有限個の状態空間上の Markov 連鎖のとき, L は マルコフ連鎖の Q matrix である.

2 確率制御

2.1 序論

確率最適制御問題では, 確率微分方程式の解であるような, 不規則な力学系に従って変動するシステムを制御対象とする. 制御領域 Γ は通常与えられた

R^k の部分集合にとることが多い。 $B_t = (B_t^i; i = 1, 2, \dots, n)$ をフィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathcal{F}_t)$ で定義された n 次元 Brown 運動とする。制御は通常、制御される確率過程の状態を見ながらすべきもの、従って、その確率過程の汎関数の形で考える閉ループ系であることが自然であるが、数学的には、まずは以下のような設定にしておくのが便利である。与えられた情報系 $\mathcal{F}_t$ に関して発展的可測な Γ 値確率過程を、許容可能な制御 (admissible control) とよぶが、そのような制御 U_t が用いられたとき、制御対象が次の制御確率微分方程式 (controlled stochastic differential equation) に従って時間発展するものとする。

$$(2.1) \quad dX_t = b(X_t, U_t)dt + \sigma(X_t, U_t)dB_t,$$

ここで、 $\sigma(x, u)$ は $n \times n$ 対称行列、 $b(x, u)$ は n ベクトルで、一意解をもつような良い条件をもっているものとする。この解を、制御 U_t に対する系過程 (system process) という。まず、有限時間範囲の問題として、費用汎関数は次のような終端時刻 (terminal time) を T とする 2 種類のものが主に考察される。

$$I_0(T, x, \varphi, U) = \int_0^T f(X_t, U_t)dt + \varphi(X_T),$$

$$I_1(T, x, \varphi, U) = \exp(\theta I_0(T, x, \varphi, U)).$$

ここで、 X_t は $X_0 = x$ となる U_t に対する系過程、 I_0 は旧来考えられてきた古典的費用汎関数で、 $f(X_t, U_t)dt$ は単位時間 dt に要する（得られる）費用 (running cost)、 $\varphi(X_T)$ は終端時刻 T に要する（得られる）費用 (terminal cost) を表す。 I_1 はリスク鋭感的費用汎関数 (risk-sensitive cost functional) と呼ばれ、そこに現れる θ はリスク鋭感的パラメーターという。 I_0 および I_1 はともにランダムな量であり、確率制御問題では通常その期待値

$$\begin{aligned} J_0(\tau, x, \varphi, U) &= E[I_0(T, x, \varphi, U)] \\ J_1(\tau, x, \varphi, U) &= \frac{1}{\theta} \log E[I_1(T, x, \varphi, U)] \end{aligned}$$

を評価関数とし、それを最大または最小にする問題を考える。 J_0 と J_1 の関係は θ を 0 に近づけた極限

$$J_1 \sim E[I_0] + \frac{\theta}{2} \text{Var}[I_0] + O(\theta^2)$$

を見ることにより理解される。上の評価関数を最小にする問題を考察する際、 $\theta > 0$ の場合をリスク回避的 $\theta < 0$ の場合をリスク志向的という。

後に述べる数理ファイナンスとの関連で述べるならば、対数期待効用最大化問題は、古典的確率制御の特別な場合として捉えられ、べき型期待効用最大化問題はリスク鋭感的確率制御の特別な場合として考えられる。

古典的費用関数の場合にはしばしば、非負関数 $c(x, u)$ によって決まる減価項 $c_t = \int_0^t c(X_s, U_s)ds$ も考慮した

$$\tilde{I}_0(T, x, \varphi, U) = \int_0^T e^{-\alpha t} f(X_t, U_t)dt + e^{-\alpha T} \varphi(X_T)$$

も考えられる。その最適値 $V(T, x, \varphi) = \inf_{U, \text{制御過程}} E[\tilde{I}_0(T, x, \varphi, U)]$ が、制御過程 $\hat{U}_t$ で得られたとき、 $\hat{U}_t$ を最適制御 (optimal control) という。リスク鋭感的費用汎関数の期待値を評価関数とする リスク鋭感的確率制御問題 (risk-sensitive stochastic control problem) に対しても同様に、最適値、最適制御が定義される。

終端時刻 T をランダムな時刻 (停止時刻) τ とした場合 τ を制御と考え、 σ, b, f が U によらず、費用汎関数はしばしば

$$\tilde{I}_0(\tau, x, \varphi) = \int_0^\tau e^{-\alpha t} f(X_t) dt + e^{-\alpha \tau} \varphi(X_\tau), \quad \alpha > 0$$

の形で考察されるが、その場合は最適停止問題と呼ばれる問題となる ([2])。ここでも数理ファイナンスとの関連で述べるならば、アメリカンオプションの価格付けや、取引費用を考慮した問題はしばしば最適停止問題との関連づけて考察される ([34], [39], [46], [50])。また、停止時刻の組 τ, σ に対して定義される費用汎関数

$$I_2(\tau, \sigma, x, \varphi, \psi) = \int_0^{\tau \wedge \sigma} e^{-\alpha t} f(X_t) dt + e^{-\alpha \tau} \varphi(X_\tau) \mathbf{1}_{\tau < \sigma} + e^{-\alpha \sigma} \psi(X_\sigma) \mathbf{1}_{\sigma < \tau},$$

を問題とする停止ゲームと呼ばれる問題があるが、これはその期待値を片方は最大化しようとし、もう一方は最小化しようとする問題である ([2], [20])。最近数理ファイナンスではこのタイプの問題としてゲームオプションやクレジットリスクへの応用が考察されている ([31], [33])。

また、最適停止問題においても費用汎関数が指数型の場合の問題が、数理ファイナンスとの関連で新たに提起されてきている。すなわち

$$I_1(\tau, x, \varphi) = e^{\int_0^\tau f(X_t) dt + \varphi(X_\tau)},$$

の期待値を評価関数とする問題でこれはこれまで考えられてきた最適停止問題の枠には収まらない問題である ([50])。なぜなら、例えば、 $\varphi(x) = 0$ とするとき、 $f(x)$ が定符号ならば自明な問題となり、符号が変化する場合が問題となるが、この場合は旧来の最適停止問題の枠に収まらないからである。

また、停止時刻とその時刻までの情報に関して可測な確率変数の組の列 $v = \{\tau_n, \xi_n\}_n$ を制御と考える衝撃制御 (Impulse control) 問題がある。これは次式を費用汎関数と考える確率制御問題である。

$$\tilde{I}_0(T, \{v\}, x) = \int_0^T e^{-\alpha t} f(X_t^v) dt + \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\alpha \tau_n} c(X_{\tau_n}^v, \xi_n) \mathbf{1}_{\tau_n \leq T}$$

ここで X_t^v は $\tau_n \leq t < \tau_{n+1}$ に対して ξ_n を初期値とする確率微分方程式

$$dX_t = \sigma(X_t) dB_t + b(X_t) dt$$

の解である。また、 $c(x, \xi)$ は衝撃制御 (impulse control) に付随した費用関数である ([2])。数理ファイナンスでは、取引費用を考慮した問題等にしばしば現れる問題で、その際、 $c(x, \xi)$ が取引費用に対応する ([63], [39])。

さて、評価関数の形としては、長時間平均を考える場合もしばしば重要となる。すなわち、

$$\bar{J}_0 = \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E[I_0(T, x, 0, U)]$$

あるいは

$$\bar{J}_1 = \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T\theta} \log E[I_1(T, x, 0, U)]$$

である。terminal cost を 0 とし、終端時刻を定数 T としておいた有限時間範囲の費用汎関数の期待値の長時間平均を考えると言うわけである。この場合、後に述べる H-J-B 方程式はエルゴード型 H-J-B 方程式を対応して考察することになる。実用的な観点からは、有限時間範囲で問題を考察するとき、最適制御は時間に依存するため、その数値解析を実行しようとすれば計算量が非常に多くなる。従って、十分に時間が長い有限時間範囲の問題を長時間平均の問題で近似するという観点にたつて、時間依存性を持たない最適制御が得られる長時間平均の問題を考察することが重要となる ([3])。数理ファイナンスの問題においてもしばしばこのような費用汎関数が考察され、エルゴード型 H-J-B 方程式の解を用いて最適戦略の構成がされる ([48],[47], [49], [23],[7],[16], [17],[18]) リスク鋭感的費用汎関数の場合は、べき型期待効用最大化問題と関連するが、さらにその双対問題として、大偏差確率制御問題

$$(2.2) \quad \sup_{h.} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log P\left(\frac{\log V_T(h)}{T} \geq c\right)$$

が考察されている ([56], [22],[60])。すなわち、対応するリスク鋭感的確率制御問題は

$$(2.3) \quad \sup_{h.} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log E[e^{\theta V_T(h)}]$$

で、その双対問題として上の大偏差確率制御問題が考察される。ここでは、株式への投資比率 h が制御であり、 $V_t(h)$ は投資家のもつ資産価値過程、従って資産の成長率に関する大偏差確率を問題としている。これは上で述べた確率制御問題の範疇には入らないが、リスク鋭感的確率制御の双対問題として捉えられる。数理ファイナンスを動機として現れた新しいタイプの確率制御問題である。

2.2 Belleman 原理, H-J-B 方程式, 最適制御

確率制御の基本原理解である Bellman 原理について述べておこう。有限区間 $[0, T]$ 上で確率制御問題を考察する。問題は制御確率過程を (2.1) の解とし、最小化問題

$$V(T, x, \varphi) := \inf_{U.} E[\tilde{I}_0(T, x, \varphi, U)] = \inf_{U.} \left[\int_0^T e^{-c_s} f(X_s, U_s) ds + e^{-c_T} \varphi(X_T) \right]$$

を考える。その際、 $0 \leq t \leq T$ に対して、値関数 $v(t, x; \varphi) = V(T - t, x, \varphi)$ をとる、すなわち、

$$v(t, x; \varphi) := \inf_{U_t} E[\tilde{I}_0(T - t, x, \varphi, U)]$$

を考察する。このとき、

(2.4)

$$V(T, x, \varphi) = \inf_{U_t} \left[\int_0^t e^{-c_s} f(X_s, U_s) ds + e^{-c_t} v(t, X_t) \right] = V(t, x, v(t, \cdot, \varphi))$$

が十分一般的な条件の下で成立する。これを Bellman 原理という。これは、区間 $[0, T]$ 上で終端関数を φ とする最適化問題を考察するにあたって、途中の時点 t から終端時刻 T までの最適化をまず考察し、その値関数を終端関数として改めて時点 0 から t までの最適化を考えたものが元の最適化問題と一致することを意味する。一般的にどのような条件の下で厳密にこの原理が証明されるかは、必ずしも満足すべき結果には至っていないが、例えば 制御領域 Γ が凸であるとき、 σ, b, c, f, φ に関する連続性と増大度に関する条件の下で値関数 $v(t, x; \varphi)$ は (t, x) について連続であることが示され、その事を用いて Bellman 原理は証明される。このとき、

$$F(x, p, A, v) = - \inf_{u \in \Gamma} \left\{ \sum_{i,j} \frac{1}{2} (\sigma \sigma^*)^{ij}(x, u) A_{ij} + \sum_i b^i(x, u) p_i - c(x, u) v + f(x, u) \right\}$$

とおけば、 $v(t, x; \varphi)$ は

$$(2.5) \quad -\frac{\partial v}{\partial t} + F(x, Dv, D^2v, v) = 0, \quad v(T, x) = \varphi(x)$$

の一意的な粘性解となる ([35], [40])。この方程式は、H-J-B (Hamilton-Jacobi-Bellman) 方程式と呼ばれるものである。粘性解は弱解の一つの概念であるが、解として連続（または半連続）であることしか要請しないため、広い範囲に適用可能である。最適制御の構成まで議論しようとするときには、さらにこの H-J-B 方程式の解としてある程度以上の正則性（滑らかさ）をもったものであることが要請されるが、値関数の特徴づけを一般的な状況の下で述べようとするときには、粘性解の理論はしばしば強力な働きをする。標語的に言えば Bellman 原理 $\Rightarrow$ 広義の最大値原理であり、確率微分方程式系に関する動的計画原理に粘性解の概念が深く結びついている。粘性解の理論はそれ自体で独自の発展を遂げているが、数理ファイナンスにおける新しい話題との関連で注目すべきことは、最近、リスク測度との関連でこの理論を利用する動きが出てきていることである ([65], [54], [55])。

無限時間範囲で長時間平均の評価関数 $\bar{J}_0$ の最小値を考察する問題は、エルゴード型 H-J-B 方程式

$$(2.6) \quad \chi = F(x, Dv, D^2v, v)$$

が対応するが、この方程式においては、関数 v と定数 χ の組が解と考えられる ([3])。

リスク鋭感的確率制御については、必ずしも一般的な形で考察されてきたわけではない。'90年代に工学におけるロバスト制御との関連で議論が進められ、'90年代終わりころからその数理ファイナンスへの応用が考察されてきた。最近では逆向き確率微分方程式の立場でも問題とされるようになってきているが ([11],[27]), まだ決定的に有効な方法は解明されていないように思われる。数理ファイナンスとの関連でも問題とされる、ロバスト性を数学的にどう捉えるかという問題意識を背景として、有効な方法が依然模索されている状況と言っても良いかもしれない。

簡単に解説しておこう。 $\sigma(x, u) = \sigma(x)$ の場合がこれまで考察されてきた。終端時刻を定数 T とし、その最適値を

$$W(T, x, \varphi) = \inf_U J_1(T, x, \varphi, U)$$

値関数を $w(t, x; \varphi) = W(T - t, x, \varphi)$ とおくと、その H-J-B 方程式は

$$(2.7) \quad \frac{\partial w}{\partial t} + \tilde{F}(x, Dw, D^2w) = 0, \quad w(T, x) = \varphi(x)$$

である。ただし、

$$\tilde{F}(x, p, A) = \sum_{i,j} \frac{1}{2} (\sigma \sigma^*)^{ij}(x) A_{ij} + \frac{\theta}{2} \sum_{i,j} (\sigma \sigma^*)^{ij}(x) p_i p_j + \inf_{u \in \Gamma} \left\{ \sum_i b^i(x, u) p_i + f(x, u) \right\}$$

工学的に重要な H 無限大制御の非線形系への一般化に対する確率論的アプローチとしては、リスク鋭感的確率制御の特異極限が考察されており、その極限方程式が非線形 H_∞ 制御に対応するものと考えられている ([5],[15],[67])。リスク鋭感的確率制御の H-J-B 方程式は 1 階の導関数に関する 2 次の非線形項が現れ、その非線形性の解析が本質的にその背後にある ([5], [6])。解析の困難さもその点に由来する。現状では 2 階の方程式の解析とその極限移行の考察よりもむしろその極限方程式 (1 階非線形偏微分方程式) 自身の考察が粘性解の立場から深められつつある。

最適停止問題に対応する H-J-B 方程式は変分不等式と呼ばれるが

$$(2.8) \quad \min \left\{ \sum_{i,j} \frac{1}{2} (\sigma \sigma^*)^{ij}(x) D_{ij} v + \sum_i b^i(x) D_i v - \alpha v + f(x), \varphi - v \right\} = 0$$

となる。このとき、条件 $\alpha > 0$ は本質的に重要である。費用汎関数が指数型の場合には対応する変分不等式は形式的に

$$\min \left\{ \sum_{i,j} \frac{1}{2} (\sigma \sigma^*)^{ij}(x) D_{ij} v + \sum_i b^i(x) D_i v - f(x) v, e^\varphi - v \right\} = 0$$

となるが、上で述べたように、 $f(x)$ の符号が変化する場合が興味のある問題となり、これは一般論では制御しきれない。

また衝撃制御に対応する H-J-B 方程式は準変分不等式と呼ばれ

$$(2.9) \quad \min \left\{ \sum_{i,j} \frac{1}{2} (\sigma \sigma^*)^{ij}(x) D_{ij} v + \sum_i b^i(x) D_i v - \alpha v + f(x), \varphi - \mathcal{M}v \right\} = 0$$

となる。ただし,

$$\mathcal{M}v(x) = \inf_{\xi} \{c(x, \xi) + v(\xi)\}.$$

この場合も費用汎関数が指数型の場合は困難な問題となり, 今後の研究が待たれる。

最適制御

完全可観測の場合すなわち, 系過程 X_t が観測可能な場合を考える。この場合, 上の H-J-B 方程式が滑らかな解を持てば, ある条件の下でその解から最適制御を構成できる。例えば, σ が一様に正定値で, b が有界ボレル可測のとき, Γ がコンパクトならば, 次のような方法で, 一般的に最適な Markov 型制御が構成できる。 Γ がコンパクトであるから, Γ 値 Borel 関数 $\tilde{u}$ を

$$(2.10) \quad \inf_{u \in \Gamma} \{L^u v(t, \cdot, \varphi)(x) + f(x, u)\} = L^{\tilde{u}(t, x)} v(t, \cdot, \varphi)(x) + f(x, \tilde{u}(t, x))$$

が成り立つように選べる。ただし,

$$L^u v = \frac{1}{2} \sum_{ij} (\sigma \sigma^*)^{ij}(x, u) D_{ij}^2 v + \sum_i b^i(x, u) D_i v - c(x, u) v$$

そして

$$dX_t = b(X_t, \tilde{u}(t, X_t))dt + \sigma(X_t, \tilde{u}(t, X_t))dB_t$$

が少なくとも一つ (弱い) 解 X_t を持つならば, $\tilde{U}_t(\omega) = \tilde{u}(t, X_t)$, $0 \leq t \leq T$ と定義しすると,

$$V(T, x, \varphi) = E[\tilde{I}_0(T, x, \varphi; \tilde{U})]$$

となり, $\tilde{U}_t = \tilde{u}(t, X_t)$, $0 \leq t \leq T$ は最適なマルコフ型制御になる。 Γ がコンパクトでなくても, (2.10) が成立するような Borel 関数 $\tilde{u}(t, x)$ が選べる場合は同様に最適マルコフ型制御が構成できる。

例 LQG (Linear Quadratic Gaussian) 制御

$\Gamma = R^{N_1}$, $\sigma(x, \gamma) \equiv G$, $b(x, u) = Fx + Cu$, $f(x, u) = \frac{1}{2}x^*Rx + \frac{1}{2}u^*Su$, $\varphi(x) = \frac{1}{2}x^*Kx$, $c(x, u) = 0$, ここで, G ; F , R , U ; C ; S はそれぞれ $N \times d$, $N \times N$, $N \times N_1$, $N_1 \times N_1$ 定数行列で R, K は非負定値, S は正定値である。すなわち, 制御確率微分方程式は

$$dX_t = GdB_t + (FX_t + Cu_t)dt, \quad X_0 = x$$

であり, 問題は

$$V(T, x) = \inf_{\mathcal{A}_d} E\left[\int_0^T \left(\frac{1}{2}(X_s^x)^* R X_s + \frac{1}{2}u_s^* S u_s\right) ds + \frac{1}{2}(X_T^x)^* K X_T^x\right]$$

を考察することである。値関数は

$$v(t, x) = \inf_{\mathcal{A}_d} E\left[\int_0^{T-t} \left(\frac{1}{2}(X_s^x)^* R X_s + \frac{1}{2}u_s^* S u_s\right) ds + \frac{1}{2}(X_{T-t}^x)^* K X_{T-t}^x\right]$$

このとき、対応する H-J-B 方程式は

$$(2.11) \quad \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} (GG^*)^{ij} \dot{D}_{ij} w + (Fx)^* \nabla w + \inf_{u \in R^{N_1}} \{ (Cu)^* \nabla w + \frac{1}{2} u^* S u \} + \frac{1}{2} x^* R x = 0$$

$$w(T, x) = \frac{1}{2} x^* K x$$

であるが、(2.11) は

$$(2.12) \quad \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} (GG^*)^{ij} D_{ij} w + (Fx)^* \nabla w - \frac{1}{2} (\nabla w)^* (CS^{-1}C^*) \nabla w + \frac{1}{2} x^* R x = 0$$

と表される。(2.12) は $\hat{w}(t, x) = \frac{1}{2} x^* P(t)x + Q(t)$ の形の下に有界な解を持つ。ここで、 $P(t)$ は行列リッカチ方程式

$$(2.13) \quad \dot{P}(t) + PF + F^*P - PCS^{-1}C^*P + R = 0, \quad P(T) = K$$

の解であり、 $Q(t)$ は

$$(2.14) \quad \dot{Q}(t) + \text{tr}(PGG^*) = 0, \quad Q(T) = 0$$

の解である。(2.11) における $\inf$ が $u(t, x) = -S^{-1}C^*\nabla\hat{w}(t, x)$ で実現されることに注意する。 $\nabla\hat{w}(t, x) = P(t)x$ であることから、確率微分方程式

$$\hat{X}_s = x + GB_s + \int_0^s (F\hat{X}_r - CS^{-1}C^*P(r)\hat{X}_r) dr$$

をとり、 $\hat{u}_s = -S^{-1}C^*P(s)\hat{X}_s$ とおけば、この $\hat{u}_s = -S^{-1}C^*P(s)\hat{X}_s$ が最適制御である。

これは古典的費用汎関数の場合であるが、系過程を同じにして、費用汎関数が 2 次関数の指数型になっている場合はしばしば、LEQG (Linear Exponential Quadratic Gaussian) 問題と呼ばれ、やはり明示的な解が、リッカチの方程式を解くことによって求められる ([43]。また、それは数理ファイナンスのべき型期待効用関数の場合に応用される ([41])。

ここでは、有限時間範囲の例を挙げたが、これは特別な場合に H-J-B 方程式 (2.5) の解が明示的に求まるという例である。対応して、この場合、エルゴード型 H-J-B 方程式 (2.6) の解を明示的に求めるには (2.13) の定常解を求めることになる。すなわち代数リッカチ方程式

$$PF + F^*P - PCS^{-1}C^*P + R = 0$$

の解を求め、それを用いて長時間平均評価関数の最小化問題の最適制御が構成される。

同様に費用汎関数が 2 次関数の指数型の場合 (リスク鋭感的確率制御の場合) にも同様の定常解を求めることにより最適制御が構成される。数理ファイナンスにおけるべき型期待効用最大化問題に広く応用されている ([7],[16],[17],[18],

[48],[25]). また, 2.1 節で述べたように, 1 次元の場合にはその双対問題として大偏差確率制御との関連が示されている ([56], [60], [22]). さらに, 指数型の場合には定常解が必ずしも自動的に最適制御の構成につながらない場合があるなど新たな知見も得られている. これは対応する評価関数の発散の可能性を除去できないことが起こりうるからである.

2.3 部分的可観測確率制御問題

問題の取り扱いが困難なためより限定した設定で考えられる. $\Omega = \mathcal{C}([0, \infty); R^n)$, $B_t = \mathcal{B}_t(\mathcal{C}([0, \infty); R^n))$ とし, n 次元ブラウン運動 B_t が与えられているとする. $\tilde{\Omega} = \mathcal{C}([0, \infty); R^m)$, $\tilde{B}_t = \mathcal{B}_t(\mathcal{C}([0, \infty); R^m))$ とし, $\zeta_t(\omega) : [0, \infty) \times \tilde{\Omega} \mapsto \Gamma$ を $\tilde{B}_t$ 発展的可測とする. もう一つ m 次元ブラウン運動 W_t が与えられているとし, $\sigma(x, u) = \sigma(x)$ なる場合を考える. $\tilde{\Omega} = \Omega \times \tilde{\Omega}$ とする. 系過程 X_t と観測過程 Y_t を決める確率微分方程式

$$\begin{aligned} dX_t &= b(X_t, \zeta_t(Y_t))dt + \sigma(X_t)dB_t \\ dY_t &= h(X_t)dt + dW_t \end{aligned}$$

が解をもつとき, 制御 $U_t(\bar{\omega}) = \zeta_t(Y_t(\bar{\omega}))$ とこれに対応する系過程 X_t と考えて部分可観測確率制御問題の定式化と考えることができる. ここで, 注意を与えておこう. ここでは, 系過程 X_t は直接には観測されず, 観測過程 Y_t の情報のみを用いて制御を考えるとすることである. しかしながら, 観測過程は系過程に依存しており, 一方, 系過程はその観測過程から決まる制御によって決まっているので, システムとして (X_t, Y_t) が解を持つことが前提となる. まずは例を考察することから始める.

部分可観測 LQG (linear quadratic Gaussian) 制御.

n 次元系過程 X_t と m 次元観測過程 Y_t が次の確率微分方程式にしたがって時間発展しているとする.

$$\begin{aligned} dX_t &= (FX_t + Cu_t)dt + GdB_t, \\ dY_t &= HX_tdt + dW_t. \end{aligned}$$

ここで, F, C, G は上と同一の完全可観測の場合と同じ行列, W_t と B_t は独立な Brown 運動. 制御領域は $\Gamma = R^{N_1}$ とする. 上と同じ与えられた非負定値行列 R, K および, 正定値行列 S に対して, 評価関数

$$J_0(T, \xi, \varphi, u) = E\left[\int_0^T \left(\frac{1}{2}(X_s^x)^* R X_s^x + \frac{1}{2}u_s^* S u_s\right)ds + \frac{1}{2}(X_T^x)^* K X_T^x\right]$$

を最小にする制御を求める. ただし, X_t, Y_t は $X_0 = \xi, Y_0 = 0$ を初期条件とする解であり, ξ は平均 x_0 , 共分散 Π_0 の正規確率変数で B_t, W_t と独立であるとする. また, 制御 u_t は $\mathcal{G}_t \equiv \sigma(Y_s; s \leq t)$ 発展的可測なものの中で動かす. このとき, $\hat{X}_t = E[X_t | \mathcal{G}_t]$ は Kalman-Bucy フィルターに従い, 初期条件を $\hat{X}_0 = x_0$ とする確率微分方程式

$$d\hat{X}_t = (F\hat{X}_t + Cu_t)dt + \Pi(t)^*(dY_t - H\hat{X}_tdt)$$

を満たす。ただし、 $\Pi(t)$ は初期条件を $\Pi(0) = \Pi_0$ とする、誤差行列の満たす Riccati 方程式の解。もう一つの逆向き Riccati 方程式 (2.13) の解 $P(t)$ を用いて最適制御は

$$-S^{-1}C^*P(t)\hat{X}_t$$

と表される。 $P(t)$ は制御確率過程の分散 G によっておらず、系過程が deterministic な場合と同じリッカチの方程式の解である。従って、ここに現れた係数 $-S^{-1}C^*P(t)$ は系過程が決定論的な場合と同じものであり、部分的可観測確率制御の最適制御が、系過程のフィルター $\hat{X}_t$ をとる操作と決定論的な系過程の制御からくる部分とに分離されたということになり、これを分離原理と言う。

この方法は、数理ファイナンスにおける部分情報下における対数期待効用最大化問題の最適戦略の明示的な構成に応用される。

上と同じ方程式系で定義された場合でも、評価関数がリスク鋭感的費用関数 $I_1(T, \xi, \varphi, U)$ の期待値により定義された問題では、やはり2つのリッカチの方程式を解くことによって明示的な解が求まるが、このような分離原理は成立しない ([8], [4])。この方法はまた、数理ファイナンスの部分情報下におけるべき型期待効用最大化問題に応用される ([45])。

部分的可観測確率制御の問題では、観測過程が制御に依拠し、その制御がまた観測過程から決まるため、その数学的に厳密な一般的とり扱いが困難である。基準測度 (reference measure) の方法はその困難を避けるのに有効である。確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上に独立なブラウン運動 B_t, Y_t とそれらに独立な確率変数 ξ がまず先に与えられているとし、 $\mathcal{F}_t = \sigma(\xi, B_s, Y_s; s \leq t)$, $\mathcal{G}_t = \sigma(Y_s, s \leq t)$ とする。 $\mathcal{G}_t$ 発展的可測な制御 U_t に対して、系過程が初期条件を $X_0 = \xi$ とする確率微分方程式

$$dX_t = \sigma(X_t)dB_t + b(X_t, U_t)dt$$

の解として定まるとき、

$$\eta(t) = e^{\int_0^t h^*(s, X_s) dY_s - \frac{1}{2} \int_0^t (h^* h)(s, X_s) ds}$$

として定義される η が $E[\eta(t)] = 1, \forall t$ をみたすならば、新たに確率測度 P^U を $\frac{dP^U}{dP}|_{\mathcal{F}_T} = \eta(T)$ で定義する。このとき、 $W_t^U = Y_t - \int_0^t h(s, X_s) ds$ は P^U の下でブラウン運動であり、

$$dY_t = h(t, X_t)dt + dW_t^U$$

であるから、元の確率測度 P の下でブラウン運動であった Y_t は新しい確率測度 P^U の下での観測過程とみなせる。このように考えることで、系過程を一般的に採ることができるわけであり数学的には好都合となる。評価関数

$$J(T, \xi, \varphi, U) = E^U \left[\int_0^T f(X_s, U_s) ds + \varphi(X_T) \right]$$

を最小にする確率制御問題を考えるが,

$$E^U[\int_0^T f(X_s, U_s)ds + \varphi(X_T)] = \int_0^T E[E[f(\cdot, U_t)\eta_t|\mathcal{G}_t]]dt + E[E[\varphi(\cdot)\eta_T|\mathcal{G}_T]]$$

であるから, これは非正規化条件つき期待値 $p_t^U(\psi) = E[\psi(X_t)\eta(t)|\mathcal{G}_t]$ を用いて

$$J(T, \xi, \varphi, U) = E[\int_0^T p_t^U(f(\cdot, U_t))dt + p_T^U(\varphi(\cdot))]$$

と表される. p_t^U が密度関数をもつような条件の下で, それは制御 Zakai 方程式

$$dp_t^U = (L^U)^* p_t^U dt + p_t^U h^*(t, x) dY_t$$

をみたす. ここで $L^u = \sum_{ij} \frac{1}{2}(\sigma\sigma^*)^{ij}(x)D_{ij}^2 + \sum_i b^i(x, u)D_i$ で $(L^u)^*$ はその随伴作用素である. 従って, 制御確率過程を上の制御 Zakai 方程式の解とし, 評価関数を J とする確率制御問題を考えることになる. この問題に対して, 最大値原理や Bellman 原理に基づくアプローチが考察されている ([4]).

リスク鋭感的費用関数の場合は, 費用汎関数が指数型であることから, 上の測度変換の密度関数 ρ に組み込むことにより, 制御修正 Zakai 方程式を導き, 類似の考察を行う. 数理ファイナンスにおける部分情報下の問題においては, 観測量が制御によらない設定となるため, かえって取り扱いが容易になり, 基準測度を用いる方法がしばしば有効となる ([44],[45]).

3 数理ファイナンス

3.1 概論

ここでは数理ファイナンスに関わる問題をフィルタリングと確率制御との関連から述べる. 次のような市場モデルを考える. $m+1$ 種類の証券 (または債券) $(S_t^0, S_t) := (S_t^0, S_t^1, \dots, S_t^m)^*$ とファクター (経済的要因) と考えられる確率過程 X_t があるとする. 証券価格は次の確率微分方程式を満たすとする.

$$(3.1) \quad dS^0(t) = r(t, X_t, S_t)S^0(t)dt, \quad S^0(0) = s^0,$$

$$(3.2) \quad \begin{aligned} dS^i(t) &= S^i(t)\{g^i(t, X_t, S_t)dt + \sum_{k=1}^{n+m} \sigma_k^i(t, X_t, S_t)dW_t^k\}, \\ S^i(0) &= s^i, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

ここで $r(t, x, S)$ は 非負の関数. ファクターとしては

1) 確率微分方程式の解

$$(3.3) \quad \begin{aligned} dX_t &= b(t, X_t, S_t)dt + \lambda(t, X_t, S_t)dW_t, \\ X(0) &= x \in R^n, \end{aligned}$$

である場合と

2) 有限状態空間に値をとる連続時間マルコフ連鎖の場合

を考える. ここで $W_t = (W_t^k)_{k=1, \dots, (n+m)}$ は フィルターつき確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t)$ で定義された $m+n$ 次元標準 Brown 運動である. また, σ と λ はそれぞれ, $m \times (m+n)$, $n \times (m+n)$ 行列値関数.

ここで, σ はヴォラティリティと呼ばれる係数, g は 騰貴率 (appreciation rate) と呼ばれる係数である. σ, r, g がすべて定数の場合で $n=0$ の場合 (従ってファクターは考えない場合) は Black-Scholes モデルとよばれるよく知られたモデルである. ここでは, フィルタリングや確率制御との関連から述べるため, Merton ([37]) によって導入された上のような一般的なモデルで考察する.

(3.1),(3.2) を考える代わりに

$$Y_t^i = \log S_t^i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m,$$

$Y_t = (Y_t^1, Y_t^2, \dots, Y_t^m)^*$ and $e^Y = (e^{Y^1}, \dots, e^{Y^m})^*$. とおいて

$$(3.4) \quad dY_t^0 = r(t, X_t, e^{Y_t})dt$$

および

$$(3.5) \quad dY_t = G(t, X_t, Y_t)dt + \Sigma(t, X_t, Y_t)dW_t,$$

を考えるとしばしば便利である. ここで

$$\begin{aligned} G^i(t, x, y) &= g^i(t, x, e^y) - \frac{1}{2}(\sigma\sigma^*)^{ii}(t, x, e^y), \\ \Sigma_k^i(t, x, y) &= \sigma_k^i(t, x, e^y), \end{aligned}$$

1) の場合には同様に

$$B(t, x, y) = b(t, x, e^y), \quad \Lambda(t, x, y) = \lambda(t, x, e^y).$$

とおいて, (3.3) の代わりに

$$(3.6) \quad dX_t = B(t, X_t, Y_t)dt + \Lambda(t, X_t, Y_t)dW_t$$

を考える.

上で述べてきたフィルタリングとの関係で述べるならば, (3.4),(3.5), で決まる Y_t を観測過程とみなし X_t を系過程とみなす. よく知られているように, 証券価格過程 S_t に関しては, 従って $Y_t^i = \log S_t^i, i = 1, 2, \dots, m$ に関しては, 証券取引所等において次々刻々と膨大なデータが得られ, その高頻度に得られたデータから上の市場モデルで使われた係数を推定するということが基本的に重要である. しかしながら, フィルタリングの項で述べたように, ヴォラティリティが観測可能でない確率過程 X_t に依存している場合には, 推定方法に関して確立した方法はないといってよい. 現実的には観測時

間は離散時系列であることであることから、離散観測時系列からの推定方法が試みられている ([58]). この問題は統計学に基本的に重要な問題を提起しており、高頻度データ解析の問題として、フィルタリングや確率過程の統計的推測の研究を行っている研究者の間で注目を集めている ([19], [24], [64]). また最近では、ヴォラティリティの概念自身を見直そうという動きの研究もある ([53]).

確率制御との関係

さて、確率制御との関係はどうなっているであろうか.

投資家が各時点 t で各証券 S_t^i を N_t^i 枚保有しているとすれば総資産は

$$V_t = \sum_{i=0}^m S_t^i N_t^i$$

各証券への投資比率は

$$h_t^i = \frac{S_t^i N_t^i}{V_t}, \quad i = 0, 1, \dots, m$$

自己資金充足条件

$$dV_t = \sum_{i=0}^m N_t^i dS_t^i$$

の下で

$$\begin{aligned} \frac{dV_t}{V_t} &= \sum_{i=0}^m h_t^i \frac{dS_t^i(t)}{S_t^i(t)} \\ &= h_t^0(t) r(t, X_t, S_t) dt + \sum_{i=1}^m h_t^i(t) \{g^i(t, X_t, S_t) dt + \sum_{k=1}^{m+n} \sigma_k^i(t, X_t, S_t) dW_t^k\} \\ V_0 &= v \end{aligned}$$

となるが,

$$h_t^0 = 1 - \sum_{i=1}^m h_t^i$$

$h_t = (h_t^1, h_t^2, \dots, h_t^m)$ とおけば

$$\begin{aligned} \frac{dV_t}{V_t} &= r(t, X_t, S_t) dt + h(t)^* (g(t, X_t, S_t) - r(t, X_t, S_t) \mathbf{1}) dt + h(t)^* \sigma(t, X_t, S_t) dW_t, \\ V_0 &= v, \end{aligned}$$

対数価格過程 Y_t を用いて表すと

$$\frac{dV_t}{V_t} = \tilde{r}(t, X_t, Y_t) dt + h_t^* (\tilde{g}(t, X_t, Y_t) - \tilde{r}(t, X_t, Y_t) \mathbf{1}) dt + h_t^* \Sigma(t, X_t, Y_t) dW_t$$

ただし, $\tilde{g}(t, x, y) = g(t, x, \mathbf{e}^y)$, $\tilde{r}(t, x, y) = r(t, x, \mathbf{e}^y)$

さて,

$$\begin{aligned}\log V_T &= \log v + \int_0^T h_t^* \Sigma(t, X_t, Y_t) dW_t \\ &\quad + \int_0^T \{ \tilde{r}(t, X_t, Y_t) + h_t^* (\tilde{g}(t, X_t, Y_t) - \tilde{r}(t, X_t, Y_t) \mathbf{1}) - \frac{1}{2} h_t^* \Sigma \Sigma^* h_t \} dt\end{aligned}$$

に注意すると対数効用最大化問題は次の評価関数を最大化する問題となる.

$$E[\log V_T] = \log v + E\left[\int_0^T \xi(t, X_t, Y_t, h_t) dt\right],$$

ただし

$$\xi(t, x, y, h) = \tilde{r}(t, x, y) + h^* (\tilde{g}(t, x, y) - \tilde{r}(t, x, y) \mathbf{1}) - \frac{1}{2} h^* \Sigma \Sigma^* (t, x, y) h$$

このとき, 投資比率 h を制御と考えるが, 系過程 (X_t, Y_t) は制御 h には依存せず, 評価関数のみが制御に依存する特殊なタイプの確率制御問題となる.

一方, べき型期待効用最大化問題の場合は

$$V_T^\mu = v^\mu e^{-\mu \int_0^T \eta(t, X_t, Y_t, h_t) dt + \mu \int_0^T h_t^* \Sigma(t, Y_t) dW_t - \frac{\mu^2}{2} \int_0^T h_t^* \Sigma \Sigma^* (t, X_t, Y_t) h_t dt}$$

$$\eta(t, x, y, h) = \frac{1-\mu}{2} h^* \Sigma \Sigma^* (t, x, y) h - h^* (\tilde{g}(t, x, y) - \tilde{r}(t, x, y) \mathbf{1}) - \tilde{r}(t, x, y)$$

に注意すると次の評価関数を最大化する問題となる.

$$\frac{1}{\mu} E[V_T^\mu] = \frac{1}{\mu} v^\mu E\left[e^{-\mu \int_0^T \eta(t, X_t, Y_t, h_t) dt + \mu \int_0^T h_t^* \Sigma(t, Y_t) dW_t - \frac{\mu^2}{2} \int_0^T h_t^* \Sigma \Sigma^* (t, X_t, Y_t) h_t dt}\right]$$

ここで次のような測度変換を行う.

$$P^h(A) = E\left[e^{\mu \int_0^T h_s^* \Sigma(s, X_s, Y_s) dW_s - \frac{\mu^2}{2} \int_0^T h_s^* \Sigma \Sigma^* (s, X_s, Y_s) h_s ds}, A\right]$$

$A \in \mathcal{F}_T$, $T > 0$. このとき, この確率測度 P^h の下で評価関数は

$$(3.7) \quad J(v, x; h, T) = \log v + \frac{1}{\mu} \log E^h\left[e^{-\mu \int_0^T \eta(s, X_s, Y_s, h_s) ds}\right].$$

となり,

$$\begin{aligned}W_t^h &= W_t - \langle W, \mu \int_0^t h^*(s) \Sigma(s, X_s, Y_s) dW_s \rangle_t \\ &= W_t - \mu \int_0^t \Sigma^*(s, X_s, Y_s) h(s) ds\end{aligned}$$

が P^h の下でのブラウン運動となる. このとき, 1) の場合は X_t および対数価格過程 Y_t は

$$\begin{aligned}(3.8) \quad dX_s &= (B(s, X_s, Y_s) + \mu \Lambda \Sigma^*(s, X_s, Y_s) h_s) ds + \Lambda(s, X_s, Y_s) dW_s^h \\ dY_s &= (G(s, X_s, Y_s) + \mu \Sigma \Sigma^*(s, X_s, Y_s) h_s) ds + \Sigma(s, X_s, Y_s) dW_s^h.\end{aligned}$$

となり、系過程 (X_t, Y_t) が制御 h_t に依存する形となり、これはリスク鋭感的確率制御問題の特別な場合となる。

ここで考える情報系は、完全可観測の場合、すなわち X_t を観測可能な確率過程とした場合は

$$\mathcal{G}_t = \sigma(S(u), X(u); u \leq t) = \sigma(Y(u), X(u); u \leq t)$$

をとることになる。しかしながら、ファクター X_t はすべての情報を必ずしも観測可能とはしない方が自然であり、その場合、すなわち部分的可観測の場合には、 X_t は観測過程 Y_t を通じて、推定すべきものとなる。この場合、考える情報系は

$$\tilde{\mathcal{G}}_t = \sigma(S(u); u \leq t) = \sigma(Y(u); u \leq t)$$

である。

3.2 拡散過程の場合

ここでは部分可観測の問題のみに触れるが、まずファクターが拡散過程の場合を述べる。 $\Sigma(t, x, y) = \Sigma(t, y)$ と仮定する。 $\hat{P}$ を $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度で以下で定義されるものとする。

$$\left. \frac{d\hat{P}}{dP} \right|_{\mathcal{F}_T} = \rho_T,$$

$$\rho_T = e^{-\int_0^T G(t, X_t, Y_t)^* (\Sigma \Sigma^*)^{-1} \Sigma(t, Y_t) dW_t - \frac{1}{2} \int_0^T G^* (\Sigma \Sigma^*)^{-1} G(t, X_t, Y_t) dt}.$$

このとき $\hat{P}$ の下で

$$\hat{W}_t = W_t + \int_0^t \Sigma^* (\Sigma \Sigma^*)^{-1} G(s, X_s, Y_s) ds$$

がブラウン運動となり、 Y_t は

$$dY_t = \Sigma(t, Y_t) d\hat{W}_t$$

を満たす。この測度で書き換えると

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} E[V_T^\mu] &= \frac{1}{\mu} v^\mu E[e^{-\mu \int_0^T \eta(t, X_t, Y_t, h_t) dt + \mu \int_0^T h_t^* \Sigma(t, Y_t) dW_t - \frac{\mu^2}{2} \int_0^T h_t^* \Sigma \Sigma^* (t, Y_t) h_t dt}] \\ &= \frac{1}{\mu} v^\mu \hat{E}[\rho_T^{-1} e^{-\mu \int_0^T \eta(t, X_t, Y_t, h_t) dt + \mu \int_0^T h_t^* \Sigma(t, Y_t) dW_t - \frac{\mu^2}{2} \int_0^T h_t^* \Sigma \Sigma^* (t, Y_t) h_t dt}] \\ &\equiv \frac{1}{\mu} v^\mu \hat{E}[e^{-\mu \int_0^T \eta(t, X_t, Y_t, h_t) dt} \Psi_T] \\ \Psi_t &= e^{\int_0^t Q(s, X_s, Y_s, h_s)^* dY_s - \frac{1}{2} \int_0^t Q^* \Sigma \Sigma^* Q(s, X_s, Y_s, h_s) ds} \end{aligned}$$

$$Q(s, x, y, h) = (\Sigma \Sigma^*)^{-1} G(t, x, y) + \mu h$$

となる.

$$q(t)(\varphi(t)) = q^h(t)(\varphi(t)) := \hat{E}[e^{-\mu \int_0^t \eta(s, X_s, Y_s, h_s) ds} \Psi_t \varphi(t, X_t, Y_t) | \mathcal{G}_t].$$

とおくとき,

$$\frac{1}{\mu} E[V_T^\mu] = \frac{1}{\mu} v^\mu \hat{E}[q^h(T)(1)].$$

であるがそのとき $q(t)$ は次の修正 ZAKAI 方程式を満たす.

$$\begin{aligned} q(t)(\varphi(t)) &= q(0)(\varphi(0)) + \int_0^t q(s) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} + L\varphi - \mu \eta_s(\cdot) \varphi \right. \\ &\quad \left. + \mu h_s^* (\Sigma \Lambda^* D_x \varphi + \Sigma \Sigma^* D_y \varphi) \right) ds \\ &\quad + \int_0^t q(s) (\varphi Q_s^* \Sigma \Sigma^* + (D_x \varphi)^* \Lambda \Sigma^* + (D_y \varphi)^* \Sigma \Sigma^*) (\Sigma \Sigma^*)^{-1} dY_s \end{aligned}$$

ここで

$$Q_s = Q(s, \cdot, Y_s, h_s), \quad \eta_s = \eta(s, \cdot, Y_s, h_s)$$

である. h_t を $\tilde{\mathcal{G}}_t$ 可測な範囲で動かして上の評価関数を最大化する問題となるわけであるが, この際, 修正 ZAKAI 方程式の解析がポイントとなり, 2.3 節で述べた考え方が数理ファイナンスの問題に適用されている ([44]). 特にこの修正 ZAKAI 方程式の解が有限次元の方程式の解で表現される場合はより詳しい解析が可能である ([45],[47]).

3.3 隠れマルコフモデルの場合

前節の 2) の場合に X_t が観測されないとしたモデルは隠れマルコフモデルと呼ばれるが, 最近の研究である [51] に従って解説しておこう. この場合 X_t の状態空間は, "レジーム" と呼ばれることもある. $\Sigma(t, x, y) = \Sigma(t, y)$ の場合を考察する. 新たな $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度 $\hat{P}$ を

$$\left. \frac{d\hat{P}}{dP} \right|_{\mathcal{F}_T} = \rho_T,$$

$$\rho_T = e^{-\int_0^T G^*(t, X_t, Y_t) (\Sigma \Sigma^*)^{-1} \Sigma(t, Y_t) dW_t - \frac{1}{2} \int_0^T G^* (\Sigma \Sigma^*)^{-1} G(t, X_t, Y_t) dt}$$

と定義する. このとき, $\hat{P}$ の下で

$$\hat{W}_t = W_t + \int_0^t \Sigma^* (\Sigma \Sigma^*)^{-1} (s, Y_s) G(s, X_s, Y_s) ds$$

はブラウン運動で Y_t は

$$dY_t = \Sigma(t, Y_t) d\hat{W}_t.$$

を満たす.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mu} E[V_T^\mu] \\ &= \frac{1}{\mu} v^\mu \hat{E}[e^{-\mu \int_0^T \eta(s, X_s, Y_s, h_s) ds + \mu \int_0^T h_s^* \Sigma(s, Y_s) dW_s - \frac{\mu^2}{2} \int_0^T h_s^* \Sigma \Sigma^*(s, Y_s) h_s ds} \rho_T^{-1}] \\ &= \frac{1}{\mu} v^\mu \hat{E}[e^{-\mu \int_0^T \eta(s, X_s, Y_s, h_s) ds + \int_0^T Q^*(s, X_s, Y_s, h_s) dY_s - \frac{1}{2} \int_0^T Q^* \Sigma \Sigma^* Q(s, X_s, Y_s, h_s) ds}] \end{aligned}$$

ここで

$$Q(t, X_t, Y_t, h_t) = (\Sigma \Sigma^*(t, Y_t))^{-1} G(t, X_t, Y_t) + \mu h_t.$$

である.

$$\begin{aligned} H_t = \exp\{-\mu \int_0^t \eta(s, X_s, Y_s, h_s) ds + \int_0^t Q^*(s, X_s, Y_s, h_s) dY_s \\ - \frac{1}{2} \int_0^t Q^* \Sigma \Sigma^*(s, Y_s) Q(s, X_s, Y_s, h_s) ds\} \end{aligned}$$

とおくと

$$q_t^i = \hat{E}[H_t X_t^i | \tilde{\mathcal{G}}_t],$$

ただし, $X_t^i = \mathbf{1}_{\{e_i\}}(X_t)$. このとき,

(3.7)

$$E\{V_T^\mu\} = v^\mu \hat{E}\{\hat{E}[H_T | \mathcal{G}_T]\} = v^\mu \sum_{i=1}^k \hat{E}\{\hat{E}[H_T X_T^i | \mathcal{G}_T]\} = v^\mu \hat{E}\{\sum_{i=1}^k q_T^i\}$$

であり q_t^i は次の修正 ZAKAI 方程式を満たす.

$$(3.8) \quad dq_t^i = (\Lambda(t) q_t)^i dt - \mu \eta(t, e_i, Y_t, h_t) q_t^i dt + q_t^i Q^*(t, e_i, Y_t, h_t) dY_t,$$

$$q_0^i = p_0^i \equiv P(\xi = e_i), \quad i = 1, 2, \dots, k$$

$q_t = (q_t^i)$ とすると, (q_t, Y_t) は制御確率過程とみなされ, 評価関数は

$$J = v^\mu \hat{E}\{\sum_{i=1}^k q_T^i\}.$$

となる. 値関数は

$$w(t, q, y) = \sup_{h \in \mathcal{A}(t, T)} v^\mu \hat{E}\{\sum_{i=1}^k q_T^i(t)\}$$

ここで $\mathcal{A}(t, T)$ は 区間 $[t, T]$, 上の許容な戦略全体 $q_s^i(t)$, $t \leq s \leq T$ は初期条件 $q_t^i(t) = q^i$ を満たす確率微分方程式の解. Y_s , $(t \leq s \leq T)$ の初期条件は $Y_t = y$. w の H-J-B 方程式は

$$(3.9) \quad \begin{cases} \frac{\partial w}{\partial s} + \sup_h L_s(h) w = 0, & t \leq s \leq T, \quad (q, y) \in [0, \infty)^k \times R^N \\ w(T, q, y) = \sum_{i=1}^k q^i, \end{cases}$$

ここで

$$\left\{ \begin{aligned} L_s(h) &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} [\Sigma \Sigma^*(s, y)]^{ij} \frac{\partial^2}{\partial y^i \partial y^j} + \sum_{i,j} q^i [Q^*(s, e_i, y, h) \Sigma(s, y)]^j \frac{\partial^2}{\partial q^i \partial y^j} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j} q^i Q^*(s, e_i, y, h) \Sigma \Sigma^* Q(s, e_j, y, h) q^j \frac{\partial^2}{\partial q^i \partial q^j} \\ &\quad + \sum_i \{ [q^* \Lambda(s)^*]^i - \mu \eta(s, e_i, y, h) q^i \} \frac{\partial}{\partial q^i} \end{aligned} \right.$$

修正 ZAKAI 方程式が有限次元の方程式であることから部分的可観測問題の H-J-B 方程式が (3.9) の形で表されたが、この方程式を解くことは実は容易ではない。そこで、修正 ZAKAI 方程式の解で表された評価関数 (3.7) を Wonham フィルターを用いて表現することにより、問題を完全可観測リスク鋭感的確率制御問題に変換する。

まず、次の条件付確率を導入する。

$$p_t^i = P(X_t = e_i | \tilde{\mathcal{G}}_t), \quad i = 1, \dots, k,$$

また、関数 $f(s, x, y, h)$ on $[0, T] \times E \times R^N \times R^N$ に対して

$$f(s, p_s, y, h) = \sum_{i=1}^k f(s, e_i, y, h) p_s^i,$$

という表記を導入する。この関数は $[0, T] \times \Delta_{k-1} \times R^N \times R^N$ 上の関数となる。ただし Δ_{k-1} は $k-1$ 次元単体

$$\Delta_{k-1} = \{(d_1, d_2, \dots, d_k); d_1 + d_2 + \dots + d_k = 1, 0 \leq d_i \leq 1, i = 1, \dots, k\}.$$

である。 $p_t^i, i = 1, 2, \dots, k$, は次の方程式を満たす Wonham フィルターとして知られている。

$$\begin{aligned} dp_t^i &= (\Lambda(t) p_t)^i dt + p_t^i [G^*(t, e_i, Y_t) - G^*(t, p_t, Y_t)] \\ &\quad \cdot [\Sigma \Sigma^*(t, Y_t)]^{-1} [dY_t - G(t, p_t, Y_t) dt], \end{aligned}$$

すなわち

$$\begin{aligned} dp_t &= \Lambda(t) p_t dt + D(p_t) [G^*(t, Y_t) - \mathbf{1} G^*(t, p_t, Y_t)] \\ (3.10) \quad &\quad \cdot [\Sigma \Sigma^*(t, Y_t)]^{-1} [dY_t - G(t, p_t, Y_t) dt], \end{aligned}$$

ここで $G(t, Y)$ は $G(t, Y) = (G^i(t, e_j, Y))$ で定義される $N \times k$ 行列、また $D(p)$ は ii 対角成分が p^i である対角行列。

$$\begin{aligned} \hat{H}_t &= \exp \left\{ -\mu \int_0^t \eta(s, p_s, Y_s, h_s) ds + \int_0^t Q^*(s, p_s, Y_s, h_s) dY_s \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \int_0^t Q^* \Sigma \Sigma^*(s, Y_s) Q(s, p_s, Y_s, h_s) ds \right\}, \end{aligned}$$

と定義すると

(3.11)

$$\begin{aligned} d(\hat{H}_t p_t^i) &= \hat{H}_t dp_t^i + p_t^i d\hat{H}_t + d\langle \hat{H}, p^i \rangle_t \\ &= (\Lambda(t) \hat{H}_t p_t^i)^i dt - \mu \eta(t, e_i, Y_t, h_t) \hat{H}_t p_t^i dt + \hat{H}_t p_t^i Q^*(t, e_i, Y_t, h_t) dY_t, \end{aligned}$$

となることがわかる. この計算は確率解析の良い演習問題となるので試して見られたい. 従って, (3.8) と (3.11) を比較することにより $q_t^i = \hat{H}_t p_t^i$ となることがわかる. そして,

$$\hat{E}[H_T | \mathcal{G}_T] = \sum_{i=1}^k q_T^i = \hat{H}_T.$$

となり次の命題を得る.

Proposition 3.1

$$J(v; h; T) \equiv \frac{1}{\mu} E[V_T^\mu] = \frac{1}{\mu} v^\mu \hat{E}[H_T] = \frac{1}{\mu} v^\mu \hat{E}[\hat{H}_T].$$

ここで, さらに次の測度変換を施すことにより, この問題が完全可観測リスク鋭感的確率制御問題となっていることが示される.

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\tilde{P}}{dP} \right|_{\tilde{\mathcal{G}}_T} = \zeta_T &= e^{\int_0^T Q^*(s, p_s, Y_s, h_s) dY_s - \frac{1}{2} \int_0^T Q^* \Sigma \Sigma^* Q(s, p_s, Y_s, h_s) ds} \\ &= e^{\int_0^T Q^*(s, p_s, Y_s, h_s) \Sigma(s, Y_s) d\tilde{W}_s - \frac{1}{2} \int_0^T Q^* \Sigma \Sigma^* Q(s, p_s, Y_s, h_s) ds}. \end{aligned}$$

実際, $\tilde{P}$ が確率測度であるためには許容な戦略 $\mathcal{A}(0, T)$ は次を満たさなければならないが

$$\mathcal{A}(0, T) = \left\{ h \in \mathcal{H}(T) \mid \hat{E}\{\zeta_T\} = E\{\rho_T \zeta_T\} = 1 \right\}$$

この $\tilde{P}$ の下で

$$\tilde{W}_t = \int_0^t \Sigma^{-1}(s, Y_s) dY_s - \int_0^t \Sigma^*(s, Y_s) Q(s, p_s, Y_s, h_s) ds$$

は $\tilde{\mathcal{G}}_t$ - 標準ブラウン運動で

$$\begin{aligned} dY_t &= \Sigma(t, Y_t) d\tilde{W}_t + \Sigma \Sigma^*(t, Y_t) Q(t, p_t, Y_t, h_t) dt \\ (3.12) \quad &= \Sigma(t, Y_t) d\tilde{W}_t + \{G(t, p_t, Y_t) + \mu \Sigma \Sigma^*(t, Y_t) h_t\} dt \end{aligned}$$

であり

(3.13)

$$\begin{aligned} dp_t &= D(p_t)[G^*(t, Y_t) - \mathbf{1} G^*(t, p_t, Y_t)][\Sigma \Sigma^*(t, Y_t)]^{-1} \Sigma(t, Y_t) d\tilde{W}_t \\ &\quad + \{\Lambda(t) p_t + \mu D(p_t)[G^*(t, Y_t) - \mathbf{1} G^*(t, p_t, Y_t)] h_t\} dt. \end{aligned}$$

となる.

$$(3.14) \quad \frac{1}{\mu} v^\mu \hat{E}[\hat{H}_T] = \frac{1}{\mu} v^\mu \tilde{E}[\exp\{-\mu \int_0^T \eta(s, p_s, Y_s, h_s) ds\}]$$

であるので, この評価関数 (3.14) を最大にするリスク鋭感的完全可観測確率制御問題に帰着できたというわけである. ここで系過程は上の確率微分方程式 (3.12), (3.13) を満たす (p_t, Y_t) でこれは $\Delta_{k-1} \times R^N$ 上に値をとるものである. ここで $Z := (p, Y)^* \in \Delta_{k-1} \times R^N$ とおき,

$$\beta(s, Z) := (\Lambda(s)p, G(s, p, Y))^*$$

$$\alpha(s, Z) := (D(p)[G^*(s, Y) - \mathbf{1}G^*(s, p, Y)](\Sigma\Sigma^*)^{-1}\Sigma(s, Y), \Sigma(s, Y))^*$$

$$\beta_\mu(s, Z, h) := \beta(s, Z) + \mu\alpha(s, Z)\Sigma^*(s, Y)h$$

とおく.

$$\begin{cases} dZ_s &= \beta_\mu(s, Z_s, h_s)ds + \alpha(s, Z_s)d\tilde{W}_s, \quad s \in [t, T] \\ Z_t &= z \end{cases}$$

この解を制御確率過程とする, 時刻 t から T までの確率制御問題の値関数を

$$w(t, z) = \sup_{\mathcal{A}(t, T)} \log \tilde{E}[e^{-\mu \int_t^T \eta(s, Z_s, h_s) ds}]$$

とすると

$$\sup_{h \in \mathcal{A}(0, T)} J(v; h; T) = \frac{1}{\mu} v^\mu e^{w(0, z_0)}, \quad z_0 = (p_0, \log S_0)$$

となりその H-J-B 方程式は

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{tr}[\alpha\alpha^* D^2 w] + \frac{1}{2} (\nabla w)^* \alpha\alpha^* \nabla w \\ \quad + \sup_h [\beta_\mu(t, z, h)^* \nabla w + \mu\gamma^*(t, z)h - \frac{1}{2}\mu(1-\mu)h^* \Sigma\Sigma^* h] + \mu\tilde{r}(t, z) = 0 \\ w(T, z) = 0 \end{cases}$$

となる. ここで

$$\gamma(t, z) = G(t, p, Y) - \tilde{r}(t, z)\mathbf{1}.$$

これは

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{tr}[\alpha\alpha^* D^2 w] + \frac{1}{2(1-\mu)} (\nabla w)^* \alpha\alpha^* \nabla w + \Phi^* \nabla w + \Psi = 0 \\ w(T, z) = 0 \end{cases}$$

と書き換えられる。ここで

$$\begin{aligned}\Phi(t, z) &:= \beta(t, z) + \frac{\mu}{1-\mu} \alpha(t, z) \Sigma^{-1}(t, z) \gamma^*(t, z) \\ \Psi(t, z) &= \mu R(t, z) + \frac{\mu}{2(1-\mu)} \gamma^*(t, z) (\Sigma \Sigma^*)^{-1}(t, z) \gamma(t, z)\end{aligned}$$

変換：

$$v(t, z) = e^{\frac{1}{1-\mu} w(t, z)}$$

により、上の H-J-B 方程式は

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{tr}[\alpha \alpha^* D^2 v] + \Phi^*(t, z) \nabla v + \frac{\Psi(t, z)}{1-\mu} v = 0 \\ v(T, z) = 1 \end{cases}$$

なる線形の方程式に書き換えられ、さらにその解は Feynman-Kac 表現により、

$$v(t, z) = E_{t,z}[\exp\{\frac{1}{1-\mu} \int_t^T \Psi(s, \bar{Z}_s) ds\}]$$

と書き表される。ここで、

$$\begin{cases} d\bar{Z}_s &= \Phi(s, \bar{Z}_s) ds + \alpha(s, \bar{Z}_s) dW_s \\ \bar{Z}_t &= z \end{cases}$$

こうして、変換された問題の H-J-B 方程式は対数変換を取ることで線形の偏微分方程式に変換されたので、少なくとも可解性、一意性、解の滑らかさを調べることは可能となる。また、その解に対する Feynman-Kac 表現を与えたことで解の確率論的表現を得る。実際にはその数値解法までもが問題にされるので、例えばモンテカルロ法等により具体的な数値解までも求めることになるが、その際この確率論的表現は有用となる。

3.4 取引費用のある場合等

上記では、ポートフォリオの組み換えは連続的にできることを前提とした議論で進めてきた。デリバティブの価格付けにおいても複製戦略のとり方を連続的に行うことができることを前提として議論されている。しかしながら、現実問題としては、ポートフォリオの組み換えは離散時間列で行うのが自然であろう。特に取引費用を考慮した場合には組み替える度に費用が発生するので、そのように定式化する必然性が生じる。そのような場合には、保有資産の枚数 $N^i(t)$, $i = 0, 1, 2, \dots, m$ は区分ごとに定数となる。

議論は簡単のために、Black-Scholes モデルから始めることにする。すなわち、 r, g, σ はすべて定数とする。従って、ファクターは考慮しない。また、 W_t は m 次元ブラウン運動である。このとき、伊藤の公式により、危険資産保有率 $h_t = (h^1(t), h^2(t), \dots, h^m(t))$ は $N(t)$ が定数であるような区間の上で

$$(3.15) \quad dh^i(t) = h^i(t)[e_i^* - h^*(t)][\mu - r\mathbf{1} - \sigma\sigma^*h(t)]dt + h^i(t)[e_i^* - h^*(t)]\sigma dW_t$$

$i = 1, 2, \dots, m$, を満たす. ここで e_i は単位ベクトル $e_i = (e_i^j) = (\delta_{ij})$, $i = 1, 2, \dots, m$. この方程式は

$$dh_t = D(h_t)[E - \mathbf{1}h_t^*][\mu - r\mathbf{1}]dt + D(h_t)[E - \mathbf{1}h_t^*]\sigma dW_t$$

と書ける. ここで $D(h)$ は対角行列:

$$D(h) = \begin{pmatrix} h^1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & h^i & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & h^m \end{pmatrix}$$

で E は単位行列である.

もし, $1 > h^i(0) > 0, i = 0, 1, \dots, m$ ならば $0 < h^1(0) + h^2(0) + \dots + h^m(0) < 1$ であり, (3.15) の解 $h(t)$ は m 次元単体 Δ_m :

$$\Delta_m = \{(h^1, \dots, h^m); h^1 + h^2 + \dots + h^m < 1, 0 < h^i, i = 1, 2, \dots, m\}$$

の上の拡散過程とみなせ, その生成作用素 L は

$$\begin{aligned} Lu(h) &= \frac{1}{2} \text{tr}[D(h)(E - \mathbf{1}h^*)\sigma\sigma^*(E - h\mathbf{1}^*)D(h)\nabla^2 u] \\ &\quad + (\mu - r\mathbf{1} - \sigma\sigma^*h)^*(E - h\mathbf{1}^*)D(h)\nabla u \end{aligned}$$

となる. 要するに, 資産の売買が行われない間は, 危険資産保有率自身が単体上の拡散過程とみなされ, それは, 確率微分方程式 (3.15) の解として定義されるものとなる. そして, 資産の売買 (取引) はその (3.15) の初期条件をそのたびに取り替えることに相当する. 従って, その初期条件を取り替えることを制御と見なして問題を定式化することが妥当なアプローチとなる. すなわち, k 回目の取引時刻を τ_k , 取引後の危険資産保有率を ξ_k とすると $\tau_k \leq t < \tau_{k+1}$ の間では初期条件を ξ_k とした (3.15) の解を考えることになり, ここで, 取引時刻とその直後の危険資産保有率の組の列 (τ_k, ξ_k) , $k = 1, 2, \dots$ を制御と考える衝撃制御問題として定式化されることになる ([63],[46]).

その際, (3.15) で定義される拡散過程が単体 Δ_m 上の拡散過程であることを理解することが重要である. その生成作用素は上の L であるが, 2 階の係数が単体の境界で 2 次の退化が起こっており, 同様に 1 階の係数は 1 次の退化をしている. このような拡散過程は内部から出発するとき, 境界には到達しない. 係数の退化が起こっている場合にはしばしば数学的取り扱いが困難となり, ここでは座標変換を施すことにより, この拡散過程をより分りやすい形に変換することを考える. 次のような変換 ψ を導入する.

$$\begin{aligned} (3.16) \quad y^i &= \psi^i(h^1, h^2, \dots, h^m), \\ &:= \log h^i - \log(1 - h^1 - h^2 - \dots - h^m), \quad i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

その逆写像 φ は

$$\begin{aligned} h^i &= \varphi^i(y^1, y^2, \dots, y^m) \\ &:= \frac{\exp y^i}{1 + \exp y^1 + \exp y^2 + \dots + \exp y^m}, \quad y \in R^m, \end{aligned}$$

でこれは R^m から 単体 Δ_m への微分同相写像である. G^{pq} を 行列 $G := (E - h\mathbf{1}^*)D(h)$ の pq 成分とする. $\det G = h^1 h^2 \dots h^m (1 - h^1 - h^2 - \dots - h^m)$. であることから G は Δ_m の内部で正則で境界でのみ退化していることがわかる. さらに, G は 写像 ψ のヤコビ行列の逆であることがわかる. 実際 $G^{pq} = \delta_{pq} h^p - h^p h^q$, から

$$\sum_j G^{ij} \frac{\partial \psi^k}{\partial h^j} = \delta_{ik}$$

となる. また,

$$\sum_{i,j} G^{ip} \frac{\partial^2 \psi^k}{\partial h^i \partial h^j} G^{qj} = -\delta_{kp} \delta_{qk} + \delta_{qk} h^p + \delta_{kp} h^q.$$

であるから, R^m 上の関数 U に対して

$$u(h^1, h^2, \dots, h^m) = U(\psi^1(h^1, \dots, h^m), \dots, \psi^m(h^1, h^2, \dots, h^m)),$$

とおけば

$$\frac{1}{2} \text{tr}[G \sigma \sigma^* G \nabla^2 u] = \frac{1}{2} \text{tr}[\sigma \sigma^* \nabla^2 U] + \sum_k \{(\sigma \sigma^* h)^k - \frac{1}{2}(\sigma \sigma^*)^{kk}\} \frac{\partial U}{\partial y^k}$$

従って

$$(\mu - r\mathbf{1} - \sigma \sigma^* h)^*(E - h\mathbf{1})D(h)\nabla u = \sum_k (\mu - r\mathbf{1} - \sigma \sigma^* h)^k \frac{\partial U}{\partial y^k}.$$

となり, 結局

$$Lu = \frac{1}{2} \text{tr}[\sigma \sigma^* \nabla^2 U] + \sum_k \{(\mu - r\mathbf{1})^k - \frac{1}{2}(\sigma \sigma^*)^{kk}\} \frac{\partial U}{\partial y^k} \equiv \bar{L}U.$$

を得る. η を

$$\eta(y) = [(\mu - r\mathbf{1}) - d(\sigma \sigma^*)]^*(\sigma \sigma^*)^{-1}y,$$

とおく. ここで $d(\sigma \sigma^*) = (\frac{1}{2}(\sigma \sigma^*)^{11}, \frac{1}{2}(\sigma \sigma^*)^{22}, \dots, \frac{1}{2}(\sigma \sigma^*)^{mm})^*$. $\bar{g}_{ij} = (\sigma \sigma^*)_{ij}^{-1}$ を R^m 上の Riemannian 計量と考えると $\bar{L}$ は

$$(3.17) \quad \bar{L} = \frac{1}{2}\Delta + \text{grad } \eta$$

と表現される. ここで Δ は Laplace-Beltrami 作用素. 座標変換 $(y^1, y^2, \dots, y^m) \mapsto (h^1, h^2, \dots, h^m)$ により Riemannian 計量 $\bar{g}_{ij}$ は

$$g_{ij} = \sum_{k,l} \frac{\partial y^k}{\partial h^i} \frac{\partial y^l}{\partial h^j} \bar{g}_{kl} = ((G^{-1})^*(\sigma\sigma^*)^{-1}G^{-1})_{ij}$$

と変換される. 従って

$$\frac{1}{2}g^{ij} = \frac{1}{2}(G^*\sigma\sigma^*G)^{ij},$$

でこれは L の拡散係数に他ならない. こうして φ によって $(R^m, \bar{g}_{ij})$ を (Δ_m, g_{ij}) に変換されたものと見ることににより, 確率微分方程式 (3.15) で定義された拡散過程 $h(t)$ の生成作用素は

$$L = \frac{1}{2}\Delta + \text{grad } \eta \circ \varphi^{-1}$$

と表される.

一般の場合

ファクターモデルで係数が t によらない場合に一般化しておこう.

$$(3.18) \quad dS^0(t) = r(X_t)S^0(t)dt, \quad S^0(0) = s^0,$$

m 個の危険資産価格は

$$(3.19) \quad \begin{aligned} dS^i(t) &= S^i(t)\{\mu^i(X_t)dt + \sum_{k=1}^{n+m} \sigma_k^i(X_t)d\bar{W}_t^k\}, \\ S^i(0) &= s^i, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

に従うとする. ここで X_t は

$$(3.20) \quad \begin{aligned} dX_t &= \beta(X_t)dt + \lambda(X_t)d\bar{W}_t, \\ X_0 &= x \in R^n. \end{aligned}$$

の解とする. ただし, $\bar{W}_t = (\bar{W}_t^1, \dots, \bar{W}_t^{n+m})$ は $n+m$ 次元標準ブラウン運動. このとき, $N(t)$ が定数となっている範囲で

$$(3.21) \quad \begin{aligned} dh^i(t) &= h^i(t)[e_i^* - h^*(t)][\mu(X_t) - r(X_t)\mathbf{1} - \sigma\sigma^*(X_t)h(t)]dt \\ &\quad + h^i(t)[e_i^* - h^*(t)]\sigma(X_t)dW_t, \quad i = 1, 2, \dots, m, \end{aligned}$$

この場合には, $m+n$ 次元確率過程 $Z(t) = (X(t), h(t))$ とおくと $Z(t)$ は $R^n \times \Delta_m$ 上の拡散過程でその生成作用素 $\mathcal{L}$ は次で定義されるものである.

$$(3.22) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}u &= \frac{1}{2}\text{tr}[\lambda\lambda^*\nabla_x^2 u] + \lambda\sigma^*(E - h\mathbf{1}^*)D(h)\nabla_{hx}^2 u \\ &\quad + \frac{1}{2}\text{tr}[D(h)(E - h\mathbf{1}^*)\sigma\sigma^*(E - h\mathbf{1}^*)D(h)\nabla_h^2 u] \\ &\quad + (\mu - r\mathbf{1} - \sigma\sigma^*h)^*(E - h\mathbf{1}^*)D(h)\nabla_h u + \beta^*\nabla_x u. \end{aligned}$$

上と同じように座標変換 Ψ を以下で定義する.

$$\begin{aligned}\Psi^i(x^1, x^2, \dots, x^n, h^1, \dots, h^m) &= x^i, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ &= \log h^{i-n} - \log(1 - h^1 - \dots - h^m), \quad i = n+1, \dots, n+m.\end{aligned}$$

$y^i = \Psi^{i+n}$, $u = U \circ \Psi$, とおくと

$$[(E - h\mathbf{1}^*)D(h)\nabla_h u]^j = \delta_{jk} \frac{\partial U}{\partial y^k}$$

となり

$$[\lambda\sigma^*(E - h\mathbf{1}^*)D(h)]^{ik} \nabla_{x^i h^k}^2 u = (\lambda\sigma)^{ik} \nabla_{x^i y^k} U.$$

従って

$$\begin{aligned}\mathcal{L}u &= \frac{1}{2}(\lambda\lambda^*)^{ij}(x) \frac{\partial^2 U}{\partial x^i \partial x^j} + (\lambda\sigma^*)^{ik}(x) \frac{\partial^2 U}{\partial x^i \partial y^k} + \frac{1}{2}(\sigma\sigma^*)^{kl}(x) \frac{\partial^2 U}{\partial y^k \partial y^l} \\ &\quad + [(\mu - r\mathbf{1})(x) - d(\sigma\sigma^*)(x)]^k \frac{\partial U}{\partial y^k} + \beta^i(x) \frac{\partial U}{\partial x^i} \equiv \bar{\mathcal{L}}U.\end{aligned}$$

ここで summation convention を用いている. i, j は 1 から n まで k, l は 1 から m まで動く. こうして, $Z(t)$ の代わりに ユークリッド空間 R^{n+m} 上の拡散過程で生成作用素 $\bar{\mathcal{L}}$ とするものを考える.

$$a = \begin{pmatrix} \lambda\lambda^* & \lambda\sigma^* \\ \sigma\lambda^* & \sigma\sigma^* \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} \beta \\ (\mu - r\mathbf{1}) - d(\sigma\sigma^*). \end{pmatrix}$$

このとき, $\bar{\mathcal{L}}$ は

$$\bar{\mathcal{L}}U = \frac{1}{2} \text{tr}[a \nabla^2 U] + \beta^* \nabla U.$$

と表される.

この場合も (3.21) の解を衝撃制御 (τ_k, ξ_k) でつなぎ合わせたものが制御確率過程である確率制御問題となることは言うまでもない ([59]).

References

- [1] R. Bellman, Dynamic programming, Princeton Univ. Press, 1957, (邦訳) ダイナミックプログラミング, 東京図書, 1973.
- [2] A. Bensoussan - J.L. Lions, Applications des Inéquations Variationnelles en Contrôle Stochastique, Dunod, 1978, Contrôle Impulsionnel et Inéquations Quasi Variationnelles, Dunod 1982
- [3] A. Bensoussan, Perturbation methods on optimal control, Gauauthier-villars (1988)

- [4] A. Bensoussan, Stochastic Control of Partially Observable Systems, Cambridge Univ. Press, 1992
- [5] A. Bensoussan - J. Frehse - H. Nagai, Some Results on Risk-Sensitive Control with Full Observation, Appl. Math. Optim., 37(1998),1-41
- [6] A. Bensoussan and H. Nagai, Conditions for no breakdown and Bellmen equations of risk-sensitive control, Appl. Math. Optim., vol. 42 (2000) 91-101
- [7] T.R. Bielecki and S.R. Pliska, *Risk-Sensitive Dynamic Asset Management*, Appl. Math. Optim. vol. 39 (1999) 337-360
- [8] A. Bensoussan and J.H. Van Schuppen, Optimal control of partially observable stochastic systems with an exponential of integral performance index, SIAM J. Control and Optim. vol. 23 (1985) 599-613
- [9] Boel, Rene K., James, Matthew R. and Petersen, Ian R., Robustness and risk-sensitive filtering. IEEE Trans. Automat. Control 47 (2002), no. 3, 451-461.
- [10] P. Brémaud, Point processes and queues, Springer-Verlag (1981)
- [11] P. Briand and H. Y. Hu, BSDE with quadratic growth and unbounded terminal value, Preprint
- [12] R.S. Bucy - R.E. Kalman. New results in linear filtering and prediction theory, J. Basic Engrg. ASME, Ser.D, 83(1961), 95-108
- [13] R.S. Bucy - P.D. Joseph, Filtering for stochastic processes with applications to guidance, Interscience, 1968
- [14] W.H. Fleming - R.W. Rishel, Deterministic and stochastic optimal control, Springer, 1975
- [15] W.H. Fleming - W.M. McEneaney, Risk-sensitive control on an infinite time horizon, SIAM J. Control Optim., 33(1995), 1881-1915
- [16] W.H. Fleming and S.J. Sheu, *Optimal Long Term Growth Rate of Expected Utility of Wealth*, Ann. Appl. Prob. 9(1999)871-903
- [17] W.H. Fleming and S.J. Sheu, *Risk-sensitive control and an optimal investment model*, Mathematical Finance, 10 (2000)197-213
- [18] W.H. Fleming and S.J. Sheu, *Risk-sensitive control and an optimal investment model (II)*, Annals of Prob., 12(2002)730-767
- [19] R. Frey and W.J. Runggaldier, A. nonlinear filtering approach to volatility estimation with a view towards high frequency data, International J. of Theoretical and Applied Finance 4(2001) 199-210
- [20] A. Friedman, Stochastic differential equations, I, II, Academic Press (1975)
- [21] M. Fujisaki - G. Kallianpur - H. Kunita, Stochastic differential equations for the non-linear filtering problem, Osaka J. Math., 9(1972), 19-40

- [22] H. Hata and Iida, A risk-sensitive stochastic control approach to an optimal investment problem with partial information, to appear in Finance and Stochastics
- [23] H. Hata and J. Sekine, Solving long term optimal investment problems with Cox-Ingersoll-Ross interest rates, Advances in Mathematical Economics vol. 8 (2005)231-255
- [24] T. Hayashi and N. Yoshida, On covariance estimation of non-synchronously observed diffusion process, Bernoulli, vol 11(2005) 359-379
- [25] A. Inoue and Y. Nakano, Optimal long term investment model with memory, to appear in Appl. Math. Optim.
- [26] G. Kallianpur, Stochastic filtering theory, Springer, 1980
- [27] M. Kobylanski, Backward stochastic differential equations and partial differential equations with quadratic growth, Ann. Prob. vol. 28(2000) 558-602
- [28] N.V.Krylov, Controlled diffusion processes, Springer, 1980
- [29] N.V. Krylov, Nonlinear Elliptic and Parabolic Equations of the Second Order, D. Reidel, 1987
- [30] H.J. Kushner, On the stochastic maximum principle, fixed time of control, J. Math. Anal. Appl., 11(1965),78-92
- [31] Y. Kifer, Game Options, Finance and Stochastics, vol. 4(2000) 443-463
- [32] 国田寛, 確率過程の推定, 産業図書, 1976.
- [33] H. Kunita and S. Seko, Game call option and their exercise regions, to appear in Finance and Stochastics
- [34] D. Lamberton and B. Lapeyre, Introduction to stochastic calculus applied to finance, Chapman& Hall (1996)
- [35] P.L. Lions, Optimal control of diffusion processes and Hamilton-Jacobi-Bellman equations, I,II, Comm. PDE., 8 (1983), 1101-1134, 1229-1276
- [36] R.Sh. Liptser - A.N. Shiryaev, Statistics of stochastic processes, I, General theory, II, Applications, Springer, 1977-78
- [37] R.C. Merton, An intertemporal capital asset pricing model, Econometrica, vol. 41(1973) 866-887
- [38] 宮原 孝夫, 株価モデルとレヴィ過程, 朝倉書店 (2003)
- [39] A. J. Morton and S. Pliska, Optimal portfolio management with fixed transaction costs, Math. Finance (1995) 337-356
- [40] 長井 英生, 確率微分方程式, 共立出版, 1999
- [41] 長井 英生, 確率制御と数理ファイナンス, 応用数理 vol. 13, No. 4 (2003) 38-53

- [42] 長井 英生, 確率論と制御問題, 数学の楽しみ 8号, 数学セミナー別冊 (1998) 57-68
- [43] H. Nagai, Bellman equation of risk-sensitive control, SIAM J. Control and Optim. vol. 34(1996) 74-101
- [44] H. Nagai, Risk-sensitive portfolio optimization with full and partial information, Adv. Studies in Pure Math., 41 (2004) 257-278
- [45] H. Nagai, Risk-sensitive dynamic asset management with partial information, Stochastics in finite and infinite dimension, Birkhäuser (2000) 321-340
- [46] H. Nagai, Risky fraction processes and problems with transaction costs, Stochastic processes and applications to mathematical finance, World Scientific (2004) 271-288
- [47] H. Nagai and S. Peng, Risk-sensitive dynamic portfolio optimization with partial information on infinite time horizon, Annals of Applied Probability, vol. 12 (2002) 173-195
- [48] K. Kuroda and H. Nagai, Risk-sensitive portfolio optimization on infinite time horizon, Stochastics and Stochastics Reports, vol. 73 (2002) 309-331
- [49] H. Nagai, Optimal strategies for risk-sensitive portfolio optimization problems for general factor models, SIAM J. Control and Optimization, vol. 41(2003) 1779-1800
- [50] H. Nagai, Stopping problems of certain multiplicative functionals and optimal investment with transaction costs, to appear in Appl. Math. Optim.
- [51] H. Nagai and W.J. Runggaldier, PDE approach to utility maximization for market models with hidden Markov factors, Preprint
- [52] M. Nisio, Stochastic Control theory, ISI. Lecture Notes, Macmillan, 1981
- [53] S.V. Pastenikov, On some probabilistic-statistical methods in technical analysis, Theor. Prob. Appl., vol. 49(2005) 1-16
- [54] S. Peng, G-expectation, G-Brownian Motion and Related Stochastic Calculus of It's type, preprint
- [55] S. Peng, Multi-Dimensional G-Brownian Motion and and Related Stochastic Calculus under G- Expectation, preprint
- [56] H. Pham, A large deviation approach to optimal long term investment, Finance and Stochastics, vol. 7 (2003) 169-195
- [57] R. Cont and P. Tankov, Financial Modelling with Jump Processes, Chapman& Hall (2004)
- [58] J. Civitanic, R. Liptser, and B. Rozovskii, A filtering approach to tracking volatility from prices observed at random times, Preprint

- [59] K. Sata, Portfolio management with transaction costs for ICAPM, Master's thesis, Osaka University
- [60] J. Sekine, On a large deviation control for a linear-quadratic model: the complete dual solution, to appear in Proceedings of the 4-th JSIAM-SIMAI meeting
- [61] A.N. Shiriyayev. Optimal stopping rules, Springer, 1980
- [62] P. Snyder, Filtering and detection for doubly stochastic point processes, IEEE Transaction IT-18 (1972) 97-102
- [63] T. Tamura, Maximizing the Growth Rate of a Portfolio with Fixed and Proportional Transaction Costs, To Appear in Appl. Math. Optim.
- [64] M. Sorensen and M. Uchida, Small-diffusion asymptotics for discretely sampled stochastic differential equations, Bernoulli, vol. 9 (2003) 1051-1069
- [65] Y. Umezawa, A Limit Theorem on Maximum Value of Hedging with a Homogeneous Filtered Value Measure, Preprint
- [66] N. Wax, Selected papers on noise and stochastic processes, Dover (1954)
- [67] P. Whittle, Optimal Control: Basics and Beyond, Wiley, 1996

信用リスク・モデルへの応用

中川 秀敏（東京工業大学大学院イノベーションマネジメント研究科）

目 次

1	信用リスク・モデルと確率微分方程式	2
2	構造型アプローチ	3
2.1	Merton モデル	3
2.2	拡張モデル	5
2.2.1	初到達時刻モデル	5
2.2.2	不完全情報モデル	6
3	誘導型アプローチ	7
3.1	累積ハザード関数とハザード・レート	7
3.2	条件付き Poisson 確率時刻	10
3.3	デフォルト可能性のある証券の価格付け	12
4	ポートフォリオに対する信用リスク	14
4.1	ポートフォリオに対する信用リスク評価の例：ファースト・トゥ・デフォルト・スワップ	15
4.2	複数企業に対する構造型モデル	17
4.3	条件付独立デフォルト・モデル	17
4.4	デフォルト伝播モデル	18
4.5	ポートフォリオの損失額モデル	20
	参考文献	22

1 信用リスク・モデルと確率微分方程式

信用リスクとは一言でいえば、お金を借りている相手が約束どおりに返さないリスクのことである。リスクという言葉には、貸したお金を返してもらえない場合の貸した側の「損失の危険性」という意味もあるが、一方で返さない可能性もある相手には相対的に高い金利で利息を要求することが通常であるので、より高い収益を得られる可能性もあるという「収益の不確実性」という意味もこめられている。

お金の借り手としては企業を想定することが多く、その場合は信用リスクといえば、企業が「デフォルト（債務不履行）」するリスク、もっと平たく言えば「倒産」するリスクのことを指す場合が一般的である¹。

また、信用リスク・モデルとは、信用リスクを計量化するために作られるモデルの総称である。信用リスクの計量化の方法としては、デフォルトの可能性をデフォルト確率という形で表現する場合が多いが、他にも格付や点数などで表現するような場合がある。

金融実務の世界では、企業に貸出をするかどうかを決定したり、既に貸出をしている企業の信用リスクを再評価したりする目的のために、主に決算情報に基づいて統計的なアプローチやOR的なアプローチを適用する信用リスク・モデルが利用されている。

一方で、社債やクレジット・デリバティブのように市場取引され、その価値が時間経過とともに変動するような金融商品の価値評価のために、時間変化にともないランダムに変化する対象の動きを記述する道具である確率微分方程式を用いるアプローチを適用する信用リスク・モデルも普及している。

本稿は、信用リスク・モデル特にデフォルト・リスク・モデルのモデル化のアイデアとそれを具体化するための数学的なエッセンスを、確率論に立脚して発展してきた数理ファイナンス理論の立場からできるだけ平易に解説することを目的とする。

数理ファイナンスに基づくデフォルト・リスクのモデルとしては、大きく分けて構造型アプローチ (structural approach) と誘導型アプローチ (reduced-form approach) と呼ばれる2つのアプローチが存在する²。構造型アプローチについては2節で、誘導型アプローチについては3節でそれぞれ詳しく述べる。

また、複数の企業をまとめた信用ポートフォリオに対する信用リスク・モデルの研究も非常に盛んである。この場合、個々の企業の信用リスク・モデルだけでなく、信用リスクの依存関係をどのように記述するかが重要となる。

4節では、確率微分方程式に関係する信用リスクの依存関係のモデルをいくつか紹介するとともに、依存関係のモデル化には理論的に難しい側面があることにも言及したい。

なお、もっと詳しく信用リスク・モデルを学習したいという人のために、筆者が参考にしたことがあるものに限るが、信用リスク・モデルに関するテキストをいくつか挙げておく：Ammann [1], Bielecki-Rutkowski [2], Bluhm et al. [4], Duffie-Singleton [8], Lando [23], McNeil et al. [29], Schmid [32], Schönbucher [33], 木島・小守林 [18], 楠岡・青沼・中川 [21]。

ここで挙げたテキストは必ずしも確率微分方程式に基づくモデルの解説に注力したものばかりで

¹広い意味では、格付を下げられて、社債の市場価格が下落するようなリスクも信用リスクに含まれる。

²最初にこのような分類に接したのはいつだったかよく覚えていないが、Duffie のペーパーでそのように分類していたのを見たのが最初の気がする。

はなく、静的なアプローチを詳しく説明しているもの、信用リスク以外のリスクの計量化についても取り上げているもの、実務的な視点で書かれているものなどテキストの性格は様々である。ただ、信用リスクの計量化に対する多彩なアプローチをさらに複眼的に見ることは、信用リスク・モデルをより深く理解するのにきつと役に立つであろう。また、小林 [19], 中川 [31] は本稿と似たような視点で信用リスク・モデルについての解説を行っている。

なお、本稿作成の際には McNeil et al. [29] の 8 章と 9 章を参考にした。本稿の一部は同書を簡潔にまとめた内容になっていることをお断りしておく。

2 構造型アプローチ

企業の財務構造に目を向け、企業価値（あるいはデフォルトに深く関連するファクター）をモデル化し、デフォルトという事象を「企業価値（あるいはファクター）がある水準を下回る事象」のように明示的に定義し、その事象の起こる確率をデフォルト確率としてとらえるアプローチを、一般的に「構造型アプローチ (structural approach)」(あるいは企業価値アプローチ (firm-value approach) やオプション型アプローチ (option-based approach) など) と呼ばれる。

2.1 Merton モデル

構造型アプローチの原型は、Merton [28] が企業の資産価値を Black-Scholes モデルと呼ばれる一般化された幾何ブラウン運動で表現し、債務の返済時点において資産価値が負債を下回っている状況をデフォルトと規定するモデルである。

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を完備な確率空間とする。 $(W_t)_{t \in [0, \infty)}$ をこの確率空間上で定義された標準ブラウン運動とし、このブラウン運動が生成するフィルトレーションを $\mathcal{F}_t := \sigma\{W_s : s \leq t\}$ とする（以後、本稿ではフィルトレーションは右連続かつ完備化されたものと見なす）。

時点 t における企業価値を表す確率過程を V_t と表す。 V_t は次の確率微分方程式を満たすとする。

$$dV_t = V_t \{\mu dt + \sigma dW_t\}, \quad (1)$$

$$V_0 > 0. \text{ a.s} \quad (2)$$

ただし、 $\mu \in \mathbf{R}, \sigma > 0$ は定数とする。

(1) 式の解 V_t は

$$V_t = V_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right) \quad (3)$$

と明示的に表せる。

この企業は 1 単位の株式（時点 t での価値を S_t で表す）と 1 単位の割引債（時点 t での価値を D_t で表す）で資金調達していると仮定する。割引債の総額面を $D > 0$ 、返済期日を $T > 0$ とする。この企業は株式の配当支払は行わず、新たな資金調達も行わないとする。

また、税金や取引費用はいっさいかからないと仮定する。

このとき、企業価値と、株式および割引債の価値の間には

$$V_t = S_t + D_t \quad 0 \leq t \leq T$$

という関係があると仮定される。

デフォルト事象は、負債の返済期日 T において債務超過となる事象、すなわち $\{V_T < D\} (= \{\omega \in \Omega | V_T(\omega) < D\})$ という事象で表すことにする。(もちろん、実際の企業の負債構造はもっと複雑であるし、 $V_T < D$ という状態だからといって自動的に企業がデフォルトになるわけでもなく、 $V_T < D$ でなくてもデフォルトする企業もあることに注意。)

このような設定の下で割引債の満期時点 T における株式および割引債の価値を表すと次のようになる：

$$S_T = \max\{V_T - D, 0\} =: (V_T - D)^+ \quad (4)$$

$$D_T = \min\{V_T, D\} =: D - (D - V_T)^+ \quad (5)$$

$$(6)$$

すなわち、株式を保有することは、企業価値を原資産、割引債額面を行使価格とするヨーロピアン・コール・オプションの買い持ちポジション (long position) であると見なすことができ、割引債は同じ原資産、行使価格のヨーロピアン・プット・オプションの売り持ちポジション (short position) であると見なすことができる。

企業価値 V_t の変動が (1) 式のように Black-Scholes モデルにおける危険資産と同じ確率微分方程式で表されているので、時点 t における株式価値 S_t および割引債の価値 D_t は、Black-Scholes の公式を用いて表すことができる。 r を無リスクの利子率とすると、

$$S_t = V_t \Phi(d_{1,t}) - D e^{-r(T-t)} \Phi(d_{2,t}) \quad (7)$$

$$D_t = D e^{-r(T-t)} - \{D e^{-r(T-t)} \Phi(-d_{2,t}) - V_t \Phi(-d_{1,t})\} \quad (8)$$

と表される。ただし、

$$d_{1,t} := \frac{\log \frac{V_t}{D} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}, \quad d_{2,t} := d_{1,t} - \sigma \sqrt{T-t}$$

であり、 $\Phi(x)$ は標準正規分布関数

$$\Phi(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy$$

とする。

また、デフォルト確率は (3) 式から

$$\begin{aligned} P(V_T < D) &= P\left(V_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma W_T\right) < D\right) \\ &= P\left(W_T < -\frac{\log \frac{V_0}{D} + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma}\right) \\ &= \Phi\left(-\frac{\log \frac{V_0}{D} + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma \sqrt{T}}\right) \end{aligned}$$

と表すことができる。

次に、この企業の発行している割引社債の利回りと同じ満期をもつデフォルト可能性のない安全な割引債の利回りの差（信用スプレッドなどと呼ばれる）を計算してみる。 $P_0(t, T)$ を、額面が1で満期が T であるデフォルト可能性のない安全な割引債の時点 t での価格、 $P_1(t, T)$ を割引社債の単位額面あたりの時点 t での価格とする。

このとき、求めたい信用スプレッドを $c(t, T)$ で表すと

$$c(t, T) := -\frac{1}{T-t} \log \frac{P_1(t, T)}{P_0(t, T)} \quad (9)$$

と定義される。いま、 $P_0(t, T) = e^{-r(T-t)}$, $P_1(t, T) = D_t/D$ であるので

$$c(t, T) = \frac{1}{T-t} \log \left(\Phi(d_{2,t}) + \frac{V_t}{De^{-r(T-t)}} \Phi(-d_{1,t}) \right) \quad (10)$$

と表される。

$$d_{1,t} = \frac{\log \frac{V_t}{De^{-r(T-t)}} + \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

と書けることに注意すると、Merton モデルにおける信用スプレッドは、企業価値のボラティリティ σ と（時価ベースの）他人資本比率 $\frac{De^{-r(T-t)}}{V_t}$ と満期までの時間 $T-t$ で決まることが分かる。

この信用スプレッドの性質として $T-t \rightarrow 0$ のとき、 $c(t, T) \rightarrow 0$ となることが挙げられるが、このようなことは実際の社債市場の信用スプレッドでは観測されず、現実には合わないことが指摘されている。

2.2 拡張モデル

Merton モデルが、理想的な仮定の下で理論的に非常に美しい結論が得られるモデルであることを認める一方で、その仮定や結果が現実と整合しないということも事実である。

主な不整合点として以下の2つが挙げられる。

- Merton モデルではデフォルトが負債の満期時点でしか起こらないという設定になっているが、実際は負債満期前にデフォルトすることがある。
- Merton モデルの結果から求められるクレジット・スプレッドは満期までの時間が短くなるにつれて0に収束していくが、実際の市場データでは0に近づいていかない。

前者への対応としては、初到達時刻 (first-passage time) モデルという形でなされ、さらに後者への対応としては不完全情報 (incomplete information) モデルと呼ばれる拡張モデルが解決策の一つになっている。

2.2.1 初到達時刻モデル

デフォルトが負債の返済期日にしか起こらない定式化になっている Merton のアイデアを一般化して、「企業価値」（厳密に何を指しているかはとりあえず問題にしないことにする）を確率過程で

記述し、その企業価値が前もって定められたデフォルト境界を下回った時点をデフォルト時点とするモデルが考案され、一般に初到達時刻モデルなどと呼ばれる。

この種のモデルとしては例えば、Black-Cox [3], Longstaff-Schwartz [27] などが挙げられる。また、狭い意味での初到達時刻モデルには当たらないが、株主が株主価値を最大化するような最適な企業の清算時刻を決めるというコーポレートファイナンス視点のモデルから、帰結として企業の清算時刻が初到達時刻モデルのように表現できることを示した研究に、Leland [25], Leland-Toft [26] などがある³。

Black-Cox [3] のモデルについて簡単に触れておく。企業価値 V_t を (1) 式で与え、デフォルト境界を $D(t) = D_0 e^{bt}$ ($0 < D_0 < D, b > 0$) という曲線で与え、デフォルト時刻を

$$\tau := \inf\{t > 0 : V_t \leq D(t)\} \quad (11)$$

で定義する。($\inf \emptyset = +\infty$ としておく。)

このモデルでは、デフォルト確率の問題は τ の分布 $P(\tau \leq t)$ を知る問題に帰着される。数学的には、確率過程のある領域への初到達時刻の分布の問題であり、標準ブラウン運動の鏡像原理 (reflection principle) を利用することで

$$P(\tau \leq t) = \Phi\left(\frac{-\log \frac{V_0}{D_0} - (\mu - b - \frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma\sqrt{t}}\right) - \left(\frac{V_0}{D_0}\right)^{1-\frac{2\mu+b}{\sigma^2}} \Phi\left(\frac{-\log \frac{V_0}{D_0} + (\mu - b - \frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \quad (12)$$

という結果が得られる。

他にも、デフォルト境界を定数で与えるモデルや、確率過程で与えるものなどがある。また企業価値についても、平均回帰性を取り入れたモデルやジャンプを導入したモデルなどがある。様々な初到達時刻モデルについては、例えば Bielecki-Rutkowski [2] に詳しく書かれている。

いずれにしても、このような初到達時刻モデルの多くは、企業価値およびデフォルト境界が常に観測できることを前提としており、デフォルトの発生がその直前には予測できてしまうような定式化のモデルが多い。このような場合は、 τ がフィルトレーション $(\mathcal{F}_t)$ に関して可予測 (predictable) な停止時刻となる、すなわち、ある $(\mathcal{F}_t)$ -停止時刻の増大列 $\{\tau_n\}_{n=1,2,\dots}$ で $\tau_n \uparrow \tau$ a.s. となるものが存在することが言える。

2.2.2 不完全情報モデル

上で見てきたような初到達時刻モデルでは暗に「企業価値」または「デフォルト境界」が常に観測できると仮定していた。しかしながら、それはデフォルト直前になればデフォルト直前であることが分かってしまう設定であるので、一般の市場参加者のデフォルトに対する感覚からすると自然な状況であるとは言いがたい。

このような側面を改善する方向として、企業価値またはデフォルト境界が完全には観測できない設定、すなわち不完全な情報に基づく構造型モデルの研究も多くなってきている。例えば、Duffie-Lando [6], Kusuoka [20], Nakagawa [30], Song [34] は企業価値が所与のフィルトレーションに適合しない状況を考えている。また、Giesecke-Goldberg [10], [11] ではデフォルト境界の方が完全には観測できないモデルを提案している。

³彼らの研究では、デフォルト境界に相当するものは外性的でなくモデルから内性的に求められる。

ここでは詳細を省くが、不完全情報の設定のもとでデフォルト時刻を初到達時刻として定義すると、そのデフォルト時刻は所与のフィルトレーションについて停止時刻にならない。また、所与のフィルトレーションにそのデフォルト時刻自身から生成されるフィルトレーションを加えた最小のフィルトレーションに対しては停止時刻にはなるが、可予測な停止時刻にはならない。

このようなとき、デフォルト時刻の条件付き分布は、次節で説明する誘導型アプローチで重要な概念である「ハザード・レート」を用いて特徴づけることができることが知られている。

このことは、考え方も数学的な性質も対照的である構造型アプローチと誘導型アプローチが、構造型モデルの一種である初到達時刻モデルを不完全情報の枠組みで考えることで関係づけられることを示唆しており、少なくとも筆者にとってはデフォルト・リスクの不完全情報モデルは非常に興味深い研究テーマである。

3 誘導型アプローチ

デフォルト・リスク・モデルのもう一方のタイプである誘導型アプローチ (reduced-form approach) は、デフォルト時点 τ の分布を、対象となる企業の財務状況などとは直接関係なく、外性的に与えてしまうという立場である。構造型アプローチとは異なり、デフォルト発生事由を明示しないため、企業外部の観測者にとってはデフォルトは事前に発生時点を予測できない事象としてとらえられることになる。しかし、社債やクレジット・デリバティブの市場価格データを主な情報源とする実務家にとっては、以下で見るようにリスク中立評価法との整合がとりやすい誘導型アプローチのモデルの方が取り扱いやすい側面がある。

誘導型アプローチに関する初期の著名な論文としては、Duffie-Singleton [7], Jarrow et al. [12], Jarrow-Turnbull [13], Lando [23] が挙げられる。また、一般論は Bielecki-Rutkowski [2], Jeanblanc-Rutkowski [15], Kusuoka [20], McNeil et al. [29] などに詳しくまとめられている。

最近では、前節の構造型と本節の誘導型の両方の側面を取り入れたハイブリッド・モデルとでも言うべきモデルも提案されてきている。例えば Cathcart-El-Jahel [5] のモデルなどがある。

また、「格付」の時間変化にともなう推移をモデル化したものも、広い意味で誘導型モデルに位置づけられる。「デフォルト状態」も格付けの1つと見なすことで、ある期間内に各格付からデフォルト状態への推移確率をデフォルト確率として算出する。最も単純なものは Markov 連鎖をベースにした、格付推移行列を明示的に与えるモデルである。格付推移モデルは本稿では詳しく取り扱わないが、基本的なことは Jarrow et al. [12], Kijima-Komoribayashi [17]などを参照していただきたい。

なお、この節で取り上げた定義や命題等は基本的に McNeil et al. [29] の 9.2 節のものをまとめたものになっている。証明等は同書を参照していただきたい。

3.1 累積ハザード関数とハザード・レート

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を完備な確率空間とする。また、デフォルト時刻 τ をこの空間上の確率時刻 ($[0, \infty)$ -値の確率変数) として与え、その分布関数を $F(t) := P(\tau \leq t)$ とおく。また、 $\bar{F}(t) = 1 - F(t) (= P(\tau > t))$ とおくことにする。

分布関数については

$$P(\tau = 0) = F(0) = 0, \quad \bar{F}(t) > 0 \quad \forall t < \infty.$$

を仮定する。

さらにデフォルトが起きていなければ 0、デフォルトしていれば 1 を与えるデフォルト計数過程 $N_t := 1_{\{\tau \leq t\}}$ を導入する。

次に、いくつかのフィルトレーションを導入する。

まず、 $\mathcal{F}_t$ というフィルトレーションを導入する。これは時点 t までに投資家が市場で入手できるデフォルト以外の情報であると想定する。また、 $\mathcal{F}_\infty := \bigvee_{t \geq 0} \mathcal{F}_t$ とする。

デフォルトに関する情報は、 $\mathcal{H}_t := \sigma\{N_s; s \leq t\}$ というフィルトレーションで表すことにする。これより、 τ は $(\mathcal{F}_t)$ -停止時刻とは仮定されないが、 $(\mathcal{H}_t)$ -停止時刻となる。

さらに、 $\mathcal{G}_t := \mathcal{F}_t \vee \mathcal{H}_t$ として新たなフィルトレーション $(\mathcal{G}_t)$ を定義する。これはデフォルト発生有無の情報も含む投資家の得られる情報と考えることができる。

定義 1. $\Gamma(t) := -\log \bar{F}(t)$ を τ の累積ハザード関数 (*cumulative hazard function*) と呼ぶ。また、 τ の分布関数 F が絶対連続で密度関数 f をもつとき、 $\gamma(t) := \frac{f(t)}{\bar{F}(t)}$ を τ のハザード・レート (*hazard rate*) と呼ぶ。

上の定義から、

$$F(t) = 1 - e^{-\Gamma(t)}, \quad \Gamma(t) = \int_0^t \gamma(s) ds$$

がすぐに分かる。

「ハザード・レート」という用語はもともと

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} P(\tau \leq t + h | \tau > t)$$

という極限で特徴づけられるものである。

いまの設定では

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} P(\tau \leq t + h | \tau > t) = \frac{1}{\bar{F}(t)} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)} = \gamma(t)$$

となることから、 $\gamma(t)$ が本来の意味で「ハザード・レート」であることが確かめられる。

また、このことは先にハザード・レートを与えることで τ の分布関数 F を特徴づけることができることを示唆している。

以下では、デフォルトの有無によって支払が変わるような条件付き請求権の価格付けに必要な数学的結果を眺めていくことにする。

補題 1. H を $\mathcal{H}_t$ -可測な確率変数とすると、 H はある可測関数 $h: [0, t] \rightarrow \mathbf{R}$ とある定数 c を用いて

$$H = h(\tau)N_t + c(1 - N_t)$$

と表すことができる。

命題 1. X を可積分な確率変数とする。任意の $t \geq 0$ に対して、

$$E[(1 - N_t)X | \mathcal{H}_t] = (1 - N_t) \frac{E[X(1 - N_t)]}{P(\tau > t)}$$

が成り立つ。

特に、 $X = 1 - N_s (s > t)$ のときは

$$P(\tau > s | \mathcal{H}_t) = (1 - N_t) \frac{\bar{F}(s)}{\bar{F}(t)}$$

となる。

命題 2. デフォルト時刻 τ がハザード・レート関数 $\gamma(t)$ をもつとする。このとき、

$$M_t := N_t - \int_0^t (1 - N_s) \gamma(s) ds$$

で定義される M_t は $(\mathcal{H}_t)$ -マルチンゲールとなる。

これまでは累積ハザード関数およびハザード・レートが確定的な場合を扱ってきたが、これらが確率的に変動する場合にも拡張できる。

デフォルト時刻 τ を $P(\tau > 0) = 1$ を満たす $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ 上の確率時刻とし、 $F_t := P(\tau \leq t | \mathcal{F}_t)$, $\bar{F}_t = 1 - F_t (= P(\tau > t | \mathcal{F}_t))$ とおく (確率過程であることを意識して、 $F(t)$ という表記から F_t のような表記に変えている)。

定義 2. 任意の $t \geq 0$ に対して $F_t < 1$ であると仮定する。

このとき $\Gamma_t := -\log \bar{F}_t$ を τ の $(\mathcal{F}_t)$ -条件付き累積ハザード過程と呼ぶ。また、ある正値の $(\mathcal{F}_t)$ -適合過程 γ_t が存在して、

$$\Gamma_t = \int_0^t \gamma_s ds \text{ a.s.}$$

であるとき、 γ_t を τ の $(\mathcal{F}_t)$ -条件付きハザード・レート過程と呼ぶ。

このとき、補題 1, 命題 1 にそれぞれ対応する結果として次が得られる。

補題 2. 任意の $\mathcal{G}_t$ -可測な確率変数 X に対して、ある $\mathcal{F}_t$ -可測な確率変数 Y が存在して

$$X(1 - N_t) = Y(1 - N_t)$$

が成り立つ。

命題 3. X を可積分な確率変数とする。任意の $t \geq 0$ に対して、

$$E[(1 - N_t)X | \mathcal{G}_t] = (1 - N_t) \frac{E[X(1 - N_t) | \mathcal{F}_t]}{P(\tau > t | \mathcal{F}_t)}$$

が成り立つ。

この命題の直接の系として、以下の結果が得られる。この結果を一般化したものが、デフォルト可能性のある社債やクレジット・デリバティブの評価に応用される。

命題 4. $s > t$ とする。 X を可積分で $\mathcal{F}_s$ -可測な確率変数とする。このとき、

$$E[(1 - N_s)X | \mathcal{G}_t] = (1 - N_t)E[Xe^{-\{\Gamma_s - \Gamma_t\}} | \mathcal{F}_t]$$

が成り立つ。特に $X = 1$ とすると

$$P(\tau > t | \mathcal{G}_t) = (1 - N_t)E[e^{-\{\Gamma_s - \Gamma_t\}} | \mathcal{F}_t]$$

となる。

3.2 条件付き Poisson 確率時刻

次に、条件付き Poisson 確率時刻 (conditional Poisson random time)⁴ について、その定義と性質についてまとめる。デフォルト時刻が条件付き Poisson 確率時刻であれば、数学的に非常に扱いやすいが、そうでないときは微妙な問題が生じるについて見ていく。

定義 3. 確率時刻 τ が $(\mathcal{F}_t)$ -条件付き Poisson 確率時刻であるとは、次の条件を満たすときにいう：

- τ が $(\mathcal{F}_t)$ -条件付きハザード・レート過程 γ_t をもつ
- $\Gamma_t = \int_0^t \gamma_s ds$ が t について狭義単調増加
- 任意の $t \geq 0$ に対して、 $P(\tau \leq t | \mathcal{F}_\infty) = P(\tau \leq t | \mathcal{F}_t)$ が成り立つ

次の結果は条件付き Poisson 確率時刻を具体的に構成する方法を示している。

補題 3. E をパラメータ 1 の指数分布に従い、 $\mathcal{F}_\infty$ と独立な確率変数とする：

$$P(E \leq t | \mathcal{F}_\infty) = 1 - e^{-t}$$

また、 γ_t を正值の $(\mathcal{F}_t)$ -適合過程で

$$\Gamma_t = \int_0^t \gamma_s ds$$

で定義される Γ_t が任意の $t \geq 0$ で狭義単調増加で有限であるとする、

$$\tau := \Gamma^{-1}(E) = \inf\{t \geq 0 | \Gamma_t \geq E\}$$

で定義される τ は γ_t を $(\mathcal{F}_t)$ -条件付きハザード・レート過程にもつ $(\mathcal{F}_t)$ -条件付き Poisson 確率時刻となる。

また、上の補題の逆の命題も示される

⁴Doubly stochastic random time あるいは Cox random time などとも呼ばれる。いずれもそのハザード・レートが確率過程で与えられている確率時刻という意味合いで名付けられたものだが、筆者はあまりこのような呼び方は好まない。

補題 4. τ を $(\mathcal{F}_t)$ -条件付きハザード・レート過程 γ_t をもつ $(\mathcal{F}_t)$ -条件付き *Poisson* 確率時刻とする。また、 $\Gamma_t = \int_0^t \gamma_s ds$ を τ の累積ハザード過程とし、 $E := \gamma_\tau$ と確率変数 E を定義すると、 E はパラメータ 1 の指数分布に従い、 $\mathcal{F}_\infty$ と独立な確率変数となり、 $\tau = \gamma^{-1}(E)$ が成り立つ。

ここで、命題 2 に対応する結果を述べる。

命題 5. デフォルト時刻 τ を $(\mathcal{F}_t)$ -条件付きハザード・レート過程 γ_t をもつ $(\mathcal{F}_t)$ -条件付き *Poisson* 確率時刻とする。このとき、

$$M_t := N_t - \int_0^t (1 - N_s) \gamma_s ds$$

で定義される M_t は $(\mathcal{G}_t)$ -マルチンゲールとなる。

ここで「もう一つのハザード・レート」の特徴付けについて触れておく。

定義 4. 非負値 $(\mathcal{G}_t)$ -適過程 λ_t が τ の $(\mathcal{G}_t)$ -マルチンゲール強度過程（信用リスクの場合には、デフォルト強度過程と呼ばれる）であるとは、

$$M_t = N_t - \int_0^t (1 - N_s) \lambda_s ds \quad (13)$$

で定義される M_t が $(\mathcal{G}_t)$ -マルチンゲールになるときにいう。

セミ・マルチンゲールの分解の一意性により、 λ_t は $\{\tau < t\}$ 上で一意に定義されることが知られている。また、実際に λ_t は $\{\tau < t\}$ 上でのみ意味をもつため、 $(\mathcal{F}_t)$ -適合（あるいは一般には $(\mathcal{F}_t)$ -可予測）であるとする場合が多い。

また、命題 5 と定義 4 から、デフォルト時刻 τ が $(\mathcal{F}_t)$ -条件付きハザード・レート過程 γ_t をもつ $(\mathcal{F}_t)$ -条件付き *Poisson* 確率時刻であるときには、 $\lambda_t = \gamma_t$ すなわち $(\mathcal{G}_t)$ -デフォルト強度過程が、 $(\mathcal{F}_t)$ -条件付きハザード・レート過程で与えられることが分かる。

条件付きハザード・レート過程は、企業の生存確率が時間とともに、どの程度減少していくかを表す定量的な指標と解釈できるため、どちらかといえば直観的にも理解しやすい概念である。それに対し、デフォルト強度過程は、セミ・マルチンゲールの分解（あるいは劣マルチンゲールの Doob-Meyer 分解）から派生しているもので、直観的には意味をつかみにくいかもしれない。しかし、Kusuoka [20] での議論などからも分かるように、一般論を構築するためにはマルチンゲール強度過程を「ハザード・レート」と見なす方が有用である。

実務的には、条件付きハザード・レート過程を先に具体的に与えて、 τ の分布を特徴づけることが一般的である。条件付きハザード・レート過程の例としては、短期金利のモデルとしても利用される Cox-Ingersoll-Ross(CIR) モデル：

$$d\gamma_t = a(b - \gamma_t)dt + \sigma\sqrt{\gamma_t}dW_t \quad (a, b, \sigma > 0) \quad (14)$$

などが考えられる。確率微分方程式 (14) には、任意の実数 $\bar{\gamma} \geq 0$ に対して $\gamma_0 = \bar{\gamma}$ とする非負値で連続な強解が存在することが知られている。

条件付きハザード・レート過程として CIR モデル (14) を用いると、条件付き生存確率は

$$P(\tau > T | \mathcal{G}_t) = (1 - N_t) e^{\phi(T-t) + \gamma_t \psi(T-t)}$$

と表される⁵ (Schmid [32] Example 2.3.8 を参照)。ただし、

$$\begin{aligned}\phi(s) &:= \frac{2ab}{\sigma^2} \log\left(\frac{2ze^{\frac{(a+z)s}{2}}}{2z + (a+z)(e^{zs} - 1)}\right) \\ \psi(s) &:= -\frac{2(e^{zs} - 1)}{2z + (a+z)(e^{zs} - 1)} \\ z &:= \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}\end{aligned}$$

とする。

また、Vasicek モデル：

$$d\gamma_t = a(b - \gamma_t)dt + \sigma dW_t \quad (a, b, \sigma > 0) \quad (15)$$

は、正の確率で負の値をとるので理論上は条件付きハザード・レート過程として適用できないが、

$$\gamma_t = e^{-at}\gamma_0 + (1 - e^{-at})b + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{au} dW_u$$

という一意の解をもち、このことから γ_t は正規分布に従うことがわかるように、計算しやすいという理由から近似的に利用する場合もある。

Vasicek モデルに対する条件付き生存確率は形式的に

$$P(\tau > T | \mathcal{G}_t) = (1 - N_t) e^{\tilde{\phi}(T-t) + \gamma_t \tilde{\psi}(T-t)}$$

と表される⁶ (Schmid [32] Example 2.3.5 を参照)。ただし、

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}(s) &:= \left(b - \frac{\sigma^2}{2a^2}\right)(\psi(s) - s) - \frac{\sigma^2}{4a}\psi(s)^2 \\ \tilde{\psi}(s) &:= -\frac{1}{a}(1 - e^{-as})\end{aligned}$$

とする。

CIR モデルも Vasicek モデルも「アフィンモデル (affine models)」と呼ばれるクラスに含まれる⁷ (アフィンモデルについては、例えば McNeil [29] 9.5 節を参照してほしい)。

3.3 デフォルト可能性のある証券の価格付け

ここでは、リスク中立確率測度 Q が存在し、 Q の下でデフォルト時刻 τ は $(\mathcal{F}_t)$ -条件付きハザード・レート過程 γ_t をもつ $(\mathcal{F}_t)$ -条件付き Poisson 確率時刻になると仮定しておく。

⁵ P をリスク中立確率、 γ_t を無リスクの短期金利だと見なすと、右辺の式は満期 T のデフォルト可能性のない割引値の時点 t での価格を表す。

⁶ 左辺は「確率」を表すにもかかわらず、右辺は 1 を超えるという不合理なことも起こりうる。この場合もまた、 P をリスク中立確率、 γ_t を無リスクの短期金利だと見なすと、右辺の式は満期 T のデフォルト可能性のない割引値の時点 t での価格を表す。

⁷ アフィンモデルにおける生存確率の計算は、最終的に Ricatti 方程式の計算に帰着される。

また、 r_t を無リスク金利を表す $(\mathcal{F}_t)$ -適合過程とする。

価格付けの対象となる基本的な証券のパターンは次の 2 つに集約される。複雑なクレジット・デリバティブであっても、この 2 つのパターンの組合せで表せる場合が多い。

1. **Vulnerable claim:** デフォルトしていなければ時点 T で $\mathcal{F}_T$ -可測な確率変数 X が支払われ、デフォルトしていれば支払ゼロの証券。すなわち支払が $X(1 - N_T)$ で表されるもの
2. **Recovery payment:** デフォルトした時点 τ で $(\mathcal{F}_t)$ -適合過程 Z_τ が支払われる証券。すなわち支払が $Z_\tau N_T$ で表されるもの

次の定理が社債やクレジット・デリバティブの評価に本質的な結果である。

定理 1. $R_s = r_s + \gamma_s$ とおく。また、

$$\exp\left(-\int_t^T r_s ds\right) |X|, \int_t^T |Z_s \gamma_s| \exp\left(-\int_t^s R_u du\right) ds$$

とともに Q の下で可積分と仮定する。このとき、次が成り立つ

$$E^Q\left[\exp\left(-\int_t^T r_s ds\right) X(1 - N_T) \middle| \mathcal{G}_t\right] = (1 - N_t) E^Q\left[\exp\left(-\int_t^T R_s ds\right) X \middle| \mathcal{F}_t\right], \quad (16)$$

$$E^Q\left[\int_t^T \exp\left(-\int_t^s r_u du\right) Z_s dN_s \middle| \mathcal{G}_t\right] = (1 - N_t) E^Q\left[\int_t^T Z_s \gamma_s \exp\left(-\int_t^s R_u du\right) ds \middle| \mathcal{F}_t\right] \quad (17)$$

定理の応用例として、Duffie-Singleton [7] モデルに基づくデフォルト可能性のある割引債の評価を紹介する。

ある企業の割引社債が額面 1、満期 T で発行されているとする。満期 T までにデフォルトしなければ額面の 1 を受けとることができるが、 T 以前に発行企業がデフォルトした場合には、この割引社債のデフォルト直前の市場価格 $\times (1 - l_\tau)$ だけが、デフォルトした τ 時点で回収できるものとする。ここで、 l_t はデフォルト時の（デフォルト直前の市場価格に対する）損失率を表す $[0, 1]$ -値の $(\mathcal{F}_t)$ -適合過程とする（ $1 - l_\tau$ のことを「（デフォルト直前の市場価格に対する）回収率」と呼ぶ）。

また、デフォルト時刻 τ を $(\mathcal{F}_t)$ -条件付きハザード・レート過程 γ_t をもつ $(\mathcal{F}_t)$ -条件付き Poisson 確率時刻と仮定する。

このとき、上記の割引社債の時点 t における理論価格を $V(t, T)$ とすると

$$V(t, T) = E^Q\left[\exp\left(-\int_t^T r_u du\right) (1 - N_T) + \int_t^T \exp\left(-\int_t^s r_u du\right) (1 - l_s) V(s-, T) dN_s \middle| \mathcal{G}_t\right]$$

という積分方程式を満たすことがわかる。

この積分方程式を解き、上の定理を適当に用いると

$$V(t, T) = (1 - N_t) E^Q\left[\exp\left(-\int_t^T \{r_u + l_u \gamma_u\} du\right) \middle| \mathcal{F}_t\right] \quad (18)$$

と表すことができる（(18) 式の詳細な導出の過程は、楠岡・青沼・中川 [21] の付録に述べられている）。

ここで、(18) 式で与えられる割引社債価格に対して瞬間的な信用スプレッドを求めてみる。一般的な信用スプレッド $c(t, T)$ は (9) 式で与えられたことに注意し、瞬間的な信用スプレッドを

$$c(t) := \lim_{T \downarrow t} c(t, T)$$

で定義すると、 $\{\tau > t\}$ 上で

$$\begin{aligned} c(t) &= -\left\{ \frac{\partial \log V(t, T)}{\partial T} \Big|_{T=t} - \frac{\partial \log P_0(t, T)}{\partial T} \Big|_{T=t} \right\} \\ &= -\left\{ \frac{\partial V(t, T)}{\partial T} \Big|_{T=t} - \frac{\partial P_0(t, T)}{\partial T} \Big|_{T=t} \right\} \\ &= r_t + l_t \gamma_t - r_t = l_t \gamma_t \end{aligned} \quad (19)$$

と表される。これは瞬間的な信用スプレッドが

デフォルト直前の社債価格に対する損失率 $\times$ ハザード率

という形で表現されていること意味している。

また、2.1 節の最後に触れた Merton モデルの場合とは異なり、満期に近づくにつれて信用スプレッドが 0 に収束するというものもない。

ただし、デフォルト可能性のない安全な割引債の価格は

$$P_0(t, T) = E^Q \left[\exp \left(- \int_t^T r_u du \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] \quad (20)$$

で与えられるものとした。

(19) 式は、Duffie-Singleton [7] モデルにおいては、(デフォルト直前の市場価格に対する) 回収率 (あるいは損失率) を所与とすれば、社債市場から得られる信用スプレッドのデータからハザード・レートを含むパラメータを推定することが可能となり、その結果をクレジット・デリバティブのような他の信用リスク商品の評価に利用することができることを示唆している。

ただし、社債価格から計算されるハザード・レートは、リスク中立確率 Q に関するものであり、現実の確率測度 P の下でのハザード・レートやデフォルト確率ではないため、現実的に観測される実際のデフォルト率と単純に比較したりすることはできないので注意が必要である。

また、Kusuoka [20] では、 $(\mathcal{F}_t)$ を弱ブラウン・フィルトレーションとする設定 (スタンダード・モデルと呼んでいる) において、確率測度の変換がハザード・レートに与える影響について厳密な議論をしており、確率測度の変換がある場合は、定理 1 のような等号関係は一般に成立しないことに言及している。

4 ポートフォリオに対する信用リスク

これまでは単一企業に対する信用リスク計量モデルについて説明してきたが、実際の銀行では少なくとも数百以上の企業に対する与信を行っており、そうした与信ポートフォリオ全体に対してデフォルトや信用毀損による損失可能性がどのくらいあるかをリスクとして考慮する必要がある。また、ク

レジット・デリバティブの世界でも、バスケット型 CDS(credit default swap) や CDO(collateralized debt obligation) と呼ばれる複数の企業の信用リスクを対象とした商品の取引が急増してきており、やはりポートフォリオに対する信用リスク計測が重要になっている。

4.1 ポートフォリオに対する信用リスク評価の例：ファースト・トゥ・デフォルト・スワップ

ここでは、複数の社債をまとめた「バスケット」に対して、最初にデフォルトした社債について回収できなかった分をその社債を発行している企業の代わりに第三者が補填するという契約で、ファースト・トゥ・デフォルト・スワップ (first-to-default swap, 以下では FDS と略す) と呼ばれるクレジット・デリバティブを例に挙げて、ポートフォリオに対する信用リスク評価のポイントや難しさを見ていく。

FDS の買い手にとっては、例えば保有する社債ポートフォリオの信用リスクを部分的に第三者 (FDS の売り手) に移転することが可能であるが、問題となるのはデフォルトが発生したときに保証してもらえる対価として、どの程度プレミアム (保険料に相当する金額) を契約相手に払うのが適正かという問題である。

異なる m 個の割引社債 (額面 1、満期 T) からなるバスケットを考える。 $\tau^1, \dots, \tau^m$ をそれぞれの債券のデフォルト時点とする。また、 $\tau_{\min} := \min\{\tau^1, \dots, \tau^m\}$ とする。

また各債券のデフォルト時の (額面に対する) 損失率は、それぞれ定数 $L^i \in [0, 1] (i = 1, \dots, m)$ で与えるものとする。

このとき、FDS の買い手 (プレミアムの支払い側) は、満期前に最初のデフォルトが発生したときの損失分を FDS の売り手から支払ってもらえるので、FDS の買い手にとっての受取額の現在価値 V_0 は、リスク中立確率 Q を用いて

$$V_0^{\text{buyer}} := E^Q \left[\exp \left(- \int_0^{\tau_{\min}} r_u du \right) \sum_{i=1}^m (1 - L^i) 1_{\{\tau_{\min} = \tau^i \leq T\}} \right] \quad (21)$$

と表される。

一方で FDS の売り手 (プレミアムの受取り側) は、最初のデフォルトが発生するまで (デフォルトが発生しなければ時点 T まで) 連続的に一定のプレミアム c を受け取るものとする、その現在価値は

$$V_0^{\text{seller}} := E^Q \left[\int_0^{\tau_{\min} \wedge T} \exp \left(- \int_0^t r_u du \right) c dt \right] \quad (22)$$

と表される。

このとき、各 τ^i が Q の下でハザード・レート関数 $\gamma^i(t)$ をもつとすると、

$$Q(\tau^i > t) = \exp \left(- \int_0^t \gamma^i(u) du \right)$$

と表せる。

さらに $\tau^1, \dots, \tau^m$ が独立とすると

$$\begin{aligned} Q(\tau_{\min} > t) &= Q(\tau^1 > t, \dots, \tau^m > t) = \prod_{i=1}^m Q(\tau^i > t) \\ &= \prod_{i=1}^m \exp\left(-\int_0^t \gamma^i(u) du\right) \\ &= \exp\left(-\int_0^t \sum_{i=1}^m \gamma^i(u) du\right) \end{aligned}$$

と表せる。このことは、 $\tau_{\min}$ が $\sum_{i=1}^m \gamma^i(u)$ をハザード・レート関数として持つことを意味する。

以上の仮定のもとで、定理 1 などから

$$\begin{aligned} V_0^{\text{buyer}} &= \sum_{i=1}^m (1 - L^i) \int_0^T \gamma^i(t) \exp\left(-\int_0^t \sum_{i=1}^m \gamma^i(u) du\right) P_0(0, t) dt \\ V_0^{\text{seller}} &= c \int_0^T \exp\left(-\int_0^t \sum_{i=1}^m \gamma^i(u) du\right) P_0(0, t) dt \end{aligned}$$

と表せることがわかる。 $P_0(0, T)$ は (20) 式で与えられるデフォルト・リスクのない割引債価格。

この FDS に対するプレミアム c は $V_0^{\text{buyer}} = V_0^{\text{seller}}$ となるように決まり、

$$c = \frac{\sum_{i=1}^m (1 - L^i) \int_0^T \gamma^i(t) \exp\left(-\int_0^t \sum_{i=1}^m \gamma^i(u) du\right) P_0(0, t) dt}{\int_0^T \exp\left(-\int_0^t \sum_{i=1}^m \gamma^i(u) du\right) P_0(0, t) dt} \quad (23)$$

という形で得られる。

しかし、現実にはデフォルト時刻が独立であるという仮定は強すぎると考えられるし、ハザード・レート関数ではなく、より一般にハザード・レート過程でモデル化したいという要請もある。ただし、独立性を仮定しない場合は計算が面倒になるし、複数のハザード・レート過程を扱う場合は数学的な取り扱いに注意が必要になってくる。

また、最初のデフォルトではなく、2 番目以降に起こるデフォルト損失に対する弁済を行う契約などもある。この場合、最初のデフォルトによって、バスケットの残りのデフォルト確率が影響を受けることを考慮すると、一段とモデル化が複雑になることは言うまでもない。

また、現実には 1 社だけの信用リスクを考える場合でも、他の企業との関連性を無視して計量化することも現実的でない。対象企業の主要取引先が先にデフォルトした場合、それ以降の対象企業の信用力にどのような影響が現れるかを考えることは非常に重要である。したがって、信用リスク計測の問題は根本的にポートフォリオに対する信用リスク計測という枠組みで考えることが重要になってきている。

ポートフォリオに対する信用リスクをモデル化するために最も重要なことは、信用リスクの依存構造をどのようにモデル化するかという点である。デフォルトの依存関係のことを単に「デフォルト相関」と表現する場合もあるが、連鎖倒産のような事象をモデル化するためには単なる相関よりも複雑な依存構造を考慮する必要がある。

しかしながら、現実にはデフォルト事象自体の観測が少なく、ましてやデフォルトの依存関係の有無を把握することは極めて難しいといえる。そのため、理論的に有望な信用リスクの依存構造モデルを構築しても、それを実用化する段階で非常に多くの課題があることも注意しておきたい。

Bielecki-Rutkowski [2], Lando [23], McNeil et al. [29], Schönbucher [33] などに、具体的なデフォルトの依存関係のモデルがいくつか紹介されている。

以降では、McNeil et al. [29] の 9.6 節および 9.8 節の中から、デフォルト・リスクの依存関係を表現するいくつかのモデルを紹介する。また最後に、ポートフォリオ全体のデフォルト損失のリスク評価のモデルについても言及する。

4.2 複数企業に対する構造型モデル

まず構造型モデルについて、最も簡単な依存構造モデルを考える。

いま、 m 個の企業があると考え、時点 t における各社の企業価値を $V_t^i (i = 1, \dots, m)$ とし、

$$dV_t^i = V_t^i \left\{ \mu_i dt + \sigma_i dW_t^i \right\}, \quad i = 1, \dots, m \quad (24)$$

という確率微分方程式に従うとする。ただし、 μ_i, σ_i は定数とし、 $W^1, \dots, W^m$ は一次元ブラウン運動で、 $\text{Cov}(W_t^i, W_t^j) = \rho_{ij}t$, $\rho_{ij} \in (-1, 1)$ ($i, j = 1, \dots, m$) を満たすものとする。

この ρ_{ij} は、企業 i と企業 j のリターン、すなわち $\log \frac{V_t^i}{V_0^i}$ と $\log \frac{V_t^j}{V_0^j}$ の相関を表しており、両社の企業価値変化の依存構造を表現していると見なせる。企業資産を企業価値と見なす場合もあるが、その意味でこのように定義される相関係数を「アセット相関 (asset correlation)」と呼ぶことがある⁸。

ここで、 $\tau^i := \inf\{t > 0 | V_t^i \leq D^i\}$ で、企業 i のデフォルト時刻 τ^i を定義する。ただし、 $D^i \in (0, V_0^i)$ は企業 i のデフォルト閾値を表す定数とする。

この場合、同時デフォルト確率 $P(\tau^1 \leq t, \dots, \tau^m \leq t)$ は

$$\begin{aligned} & P(\tau^1 \leq t, \dots, \tau^m \leq t) \\ &= P\left(Z^1 \leq -\frac{\log \frac{V_0^1}{D^1} + (\mu_1 - \frac{\sigma_1^2}{2})}{\sigma_1 \sqrt{t}}, \dots, Z^m \leq -\frac{\log \frac{V_0^m}{D^m} + (\mu_m - \frac{\sigma_m^2}{2})}{\sigma_m \sqrt{t}}\right) \end{aligned}$$

と計算できる。ただし、 $(Z^1, \dots, Z^m)$ はゼロベクトルを平均ベクトル、アセット相関を成分にもつ行列 $\{\rho_{ij}\}_{i,j=1,\dots,m}$ を共分散行列とする m 次元正規分布に従う確率変数である。

4.3 条件付独立デフォルト・モデル

次に、誘導型モデルの単純な依存構造のモデル化手法として、条件付独立デフォルトのモデルを紹介する。

まず $\{\mathcal{F}_t\}$ というフィルトレーションが与えられているとする。このフィルトレーションには、デフォルト発生の有無に関する直接的な情報は含まれないと暗に仮定する。

⁸資産相関に対して、(ある時点までの) 企業 i と企業 j のデフォルト事象発生についての相関関係を

$$\rho_{ij}^D(t) := \frac{P(\tau^i \leq t, \tau^j \leq t) - P(\tau^i \leq t)P(\tau^j \leq t)}{\sqrt{P(\tau^i \leq t)(1 - P(\tau^i \leq t))} \sqrt{P(\tau^j \leq t)(1 - P(\tau^j \leq t))}}$$

で定義したものを「デフォルト相関 (default correlation)」と呼ぶ。

いま、 m 個の企業があると考え、 $\tau^i (i = 1, \dots, m)$ を企業 i のデフォルト時刻を表す確率時刻とする。

$N_t^i := 1_{\{\tau^i \leq t\}}$ とおき、各社のデフォルト情報を表すフィルトレーションを $\mathcal{H}_t^i := \sigma\{N_s^i; s \leq t\}$ と定め、さらに

$$\mathcal{H}_t := \mathcal{H}_t^1 \vee \dots \vee \mathcal{H}_t^m, \quad \mathcal{G}_t := \mathcal{F}_t \vee \mathcal{H}_t$$

とする。

定義 5. $\tau^i (i = 1, \dots, m)$ が $(\mathcal{F}_t)$ -条件付独立な *Poisson* 確率時刻であるとは、次の 2 条件を満たすときに言う。

(1) $\tau^i (i = 1, \dots, m)$ はそれぞれ、定義 3 の意味で $(\mathcal{F}_t)$ -ハザード・レート過程 γ_t^i をもつ $(\mathcal{F}_t)$ -条件付き *Poisson* 確率時刻である。

(2) $\tau^1, \dots, \tau^m$ は $(\mathcal{F}_\infty)$ -条件付独立である。すなわち、

$$P(\tau^1 \leq t_1, \dots, \tau^m \leq t_m | \mathcal{F}_\infty) = \prod_{i=1}^m P(\tau^i \leq t_i | \mathcal{F}_\infty) \quad \text{for any } t_1, \dots, t_m > 0 \quad (25)$$

条件付独立な *Poisson* 確率時刻に対しては、次の命題が成り立つ。

命題 6. $\tau^i (i = 1, \dots, m)$ を、それぞれ $(\mathcal{F}_t)$ -ハザード・レート過程 γ_t^i をもつ $(\mathcal{F}_t)$ -条件付き *Poisson* 確率時刻とするとき、

$$M_t^i := N_t^i - \int_0^t (1 - N_s^i) \gamma_s^i ds \quad (26)$$

は、 $(\mathcal{G}_t)$ -マルチンゲールである。

また、 $\mathcal{F}_T \vee \mathcal{H}_T^i$ -可測な（次の条件付期待値が定義できる）確率変数 H^i に対して、次が成り立つ。

$$E^Q \left[\exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) H^i \middle| \mathcal{F}_t \vee \mathcal{H}_t^i \right] = E^Q \left[\exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) H^i \middle| \mathcal{G}_t \right]. \quad (27)$$

この命題のポイントは、 M_t^i が $(\mathcal{F}_t \vee \mathcal{H}_t^i)$ -マルチンゲールであることは、1 企業の場合の結果である命題 5 から明らかであるのに対し、 $(\mathcal{F}_t \vee \mathcal{H}_t^i)$ を真に含むフィルトレーションである $(\mathcal{G}_t)$ に対してもマルチンゲールになっていることである。

4.4 デフォルト伝播モデル

今度は、誘導型モデルにおいて、ある企業のデフォルトがその後の他の企業の条件付きデフォルト確率に影響を及ぼす状況を表現する、デフォルト伝播 (default contagion) モデルを紹介する。

基本的な設定は条件付独立モデルと同じとする。

$0 = T_0 < T_1 < \dots < T_m$ を順序つきのデフォルト時刻とする。すなわち

$$T_n := \min\{\tau^j : \tau^j > T_{n-1}, 1 \leq j \leq m\}, \quad n = 1, \dots, m \quad (28)$$

である（同時デフォルトは確率0と仮定する）。また、 $\xi_n \in \{1, \dots, m\}$ を T_n でデフォルトした企業のインデックスとする。

このとき、デフォルト情報を表すフィルトレーション $\mathcal{H}_t$ は順序つきデフォルト時刻とデフォルト企業のインデックスを用いると

$$\mathcal{H}_t = \sigma\{(T_j, \xi_j); T_j \leq t\}, \quad \mathcal{H}_{T_n} = \sigma\{(T_j, \xi_j); j = 1, \dots, n\}, \quad n \leq m$$

と表現することができることに注意。

以下の結果が成り立つ

定理 2. $\tau^1, \dots, \tau^m$ をデフォルト時刻とする。任意の $n = 0, 1, \dots, m-1$ および $i = 1, \dots, m$ に対して、ある $\mathcal{H}_{T_n} \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}_+)$ -可測な写像 $g_i^{(n)} : \Omega \times \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ が存在して、

$$P(T_{n+1} - T_n \leq s, \xi_{n+1} = i | \mathcal{H}_{T_n})(\omega) = \int_0^s g_i^{(n)}(\omega, u) du, \quad 1 \leq i \leq m \quad (29)$$

が成り立つと仮定する。

このとき、

$$\lambda_t^i(\omega) := \frac{g_i^{(n)}(\omega, t - T_n)}{P(T_{n+1} > t | \mathcal{H}_{T_n})(\omega)}, \quad T_n < t \leq T_{n+1} \quad (30)$$

とおくと、

$$N_t^i - \int_0^t (1 - N_s^i) \lambda_s^i ds \quad (31)$$

は $(\mathcal{H}_t)$ -マルチンゲールになる。すなわち、 λ_t^i は N_t^i の $(\mathcal{H}_t)$ -マルチンゲール強度過程となる。

ここで、マルチンゲール強度過程 λ_t^i とハザード・レート過程 γ_t^i の関係に注意をしておく。両者はそれぞれ、

$$\begin{aligned} \lambda_t^i &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} P(\tau^i \leq t + h | \tau^i > t, \mathcal{H}_t) \\ \gamma_t^i &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} P(\tau^i \leq t + h | \tau^i > t) \end{aligned}$$

と表現される。条件付独立のような強い仮定がなければ一般には、 $\lambda_t^i \neq \gamma_t^i$ となる。

実際にデフォルト伝播モデルを適用するときには、各企業のマルチンゲール強度過程を具体的に与えることになる。例えば、企業 i のマルチンゲール強度が、別の企業 j がデフォルトしていなければ $a_0^i(>0)$ で、企業 j がデフォルトしていれば $a_0^i + a_1^i(>0)$ となるような状況を考えると、

$$\lambda_t^i = a_0^i + a_1^i N_t^j$$

のように与えられる。

また、一般には、観測可能なファクター過程 $\mathbf{F}_t$ および $\mathbf{N}_t := (N_t^1, \dots, N_t^m)$ の関数として、 $\lambda_t^i = \lambda^i(\mathbf{F}_t, \mathbf{N}_t)$ のような形でモデル化することが考えられる

しかしながら、上記のような場合は、一般に $\lambda_t^i \neq \gamma_t^i$ であるため (27) 式のような等号関係が一般に成り立たない。すなわち、 $\mathcal{F}_T \vee \mathcal{H}_T^i$ -可測な (次の条件付期待値が定義できる) 確率変数 H^i に対して、

$$E^Q \left[\exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) H^i \middle| \mathcal{F}_t \vee \mathcal{H}_t^i \right] \neq E^Q \left[\exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) H^i \middle| \mathcal{G}_t \right]$$

となりうる。このことは、他の企業との依存性の情報を用いるかどうかで単一企業に対するクレジット・デリバティブの価値評価にも違いが出てくることを示している。

4.5 ポートフォリオの損失額モデル

クレジット・デリバティブの価値評価以外のポートフォリオの信用リスク計測の主要な目的の一つとして、ある期間内にどの程度のデフォルト損失額を被る可能性があるのかを定量的に把握することが挙げられる。

いま暗に (市場性のない) 銀行の貸出ポートフォリオを想定して、時点 T までのデフォルトによる損失リスクを評価したいとする。 L^i ($i = 1, \dots, m$) を非負値の確率変数とし、各企業のデフォルト時に銀行が被る損失額を表すものとする。各企業のデフォルト時損失額 L^i のモデルとしては、残存する負債の元本と、売却などで回収可能な資産価値を考慮する場合が多い⁹。

これまでと同様に、各企業のデフォルト計数過程を N_t^i と表すと、時点 T までのポートフォリオ全体の損失額は $\sum_{i=1}^m L^i N_T^i$ と表される。

ここで、 $\alpha \in (0, 1)$ に対して (一般には $\alpha = 0.95$ あるいは $\alpha = 0.99$ が用いられる)、

$$\text{VaR}_\alpha = \inf \{ c > 0 \mid P \left(- \sum_{i=1}^m L^i N_T^i + c < 0 \right) \leq 1 - \alpha \}$$

で定義される VaR_α を信頼水準 α の信用 VaR (Value at Risk) などと呼ぶ。VaR は金融リスク管理の実務において、非常に普及しているリスク尺度の一つである。

要するに、 VaR_α さえ手元資金があれば、累積の信用損失額をその手元資金でも埋め合わせできない確率は $1 - \alpha$ 以下におさえられるということを意味する。見方を変えれば、 VaR_α さえ手元資金があれば、確率 α で累積の信用損失額を手元資金で埋め合わせできるということになる。

あるいは VaR 以上の損失が発生したという条件下での平均損失額である

$$\text{ES}_\alpha = E \left[\sum_{i=1}^m L^i N_T^i \middle| \sum_{i=1}^m L^i N_T^i \geq \text{VaR}_\alpha \right]$$

をリスク尺度として計算することもある。この ES_α を信頼水準 α の期待ショートフォール (expected shortfall) (あるいは conditional VaR, C-VaR) などと呼ぶ。定義から $\text{ES}_\alpha \geq \text{VaR}_\alpha$ であることがわかり、その意味で期待ショートフォールの方が VaR よりも保守的なリスク量と言える¹⁰。

⁹特に、負債元本に対する回収可能な割合 (回収率) の不確実性をモデル化する場合が多く、いわゆる回収率 (あるいは損失率) モデルの研究が最近になって増えてきている (例えば金子・中川 [16] は企業の貸借対照表を用いた回収率モデルを提案した)。しかしながら、利用できるデータの質的および量的両面の限界もあり、数理的なアプローチに基づく回収率モデルの研究は発展途上の段階である。

¹⁰また coherent risk measure の観点からも VaR より期待ショートフォールの方が望ましいという議論もある。coherent risk measure の詳細については、例えば McNeil et al. [29] の第 6 章などを参照してほしい。

VaR_α や ES_α の計算は、最近ではモンテカルロ・シミュレーションで行うことが一般的になっている。ただし、モンテカルロ・シミュレーションによる期待ショートフォールの計算は効率性の点で問題があるため、分散減少法を用いたサンプリングの工夫などがされている。

参考文献

- [1] Ammann, E., Credit risk valuation: methods, models, and applications, 2nd. ed., Springer, Springer Finance, 2002.
- [2] Bielecki, T. and Rutkowski, M., Credit risk: modeling, valuation and hedging, Springer, Springer Finance, 2002.
- [3] Black, F. and Cox, J., Valuing corporate securities: some effects of bond indenture provisions, *Journal of Finance*, **31** (1976), 351-367.
- [4] Bluhm, C., Overbeck, L., and Wagner, C., An introduction to credit risk modeling, Chapman and Hall, CRC Financial Mathematics Series, 2002.
- [5] Cathcart, L. and El-Jahel, L., Pricing defaultable bonds: a middle-way approach between structural and reduced-form models, *Quantitative Finance*, **6** (2006), 243-253.
- [6] Duffie, D. and Lando, D., Term structure of credit spreads with incomplete accounting information, *Econometrica*, **69** (2001), 633-664.
- [7] Duffie, D. and Singleton, K., Modeling term structures of defaultable bonds, *Reviews of Financial Studies*, **12** (1999), 687-720.
- [8] Duffie, D. and Singleton, K., Credit risk: pricing, measurement, and management, Princeton University Press, 2003.
- [9] Elliott, R. L., Jeanblanc, M. and Yor, M., On models of default risk, *Math. Finance*, **10** (2000), 179-195.
- [10] Giesecke, K. and Goldberg, L. R., Forecasting default in the face of uncertainty, *Journal of Derivatives*, **12** (2004), 14-25.
- [11] Giesecke, K. and Goldberg, L. R., The market price of credit risk, Working paper (2003).
- [12] Jarrow, R. A., Lando, D. and Turnbull, S. M., A Markov model for the term structure of credit risk spread, *Review of Financial Studies*, **10** (1997), 481-523.
- [13] Jarrow, R. A. and Turnbull, S. M., Pricing derivatives on financial securities subject to credit risk, *Journal of Finance*, **50** (1995), 53-86.
- [14] Jeanblanc, M. and Rutkowski, M., Modelling of default risk: an overview, *Mathematical Finance: Theory and Practice*, Higher Education Press, Beijing, (2000), 171-269.
- [15] Jeanblanc, M. and Rutkowski, M., Modelling of default risk: mathematical tools, Working paper (2000).
- [16] 金子拓也・中川秀敏, B/S を利用した回収率とそれに基づく貸出債権の適正プライシング・モデル, 日本応用数理学会論文誌第 16 巻第 3 号 (2006) 掲載予定.

- [17] Kijima, M. and Komoribayashi, K., A Markov chain model for valuing credit risk derivatives, *Journal of Derivatives*, **6** (1998), 97-108.
- [18] 木島正明・小守林克哉, 信用リスク評価の数理モデル, 朝倉書店, シリーズ現代金融工学, 1999.
- [19] 小林孝雄, 信用リスク・モデル化のアプローチ, 証券アナリストジャーナル, 2004年3月号(2004), 73-90.
- [20] Kusuoka, S., A remark on default risk models, *Adv. Math. Econ.*, **1** (1999), 69-82.
- [21] 楠岡成雄・青沼君明・中川秀敏, クレジット・リスク・モデル, 金融財政事情研究会, 2001.
- [22] Lando, D., On Cox processes and credit risk securities, *Review of Derivative Research*, **2** (1998), 99-120.
- [23] Lando, D., *Credit risk modeling: theory and applications*, Princeton, Series in Finance, 2004.
- [24] Leblanc, B., Renault, O., and Scaillet, O., A correction note on the first passage time of an Ornstein-Uhlenbeck process to a boundary, *Finance Stoch.*, **4** (2000), 109-111.
- [25] Leland, H. E., Corporate debt value, bond covenants, and optimal capital structure, *Journal of Finance*, **49** (1994), 157-196.
- [26] Leland, H. E. and Toft, K., Optimal capital structure, endogenous bankruptcy, and the term structure of credit spreads, *Journal of Finance*, **51** (1996), 987-1019.
- [27] Longstaff, F. and Schwartz, E., A simple approach to valuing risky fixed and floating rate debt, *Journal of Finance*, **50** (1995), 789-819.
- [28] Merton, R. C., On the pricing of corporate debt - The risk structure of interest rates, *Journal of Finance*, **29** (1974), 449-470.
- [29] McNeil, A. J., Frey, R. and Embrechts, P., *Quantitative Risk Management*, Princeton, 2005.
- [30] Nakagawa, H., A filtering model on default risk, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*, **8** (2001), 107-142.
- [31] 中川秀敏, 信用リスク計量のための数理モデル, 日本数学会「数学」**58**(2006)に掲載予定.
- [32] Schmid, B., *Credit Risk Pricing Models 2nd. ed.: Theory and Practice*, Springer, Springer Finance, 2004.
- [33] Schönbucher, P., *Credit derivatives pricing models: models, pricing and implementation*, Wiley, UK, 2003.
- [34] Song, S., A remark on a result of Duffie and Lando, Working paper (1998).

動的ポートフォリオ最適化に纏わる問題

関根 順

ABSTRACT. 連続時間で定義・構成される金融市場の確率的モデルを導入する。不規則 (ランダム) に推移する (ように見える) 資産価格変動を記述するために、確率微分方程式を用いる。その上で動的に (刻々と) 売買を行う投資家を考え、最適投資問題を扱う。古典的結果に加え、様々な一般化・分岐の紹介を試み、更に (無限) 長期間最適投資問題に関する結果をいくつか紹介する。

CONTENTS

1. 序	1
1.1. Black-Scholes 型モデル	1
1.2. 動的な自己資金調達の運用	5
1.3. 期待冪効用最大化：古典的結果	8
1.4. 一般化：分岐	10
2. “線形-二次” モデルによる長期間最適ポートフォリオ	13
2.1. “線形-二次” ファクターモデル	13
2.2. リスク鋭感的ポートフォリオ最適化	16
2.3. 動的計画アプローチ	17
2.4. 諸結果	19
References	21

1. 序

Figure 1 は近年 10 年程の日経平均株価の (日次で刻んだ) 時系列図である。近年、価格変動は一層激しく複雑になっており (秒刻みで売買の行われるマーケットも出現してきている)、インサイダーのような特別な情報を持たない限り、未来の証券価格を予測することは、ごく近い未来であってすら困難であると思われる。このような金融市場の価格過程をモデル化するのに、確率微分方程式 (Stochastic Differential Equation, 以下 SDE と略記) はしばしば用いられる。

本章では、まず、最も単純/基本的な連続時間 (Black-Scholes 型) 金融市場モデルを導入する。次にこの上で期待効用最大化による最適投資問題を論じる。そして、Merton による古典的な結果の紹介に続き、様々な研究の一般化・分岐の紹介を試みる。

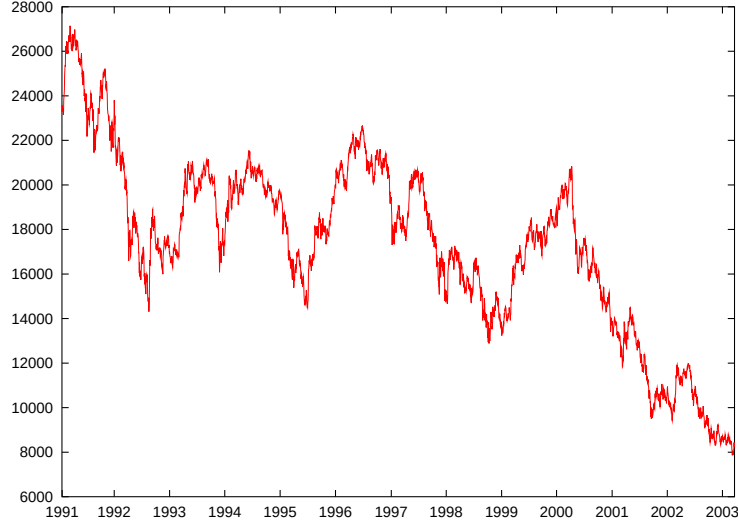
1.1. Black-Scholes 型モデル. 以下に金融市場の数理モデルを構成してゆく：

Date: July 25, 2006.

日本応用数理学会サマーセミナー「確率微分方程式」(2006 年 9 月 11-13 日, 於北海道大学) 講演資料。この度の講演の機会を設定してくださったオーガナイザーの方々に感謝致します。.

執筆はチューリッヒ・スイス連邦工科大学 (ETH. Zurich) 滞在中に行いました。この場を借りて快適な滞在とてなしに感謝致します。.

FIGURE 1. 日経平均株価の時系列



1. 銀行預金などの安全な運用を表す過程 (bank account process) $B := (B_t)_{t \geq 0}$ が一つあるとする。ただし

$$dB_t = B_t r_t dt, \quad B_0 = 1$$

なる常微分方程式を満たすものとする。すなわち

$$B_t := e^{\int_0^t r_u du}.$$

ここで r は $[0, \infty) \ni t \mapsto r_t \in \mathbb{R}$ なる有界な決定的関数。 r_t は時刻 t に於ける瞬間的な利子率を表す。 B は、時刻 0 に元手額 1 を銀行に預金したときどのように額が推移してゆくかを表している過程であると解釈される。預金には極短い期間 $[t, t + \delta]$ で

$$B_{t+\delta} - B_t \approx B_t r_t \delta,$$

利息が $B_t r_t \delta$ (確実に) 付いてゆくわけである。 r を短期金利過程 (instantaneous spot rate process) などと呼ぶ。

2. 危険資産 (risky asset; 具体的には株式、為替 etc.) が n -個存在するとし、その 1 単位あたりの価格推移を表す確率過程を

$$S^i := (S_t^i)_{t \geq 0}, \quad i = 1, \dots, n$$

で表す。更にこれは SDE を用いて以下の様に与えられているとする: 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, その上で定義されている d -次元 Brown 運動 $w := (w^1, \dots, w^d)'$, $w^i := (w_t^i)_{t \geq 0}$ ($(\cdot)'$ はベクトル・行列の転置を表すとする) 及びこの Brown 運動から生成されるフィルトレーション $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$,

$$\mathcal{F}_t := \sigma(w_u; u \in [0, t])$$

を用意する。この上で価格過程を

$$(1.1) \quad dS_t^i = S_t^i \left(\mu_t^i dt + \sum_{j=1}^d \sigma_t^{ij} dw_t^j \right), \quad S_0^i > 0$$

で与える。あるいは

$$S_t := (S_t^1, \dots, S_t^n)'$$

と記して

$$dS_t = \text{diag}(S_t) (\mu_t dt + \sigma_t dw_t), \quad S_0 \in (0, \infty)^n.$$

ただし

$$\begin{aligned} \mu &:= (\mu^1, \dots, \mu^n)' : [0, \infty) \ni t \mapsto \mu_t \in \mathbb{R}^n, \\ \sigma &:= (\sigma^{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq d}} : [0, \infty) \ni t \mapsto \sigma_t \in \mathbb{R}^{n \times d} \end{aligned}$$

は有界決定的な過程であるとし、記法：

$$\sigma_t dw_t = \begin{pmatrix} \sigma_t^{11} & \dots & \sigma_t^{1d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_t^{n1} & \dots & \sigma_t^{nd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dw_t^1 \\ \vdots \\ dw_t^d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^d \sigma_t^{1k} dw_t^k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^d \sigma_t^{nk} dw_t^k \end{pmatrix}$$

を用い、 $\text{diag}(x)$ はベクトル x の i -成分を対角成分 (i, i) に持つ対角行列を表すものとする。

さて、SDE (1.1) を解いてみる。 $S^i > 0$ が成立していると仮定し、 $\log(S_t^i)$ に伊藤の公式を適用してみる：

$$\begin{aligned} \log(S_t^i) &= \log(S_0^i) + \int_0^t \frac{dS_u^i}{S_u^i} - \frac{1}{2} \int_0^t \frac{d\langle S^i \rangle_u}{(S_u^i)^2} \\ &= \log(S_0^i) + \int_0^t \left(\mu_u^i - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d (\sigma_u^{ij})^2 \right) du + \sum_{j=1}^d \int_0^t \sigma_u^{ij} dw_u^j. \end{aligned}$$

すなわち

$$(1.2) \quad S_t^i = S_0^i \exp \left[\int_0^t \left(\mu_u^i - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d (\sigma_u^{ij})^2 \right) du + \sum_{j=1}^d \int_0^t \sigma_u^{ij} dw_u^j \right].$$

実は (1.2) が (1.1) の明示的解表現に他ならないことが主張できる：実際 (1.2) は (1.1) を満たしており、更に SDE (1.1) が一意解を持つので（係数は Lipschitz 条件を満たしている）。

SDE (1.1) は対数正規過程などと呼ばれる。というのも解表現 (1.2) からわかるように

$$\log S_t^i \sim N \left(\log S_0^i + \int_0^t \left\{ \mu_u^i - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d (\sigma_u^{ij})^2 \right\} du, \sum_{j=1}^d \int_0^t (\sigma_u^{ij})^2 du \right),$$

（ただし $N(m, v)$ で平均が m 分散が v の正規分布を表す、 $\sim$ は分布が等しいの意味とする）、すなわち、各時刻 t で S_t^i は対数正規分布している。

また、係数 μ^i は危険資産価格過程 S^i の平均収益率過程 (mean-return rate process) と呼ばれる。実際：

$$E \left[\frac{S_{t+\delta}^i - S_t^i}{S_t^i} \mid \mathcal{F}_t \right] \approx E \left[\mu_t^i \delta + \sum_{j=1}^d \sigma_t^{ij} (w_{t+\delta}^j - w_t^j) \mid \mathcal{F}_t \right] = \mu_t^i \delta$$

が $\delta \ll 1$ に対して成立している。

一方、係数 (σ^{ij}) は危険資産価格過程 S のボラティリティ行列過程 (volatility matrix process) と呼ばれる。 $dt \ll 1$ に対して、

$$E \left[\frac{S_{t+dt}^i - S_t^i}{S_t^i} \frac{S_{t+dt}^j - S_t^j}{S_t^j} \middle| \mathcal{F}_t \right] \approx \frac{d\langle S^i, S^j \rangle_t}{S_t^i S_t^j} = \sum_{k=1}^d \sigma_t^{ik} \sigma_t^{jk} dt$$

が成立していることに注意すれば、行列過程 $\sigma := (\sigma^{ij})$ が資産価格過程 (の変化率) の分散構造を記述していることがわかる。更に

$$n = d, \quad \sigma_t \text{ は任意の } t \geq 0 \text{ に関して可逆}$$

を仮定することにする。このとき

$$(1.3) \quad \mathcal{F}_t := \sigma(w_u; u \in [0, t]) = \sigma(S_u; u \in [0, t]) =: \mathcal{S}_t$$

が成立していることに注意する。実際、解表現 (1.2) から S_s が Brown 運動 $(w_u)_{u \in [0, s]}$ の関数として表されていることがわかる。よって $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{S}_t$ 。また $L := (\log S^1, \dots, \log S^n)'$ と書くと伊藤の公式より

$$dL_s = (\text{“deterministic function”})ds + \sigma_s dw_s,$$

よって

$$w_s = \int_0^s \sigma_u^{-1} dL_u + \text{“deterministic function”},$$

すなわち w_s が $(S_u)_{u \in [0, s]}$ の関数として表されていることがわかる。よって $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{S}_t$ 。一つの解釈としては、この金融市場では「危険資産価格情報: $(S_u)_{u \in [0, t]}$ こそが、市場で得られる全情報 (ランダムネス): $\mathcal{F}_t$ である」と単純化がなされているということである。(より一般の情報・ランダムネスを盛り込んだモデルの構成については 1.4 節参照)

注意 1.1. 決定的な係数を持つ SDE (1.1) で記述されている危険資産価格過程を本稿では「Black-Scholes 型」と呼ぶことにした。元々は Merton (1973b) [48] が上の価格過程で $n = d = 1$, r, μ, σ : 定数と置いたものを “Black-Scholes model” と呼んだのがきっかけである。(価格過程のみならず、枠組: 次節で述べる様々な理想化や動的な自己資本調達投資家の存在など、を込めて Black-Scholes モデルと呼ぶこともある。Black-Scholes, 1973, [3], 及び [48] はそのモデル・枠組を用い、有名な「オプション価格付け問題」を考察した。)

参考までに (オリジナル) Black-Scholes モデルから得られる株価のサンプルパスをいくつか描いてみる。 $n = d = 1$, r, μ, σ : 定数とする。十分小さい δ 刻みで時間を刻む:

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_i := i\delta < \dots$$

更に

$$(1.4) \quad S_{t_{i+1}} - S_{t_i} = S_{t_i} \{ \mu\delta + \sigma(w_{t_{i+1}} - w_{t_i}) \},$$

と SDE (1.1) を近似する。ここで Brown 運動の増分:

$$w_{t_{i+1}} - w_{t_i} \sim \sqrt{\delta} N(0, 1), \quad i = 0, 1, \dots,$$

はそれぞれ独立な正規分布確率変数であるから、独立な正規分布する乱数列とアルゴリズム (1.4) を用いてサンプルパス: $\{S_{t_i}; i = 0, 1, \dots\}$ を計算してゆく (この近似法は Euler-丸山近似と呼ばれている。詳細については例えば [33] 参照。尚、Figure 2-3 では時刻 t_i ($i = 0, 1, \dots$) での値 S_{t_i} を線形補間してプロットしてある。)

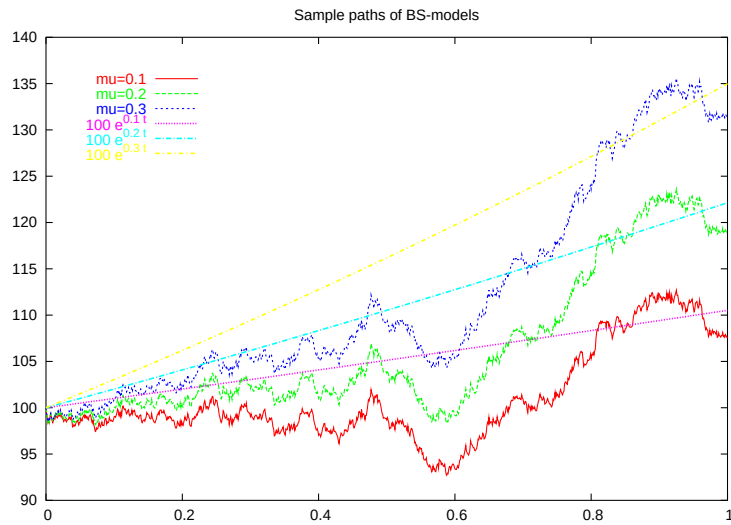


FIGURE 2. μ を変化させて描いた BS-model のサンプルパス

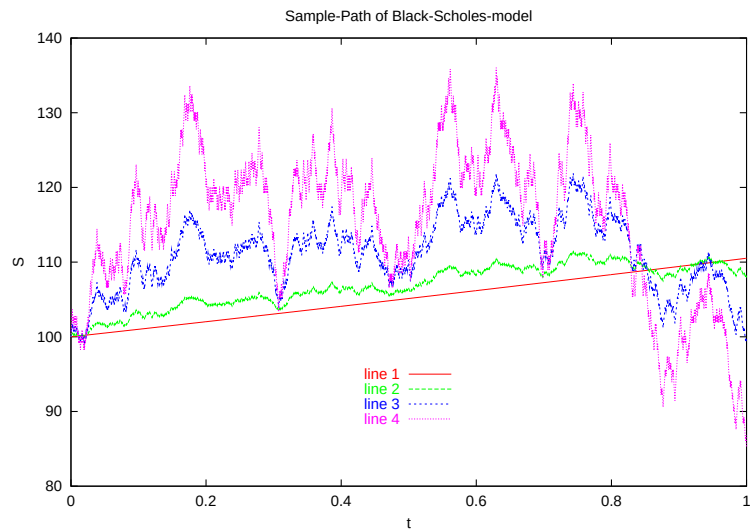


FIGURE 3. σ を変化させて描いた BS-model のサンプルパス

1.2. **動的な自己資金調達の運用.** 次にこの金融市場上で、安全運用と危険資産への投資を組み合わせる以下のルールに従う投資家 (investor) を考える：

- 時刻 0 に元手額 $x(> 0)$ を持って投資をスタート
- 時刻 t に第 i 危険資産を全資産総額に対して “比率” π_t^i 分保有。危険資産へ投資した残額は銀行に預けて安全に運用。
- 追加の資本投入は行わない。また資本流出（生じた利益をどこかで消費したり別のマーケットで投資したり）も無し。

- 危険資産の売買に伴うコスト（取引手数料など）は無視する。

このルールに沿って刻々と（連続的に）投資戦略 (investment strategy) を決定してゆく投資家を「動的な自己資金調達の投資家」(dynamic self-financing investor) と呼ぶ。ここで“比率” $\pi_t^i(\omega) \in \mathbb{R}$ は、負値をとりうる設定になっていることに注意。「マイナスの保有」＝「空売り (shortselling)」(将来買い戻す約束の下、持っていない証券を借りてきて売ることができる) と解釈する。また銀行に預ける額が負にもなり得るが、これは借り入れと解釈する。

SDE を用いると、この投資家の総資産額を表す過程 (富過程: wealth process) を $(X_t)_{t \geq 0}$ で表して、以下の様に記述することができる：

$$(1.5) \quad dX_t = \sum_{i=1}^n X_t \pi_t^i \frac{dS_t^i}{S_t^i} + \left(1 - \sum_{i=1}^n \pi_t^i\right) X_t r_t dt, \quad X_0 = x.$$

実際、極短い時間間隔： $[t, t + \delta]$ で見ると

$$\begin{aligned} X_{t+\delta} - X_t &\approx \sum_{i=1}^n X_t \pi_t^i \frac{S_{t+\delta}^i - S_t^i}{S_t^i} + \left(1 - \sum_{i=1}^n \pi_t^i\right) X_t r_t \delta, \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{X_t \pi_t^i}{S_t^i} (S_{t+\delta}^i - S_t^i) + \left(1 - \sum_{i=1}^n \pi_t^i\right) X_t r_t \delta, \end{aligned}$$

そして

$$\begin{aligned} X_{t+\delta} - X_t &: \text{総資産額の変動} \\ \frac{X_t \pi_t^i}{S_t^i} &: \text{時刻 } t \text{ での第 } i \text{ 危険資産の保有単位} \\ (S_{t+\delta}^i - S_t^i) &: \text{第 } i \text{ 危険資産の価格変動} \\ \left(1 - \sum_{i=1}^n \pi_t^i\right) X_t &: \text{時刻 } t \text{ に安全運用する額} \\ r_t \delta &: \text{期間 } [t, t + \delta] \text{ 安全運用により生じる利子率.} \end{aligned}$$

ここで我々は、危険資産の保有戦略/ポリシー：

$$\pi := (\pi_t)_{t \geq 0}, \quad \pi_t := (\pi_t^1, \dots, \pi_t^n)'$$

は $\mathcal{F}_t$ -適合であることを想定している。時刻 t での保有ポリシーはその時刻までの市場の情報 $\mathcal{F}_t$ を用いて決定されないといけない、(例えば未来の情報を知っているような“インサイダー”は想定されていない) と仮定しているわけである。実際は更に、(1.5) 式に現れる (通常の意味での) 確率積分： $\int_0^t X_u \pi_u^i \frac{dS_u^i}{S_u^i}$ が well-defined であるために例えば

$$\pi : [0, \infty) \times \Omega \mapsto \mathbb{R}^n : \mathcal{F}_t\text{-発展的可測、} \int_0^t |\pi_u|^2 du < \infty \text{ a.e. } (t, \omega)$$

などの条件が課される。

定義 1.1. 複数の危険資産を合わせて保有すること/している状態を「ポートフォリオ (portfolio)¹」、 「ポートフォリオを組む/持つ」と呼ぶ。また投資戦略 $\pi := (\pi_t)_{t \geq 0}$ の

¹ポートフォリオとは、元々は、建築家・デザイナー等が用いる、設計図・案、デッサンなどを挟んでおくフォルダー（書類入れ）のことを指す言葉らしい。ウォール街の証券アナリスト達が顧客に営業に出向くとき、購入を勧める株銘柄の一覧/資料をこのようなフォルダーに挟んで見せに依っていたらしく、これが語源になっているらしい... とは何処かで読んだ記事のうろ覚えです。

ことを「ポートフォリオ戦略 (portfolio strategy)」とも呼び、投資家の富過程 (wealth process) $X := (X_t)_{t \geq 0}$ のことをポートフォリオ富過程 (portfolio wealth process) と呼んだりもする。

(x, π) 所与のとき、SDE (1.5) の解を $((x, \pi)$ に依っていることを強調して) $X^{x, \pi} := (X_t^{x, \pi})_{t \geq 0}$ としばしば書く。(1.5) 式を若干整理して書き直して

$$(1.6) \quad \frac{dX_t^{x, \pi}}{X_t^{x, \pi}} = \sum_{i=1}^n \pi_t^i \frac{dS_t^i}{S_t^i} + \left(1 - \sum_{i=1}^n \pi_t^i\right) r_t dt, \quad X_0^{x, \pi} = x$$

である。(1.1) と組み合わせて

$$(1.7) \quad \begin{aligned} \frac{dX_t^{x, \pi}}{X_t^{x, \pi}} &= \sum_{i=1}^n \pi_t^i \left\{ (\mu_t^i - r_t) dt + \sum_{j=1}^d \sigma_t^{ij} dw_t^j \right\} + r_t dt \\ &= \pi_t' \sigma_t (dw_t + \phi_t dt) + r_t dt. \end{aligned}$$

ただし

$$(1.8) \quad \phi_t := \sigma_t^{-1}(\mu_t - r_t \mathbf{1}),$$

$\mathbf{1} := (1, \dots, 1)' \in \mathbb{R}^n$ と記し、表記：

$$\pi_t' \sigma_t dw_t = (\pi_t^1, \dots, \pi_t^n) \begin{pmatrix} \sigma_t^{11} & \dots & \sigma_t^{1d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_t^{n1} & \dots & \sigma_t^{nd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dw_t^1 \\ \vdots \\ dw_t^d \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^d \pi_t^i \sigma_t^{ij} dw_t^j$$

を用いた。これより結局 SDE (1.6) の解表示として

$$(1.9) \quad X_t^{x, \pi} = x \exp \left[\int_0^t \pi_u' \sigma_u dw_u + \int_0^t \left\{ r_u + \pi_u' \sigma_u \phi_u - \frac{1}{2} |\sigma_u' \pi_u|^2 \right\} du \right]$$

が得られる。 $((1.9)$ が (1.7) を満たしていることは伊藤の公式を用いてチェックできる。更に (ランダムな係数を持つ) SDE (1.6) or (1.7) の解の一意性については [50] の 3 章参照) この表記からわかるように

$$X_t^{x, \pi} > 0 \quad \text{a.e. } (t, \omega)$$

が成立している。

(1.9) 式の “検算”. 例えば $\pi \equiv 0$ (危険資産に投資はしない、全て安全投資) に対しては

$$X_t^{x, 0} = x e^{\int_0^t r_u du} = x B_t$$

が成立している。また $\pi \equiv e_i := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)'$ (第 i 成分のみ 1, 第 i 危険資産に常に全投資) に対しては

$$X_t^{x, e_i} = x \exp \left[\int_0^t e_i' \sigma_u (dw_u + \phi_u du) + \int_0^t \left\{ r_u - \frac{1}{2} |\sigma_u' e_i|^2 \right\} du \right] = \frac{x}{S_0^i} S_t^i$$

が成立している。

1.3. **期待幂効用最大化：古典的結果.** 前節で定義した投資家のための最適投資問題 (optimal investment problem) を導入する：幂効用関数 (power-utility function)

$$u(x) := \frac{x^\gamma}{\gamma} \quad \text{for } x > 0 \quad \text{and } \gamma \in (-\infty, 0) \sqcup (0, 1)$$

を定義し、終末時刻 (time horizon) $T > 0$ を与え

$$(1.10) \quad \sup_{\pi \in \mathcal{A}_T} Eu(X_T^{x, \pi}),$$

最終富 (terminal wealth) に関する期待効用最大化 (expected utility maximization), を考える。ただし

$$(1.11) \quad \mathcal{A}_T := \left\{ (\pi_t)_{t \in [0, T]}; \ n\text{-次元 } \mathcal{F}_t\text{-発展可測、} \int_0^T |\pi_t|^2 dt < \infty, \text{ a.e.} \right\}.$$

これを許容的ポートフォリオ戦略の空間 (space of admissible strategies) と呼ぶ。

注意 1.2.

$$u(x) = \frac{x^\gamma}{\gamma} = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

($\alpha := 1 - \gamma$, $\alpha > 0, \neq 1$) を (相対) リスク回避度 α の巾効用関数と呼ぶ。

一般に凹である効用関数のことをリスク回避的と呼ぶ。これは Jensen の不等式から得られる不等式：

$$Eu(X) \leq u(EX)$$

すなわち、不確定なもの (ギャンブル) の効用の方が確実に期待値分得られるものの効用より低いこと、に困っている。また

$$Eu(X) = u(EX - c)$$

を成り立たせる $c (\in \mathbb{R})$ の大きさが、どれだけリスク回避的か (ギャンブルを嫌うか) を表していると見れるが

$$Eu(X) = Eu(EX + \bar{X}) \approx u(EX) + \frac{1}{2} u''(EX) \text{var} X$$

$$u(EX - c) \approx u(EX) - u'(EX)c$$

$$(\bar{X} := X - EX, \ u' := \frac{d}{dx} u, \ u'' := \frac{d^2}{dx^2} u) \text{ より}$$

$$c \approx -\frac{\text{var} X}{2} \frac{u''(EX)}{u'(EX)}$$

が得られる。ここに現れる量：

$$ARA(x) := -\frac{u''(x)}{u'(x)} = \frac{\alpha}{x}$$

を絶対リスク回避 (尺) 度 (absolute risk aversion measure) と呼ぶ。また $ARA(x)$ に「財」の大きさ x をかけたもの：

$$RRA(x) := -\frac{xu''(x)}{u'(x)} = \alpha$$

を相対リスク回避 (尺) 度 (relative risk aversion measure) と呼ぶ。巾効用関数は $ARA(x)$ が双曲 (HARA: Hyperbolic Absolute Risk Averse)、また RRA が一定 (CRRA: Constant Relative Risk Averse) である。

以下は本質的には Merton (1969) [45], により得られた結果である。

定理 1.1. 最適投資問題 (1.10) に関して

$$\sup_{\pi \in \mathcal{A}_T} Eu(X_T^{x,\pi}) = Eu(X_T^{x,\hat{\pi}}) = u(xB_T) \exp \left\{ \frac{\gamma}{2(1-\gamma)} \int_0^T |\phi_t|^2 dt \right\}$$

が成立する。ただし表記 (1.8) と

$$(1.12) \quad \hat{\pi}_t := \frac{1}{1-\gamma} (\sigma \sigma')_t^{-1} (\mu_t - r_t \mathbf{1})$$

を用いた。

証明は [11], [31], [36] などの教科書参照。

1 期間静的最適投資との関連. 以下に説明してゆくように、上の定理で得られた最適投資戦略は 1 期間モデルで得られる解答と “同等” である。

$\delta \ll 1$ に対して $\{t, t+\delta\}$ の 2 時刻 (t : 現在、 $t+\delta$: 将来・期末時刻) のみを考える 1 期間の投資問題を考える。ここで安全運用の収益率 (リターン; 変化率) に関して

$$\frac{B_{t+\delta} - B_t}{B_t} = r_t \delta,$$

危険資産の収益率 (リターン; 変化率) に関して

$$\text{diag}(S_t)^{-1} (S_{t+\delta} - S_t) = \mu_t \delta + \sigma_t (w_{t+\delta} - w_t) =: R_t \delta$$

が成立していると見做す。このとき危険資産の収益率 R_t は正規分布しておりその (条件付) 平均・分散はそれぞれ

$$\begin{cases} M_t := E[R_t | \mathcal{F}_t] = \mu_t, \\ V_t := E[(R_t - M_t)(R_t - M_t)' | \mathcal{F}_t] = \frac{\sigma_t \sigma_t'}{\delta} \end{cases}$$

である。さて時刻 t に

- 元手額 1. $p_t^i (\in \mathbb{R})$ 分第 i 危険資産を購入、
- $1 - p_t' \mathbf{1}$ を安全運用。 ($p_t := (p_t^1, \dots, p_t^n)'$, $\mathbf{1} := (1, \dots, 1)'$.)

したとすると、時刻 $t+\delta$ での総資産は金額で

$$\begin{aligned} X &:= \sum_{i=1}^n \frac{p_t^i}{S_t^i} S_{t+\delta}^i + (1 - p_t' \mathbf{1}) \frac{B_{t+\delta}}{B_t} \\ &= \sum_{i=1}^n p_t^i \frac{S_{t+\delta}^i - S_t^i}{S_t^i} + (1 - p_t' \mathbf{1}) \frac{B_{t+\delta} - B_t}{B_t} + 1 \\ &= p_t' R_t \delta + (1 - p_t' \mathbf{1}) r_t \delta + 1 \\ &= (1 + r_t \delta) + p_t' (R_t - r_t \mathbf{1}) \delta \\ &=: R_t^f + p_t' R_t^e \delta \end{aligned}$$

で与えられる。 $R_t^f := 1 + r_t \delta$ は安全運用による収益 (risk-free return), $R_t^e := R_t - r_t \mathbf{1}$ は危険資産投資による超過収益率 (excess rate of return) である。ここで、1 期間平均・分散最適投資問題:

$$\max_{p_t \in \mathbb{R}^n} \left(E_t X - \frac{\alpha}{2} \text{var}_t X \right)$$

を考える。ただし $E_t X := E[X | \mathcal{F}_t]$, $\text{var}_t X := E_t X^2 - (E_t X)^2$ と記した。リスク: X の分散、を “ペナルティ項” として付加して修正した期待収益を最大にするわけで

ある。パラメータ $\alpha > 0$ をリスク回避パラメータと呼ぶ (α が大きいほどよりリスク回避的)。

$$\begin{aligned} E_t X - \frac{\alpha}{2} \text{var}_t X \\ &= \left\{ \delta (M_t - r_t \mathbf{1})' p_t + R_t^f \right\} - \frac{\alpha \delta^2}{2} p_t' V_t p_t \\ &= - \frac{\alpha \delta}{2} \left| (\sigma \sigma')_t^{1/2} \left\{ p_t - \frac{1}{\alpha} (\sigma \sigma')_t^{-1} (\mu_t - r_t \mathbf{1}) \right\} \right|^2 \\ &\quad + \frac{\delta}{2\alpha} (\mu_t - r_t \mathbf{1}) (\sigma \sigma')_t^{-1} (\mu_t - r_t \mathbf{1}) + R_t^f \end{aligned}$$

に注意すると、最適ポートフォリオ戦略：

$$\hat{p}_t := \frac{1}{\alpha} (\sigma \sigma')_t^{-1} (\mu_t - r_t \mathbf{1}),$$

が得られる。

つまり (多少意地悪な言い方をすれば、確率微分方程式や伊藤解析を知らずとも) 上記の 1 期間最適投資を刻々と繰り返せば同等の結果が得られるわけであり、この意味で定理 1.1 で得られた最適投資戦略 (1.12) を近視眼戦略 (myopic strategy) と呼んだりする。

1.4. 一般化：分岐. Merton による先駆的研究 ([45], [46], [47]) に始まり、期待効用最大化による最適ポートフォリオの研究は、理論的側面から、また (実金融市場への適用を意識した) 応用的側面から、様々に分岐し発展を続けている。以下に不十分ながらいくつかのコメントを加えてゆく。

1.4.1. 確率過程の一般化. 金利過程や危険資産価格過程の係数を決定的であるとした 1.1 節の Black-Scholes 型モデルは様々に一般化されている。実金融市場で得られる時系列の観察・分析から Black-Scholes 型の不十分性は諸々指摘されていることもあるしモデル確率過程の一般化は十分議論されるべきである。本節は次章と関連する部分もあるので、コメントは多めである。

1 例として [47] に始まる通称「ファクターモデル (factor model)」を紹介する ([2], [51], [52] など参照)：金利や危険資産に影響を及ぼす状態変数/ファクター過程 $Y := (Y_t)_{t \geq 0}$ があり、金利過程は $r_t := r(t, Y_t)$ と表されているとする。更に (S, Y) は Markov 性を保った形で

$$\begin{cases} dS_t = \text{diag}(S_t) \{ \mu(t, Y_t) dt + \sigma(t, Y_t) dw_t \}, \\ dY_t = b(t, Y_t) dt + \eta(t, Y_t) dw_t \end{cases}$$

と記述されているとする。

この場合冪効用最大化問題 (1.10) の最適戦略は (少なくとも形式的には)

$$(1.13) \quad \hat{\pi}_t := \frac{1}{1 - \gamma} (\sigma \sigma')^{-1} [(\mu - r \mathbf{1}) + \gamma (\sigma \eta') \partial_y v](t, Y_t)$$

で与えられる。ここで v は以下の Bellman 方程式 (動的計画方程式, dynamic programming equation, と呼ぶ)

$$(1.14) \quad \begin{cases} -\partial_t v = \frac{1}{2} \left\{ \text{Tr}(\eta \eta' \partial_{yy} v) + \gamma |\eta' \partial_y v|^2 \right\} \\ \quad + \sup_{\pi \in \mathbb{R}^n} \left\{ (b + \gamma \eta \sigma' \pi)' \partial_y v + \ell(t, y, \pi) \right\} \\ v(T, y) = 0 \end{cases}$$

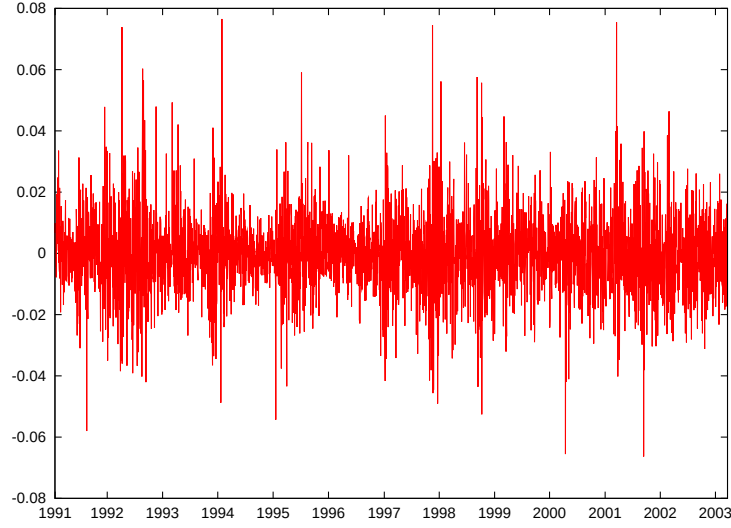


FIGURE 4. 日経平均株価の日次リターン： $\frac{\text{翌日株価} - \text{株価}}{\text{株価}}$ の時系列 (データ数 3000 個)

の解である。ただし

$$\ell(t, y, p) := \left[r + p'(\mu - r\mathbf{1}) - \frac{1-\gamma}{2} |\sigma'p|^2 \right] (t, y)$$

と置いた。最適ポートフォリオ戦略 (1.13) の右辺を見ると、(1.12) と異なり、近視眼項 (第一項) に加えて Bellman 方程式の解を使って記述される第二項が現れている。これは Black-Scholes 型モデルでは現れなかった (いわば金利や危険資産価格の平均収益率 μ がランダムな為現れた) 項でありヘッジング項 (hedging demand term) などと呼ばれたりする。

さてここで、最適ポートフォリオ戦略の数値解析という応用的・工学的見地に立って (1.13) を見てみる。例えば PDE (1.14) の差分化による数値解法には次元 n について限界 (3? or 4?) がある。金融機関が保有するポートフォリオには n が数十～数百といった規模のものもざらなので、高次元の問題にも適用可能な数値解法の研究・開発は大変重要である。

一つのアプローチとして挙げられるのは、Bellman 方程式 (1.14) の解や最適戦略 (1.13) の確率的表現 (w や Y の汎関数を用いた期待値表現) を求め、それらをモンテカルロシミュレーションで計算するやり方である。([9], [10], [17], [18], [38], [39], [57], [65] など参照。)

また、終末時間 T が十分大きいと仮定し (年金資金の長期間運用などが例に挙げられるかもしれない)、(1.10) の代わりに無限期間の期待効用成長率最大化：

$$(RS)_\infty \quad \sup_{\pi \in \mathcal{A}} \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\gamma T} \log E(X_T^{x, \pi})^\gamma$$

を解くアプローチも考えられる。ここで $\mathcal{A} := \{\pi := (\pi_t)_{t \geq 0}; \pi|_{[0, T]} \in \mathcal{A}_T \text{ for } \forall T > 0\}$. この場合対応する Bellman 方程式、最適戦略が T に依らなくなり、必要な計算量は軽減される。([2], [12], [40], [51], [52], [54], [63], [64], [58] など参照。) 次章で、このアプローチをもう少し詳しく見てゆく。

関連研究として [14] も挙げられる：この本ではファクター過程 Y を「非常に早く」動く過程であると仮定し Bellman 方程式 (1.14) の perturbation analysis を行っている。またモデルのパラメータ推定も扱われている。

最後にファクターモデル以外のモデリングについていくつか言及する。

外生的なファクター過程 Y を用いない一般化. 例えば [22] は時系列解析に於ける ARCH/GARCH モデルなどにヒントを得て、[66], [27] は均衡論的議論を通じて、それぞれ確率的なボラティリティを持つモデルを導出している。また [24] は Black-Scholes 型モデルの Brown 運動 w を“記憶を持つ” Gauss 型過程に置き換えたモデルを提示し、最適投資問題を解いている。

飛躍型のランダムネスを持つ SDE を用いたモデル. 実金融市場で突発的なニュースにより価格が急激な変動を見せることはしばしば起こる。実際 Figure 4 の時系列にもところどころ “spikes” が見てとれる。これらの現象の説明に十分な説得力を持つ飛躍型モデルは最近盛んに研究されている。(関連研究・文献として例えば [5], [15], [16], [26], [37], [49] など。)

1.4.2. 制約条件. 実際のポートフォリオ運用では様々な制約条件が（市場の規則・規制により）強いられるし、また（ポートフォリオマネージャー自らの手で）加えられる。空売り制限： $\pi_t^i \geq 0$, 保有比率制限： $\pi_t \in \prod_{i=1}^n [l_i, u_i]$ などが典型的である。これらは凸双対法を用いて扱うことができる。([30], [31] に詳しく調べられている。関連研究に [10].) 必ずしも凸でないポートフォリオ制約： $\pi_t \in K$ ($K \subset \mathbb{R}^n$, 閉) は [23] で扱われている。他に、富過程に加える制約条件：例えば低下制約 (drawdown constraint; 富過程の下方リスクに制限を与える)、なども考えられる ([7], [64] など)。

1.4.3. 効用関数. 冪効用を含むより一般の効用関数を用いた最適投資問題 (1.10) の取り扱いについては教科書 [11], [31], [36], また [62] など参照。また、昨今金融機関の保有ポートフォリオのリスク管理が高度化しており、関連して「リスク」を測る尺度に関する議論・研究が活発に行われているが (講義ノート [8], 教科書 [13] 参照)、これより派生した頑健効用最大化 (robust utility maximization):

$$\sup_{\pi \in \mathcal{A}_T} \inf_{Q \in \mathcal{Q}} E^Q u(X_T^{x, \pi})$$

($\mathcal{Q} \subset \{Q : (\Omega, \mathcal{F}) \text{ 上確率測度, } P \text{ に絶対連続 } \}, E^Q[\cdot] := \int_{\Omega} (\cdot) dQ$) も考えられる。([4], [19], [21] など参照。) モデルの不確かさ (model uncertainty) を最大-最小基準で扱う問題ともいえる。例えば Black-Scholes 型モデルで $\mu \equiv 0$ と置き、替わりに

$$\mathcal{Q} := \left\{ dQ^{(f)} := Z_T^{(f)} dP; f: \text{発展的可測, } f_t \in K \text{ a.e. } (t, \omega) \right\}$$

(ただし $Z_T^{(f)} := \exp\{\int_0^T (\sigma^{-1} f)_t' dw_t - \frac{1}{2} \int_0^T |\sigma^{-1} f|_t^2 dt\}$, $K \subset \mathbb{R}^n$, compact) と採ってみる。Cameron-Martin-丸山-Girsanov の定理より $Q^{(f)}$ -Brown 運動, $w_t^{(f)} := w_t - \int_0^t \sigma_u^{-1} f_u du$, を用いて

$$dS_t = \text{diag}(S_t) \left(f_t dt + \sigma_t dw_t^{(f)} \right)$$

と危険資産価格過程のダイナミクスが書かれる。頑健効用最大化は“最悪”の平均収益率シナリオを想定した最適投資問題と解釈される。

一方で、研究者の立場から少し離れ (期待効用最大化を実金融市場での投資に適用・応用しようとする) ユーザーの立場に立ってみると、実際には効用関数はなかなか“使い難い”ことも事実である。効用関数をどう選べばいいのか、例えば冪効用を用いるにせよリスク回避・選好度パラメータ： γ をどう選ぶのか？ (そしてその選び

方次第で“最適”戦略が如何様にも変化する)よくわからない。次章で幕効用の γ の“解釈”を一つ述べる(注意 2.1 参照)。

1.4.4. 推定しつつ最適化. モデルに未知パラメータや直接観測できない「隠れている」ファクター (unobservable/hidden factor) があるとして、これらの推定を(刻々)行いつつ最適ポートフォリオ戦略を求めること、はより現実的なアプローチと思われる。これは部分情報下 (partial information) での最適化問題として定式化される。([20], [25], [32], [41], [42], [52], [54], [55], [60], [61] など参照。)

1.4.5. その他. 証券売買で生じる取引コスト (transaction costs; 具体的には売買で生じる手数料や課される税金など) を考慮したポートフォリオ最適化問題は大変重要なテーマの一つである。例えば [30] ([29] も参照) に一つのアプローチが紹介されている。[53], [67] も異なるモデリング・アプローチで問題を解いている。またこの分野の専門家の 1 人である Yuri Kabanov 教授によるサーベイ/レクチャーノートが近日刊行されると聞いている。

将来のある情報をあらかじめ知っているような“インサイダー”や、投資行動が危険資産の価格に影響を与えるような“大きな投資家”を考慮したポートフォリオ最適化も大変野心的な問題である。([1], [6], [34], [35] など参照。)

市場での証券の流通量に限りがあり、任意時刻に任意量の取引が必ずしも行えない状況がしばしば起こる。(これを流動性リスク: liquidity risk という。) 有名なヘッジファンド LTCM(Long-Term-Capital-Management; R. Merton, M. Scholes, A. Takahashi 等高名研究者も加わっていた) が経営破綻に至った原因に、流動性リスクがあったと聞いている。流動性リスクをモデル化し、ポートフォリオ最適化を扱っている研究については例えば [43], [44] を参照されたい。

最後に、筆者の無知薄学故、いくつも重要なテーマ・研究が無視、省略、割愛されていること、ご容赦願いたい。

2. “線形-二次”モデルによる長期間最適ポートフォリオ

本章では、最も単純な構造を持つファクターモデル、“線形-二次 (linear-quadratic)”-モデル、を採用して、この場合、“無限期間版”期待幕効用最大化問題 $(RS)_\infty$ の可解性が、行列値代数 Riccati 方程式の可解性の議論に帰着されてゆくことを観察する。関連した研究に [2], [12], [20], [24], [28], [40], [51], [52], [54], [58], [59], [63], [64] などが挙げられる。

2.1. “線形-二次”ファクターモデル. 1.4 節で説明したファクターモデルを考える。

$$\begin{cases} dB_t = B_t r(Y_t) dt, & B_0 = 1, \\ dS_t = \text{diag}(S_t) \{ \mu(Y_t) dt + \sigma(Y_t) dw(t) \}, & S_0 \in \mathbb{R}_+^n, \\ dY_t = \lambda(Y_t) dt + \eta(Y_t) dw(t), & Y_0 \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$

ここで確率ファクター Y は m -次元のベクトル値過程で、金利過程 r や危険資産価格過程の係数 μ, σ に影響を及ぼす。Brown 運動 w は $(m+n)$ -次元であるとする。Black-Scholes 型モデルと異なり (1.3) は満たされていない。以下の構造を仮定する。

$$\begin{cases} r(y) := r_0 + r'_1 y + \frac{1}{2} y' r_2 y, \\ \mu(y) := r(y) \mathbf{1} + \theta(y), & \theta(y) := \theta_0 + \theta_1 y, \\ \lambda(y) := \lambda_0 + \lambda_1 y, & \eta(y) := \eta_0, \quad \text{and} \quad \sigma(y) \equiv \sigma_0 \end{cases}$$

ただし $\mathbf{1} := (1, \dots, 1)' \in \mathbb{R}^n$, $r_0 \in \mathbb{R}$, $r_1, \lambda_0 \in \mathbb{R}^m$, $\theta_0 \in \mathbb{R}^n$, $r_2, \lambda_1 \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $\theta_1 \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\eta_0 \in \mathbb{R}^{m \times (m+n)}$, $\sigma_0 \in \mathbb{R}^{n \times (m+n)}$ であり

(2.1) r_2 対称非負定値、 λ_1 安定、 $\sigma_0 \sigma_0'$, $\eta_0 \eta_0'$ 正定値

を満たすものとする。行列は全ての固有値を左開平面上に持つとき安定であると呼ばれる。

まず、ファクター過程 Y の SDE (線形 Gauss 過程としばしば呼ばれる) の明示的解表現を与えておこう。伊藤の公式より

$$\begin{aligned} d(e^{-t\lambda_1} Y_t) &= e^{-t\lambda_1} (-\lambda_1 Y_t dt + dY_t) \\ &= e^{-t\lambda_1} (\lambda_0 dt + \eta_0 dw_t). \end{aligned}$$

したがって両辺 0 から t まで積分して、更に両辺に左から $e^{t\lambda_1}$ を乗じて

$$\begin{aligned} Y_t &= e^{t\lambda_1} \left\{ Y_0 + \int_0^t e^{-s\lambda_1} \lambda_0 ds + \int_0^t e^{-s\lambda_1} \eta_0 dw_s \right\} \\ &= e^{t\lambda_1} Y_0 + \int_0^t e^{(t-s)\lambda_1} \lambda_0 ds + \int_0^t e^{(t-s)\lambda_1} \eta_0 dw_s \\ &= e^{t\lambda_1} (Y_0 + \lambda_1^{-1} \lambda_0) - \lambda_1^{-1} \lambda_0 + \int_0^t e^{(t-s)\lambda_1} \eta_0 dw_s \\ &=: M_t + \int_0^t e^{(t-s)\lambda_1} \eta_0 dw_s. \end{aligned}$$

またここで $\int_0^t e^{\lambda_1(t-s)} \eta_0 dw_s \sim N(0, V_t)$, ただし

$$V_t := \int_0^t e^{\lambda_1 s} \eta_0 \eta_0' e^{\lambda_1' s} ds$$

に注意すれば各時刻 t に対して正規分布していること: $Y_t \sim N(M_t, V_t)$ がわかる。更に、 λ_1 の安定性より

$$\lim_{t \rightarrow \infty} M_t = -\lambda_1^{-1} \lambda_0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} V_t = V_\infty := \int_0^\infty e^{\lambda_1 s} \eta_0 \eta_0' e^{\lambda_1' s} ds.$$

ラフな言い方をすれば Y は「 $-\lambda_1^{-1} \lambda_0$ の周りを行ったり来たりうろうろする」過程である。

よりわかりやすく見るために $m = 1$ と置いて

$$dY_t = (\lambda_0 + \lambda_1 Y_t) dt + \eta_0 dw_t, \quad \lambda_1 < 0$$

を見てみる。 Y のドリフトは

$$\lambda_1 (\lambda_1^{-1} \lambda_0 + Y_t) dt = \begin{cases} < 0 & Y_t > -\lambda_1^{-1} \lambda_0 \text{ のとき,} \\ > 0 & Y_t < -\lambda_1^{-1} \lambda_0 \text{ のとき,} \end{cases}$$

と書けるから、 Y を $-\lambda_1^{-1} \lambda_0$ に引き戻す方向に力が常に働いていると見ることができ。この性質を平均回帰性 (mean reverting property) と呼んだりする。また $-\lambda_1^{-1} \lambda_0$ を平均回帰レベル、 $-\lambda_1$ を平均回帰定数などとも呼ぶ。危険資産価格のリターンや金利の時系列データを長時間観察したときなどにしばしば平均回帰性が見られること (Figure 4 参照) がこのファクター過程の導入の動機になっている。

線形・二次ファクターモデルでは更に

- 金利過程はファクター Y の二次関数 (金利過程モデルは非負値を採るように作られていることが望ましい)
- 超過リターン過程: $\theta(Y_t) := \mu(Y_t) - r(Y_t)\mathbf{1}$ がファクター Y の 1 次関数

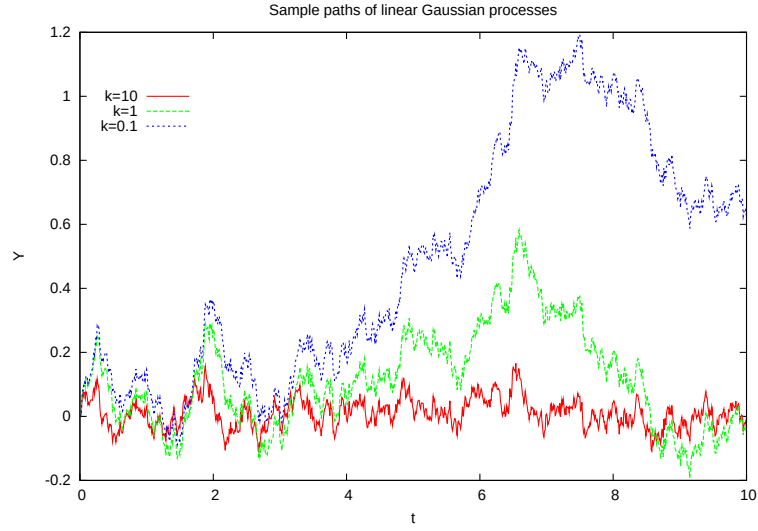


FIGURE 5. $|\eta_0| = 0.2, -\lambda_1^{-1}\lambda_0 = 0.01, Y_0 = 0$ として $k := -\lambda_1$ の値を幾通りかに採りながら線形 Gauss 過程のサンプルパスをプロットさせた図。 k が大きくなるにつれ、サンプルパスの平均回帰性がより強く観察される。

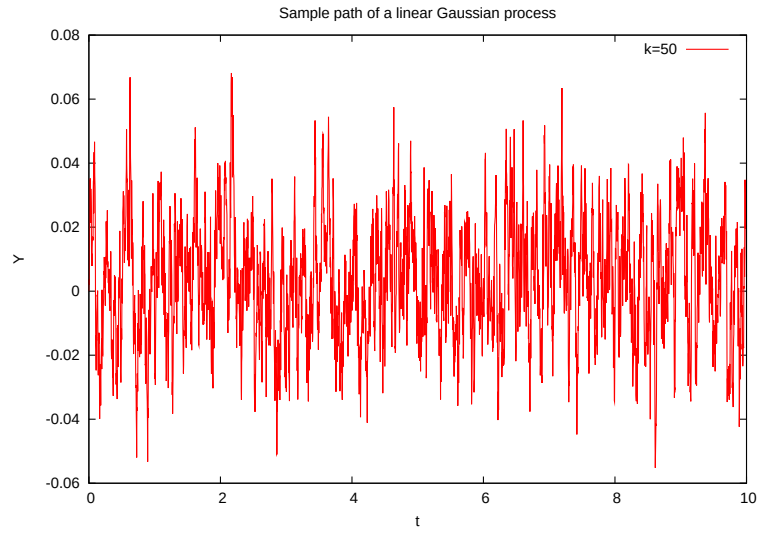


FIGURE 6. $k = -\lambda_1 = 50, -\lambda_1^{-1}\lambda_0 = 0.01, |\eta_0| = 0.2$ と置いた linear Gaussian process のサンプルパスの近似図。 $T = 10$ を 3000 分割して Euler-Maruyama 近似で描いた。

と設定してある。

2.2. リスク鋭感的ポートフォリオ最適化. 期待冪効用最大化 (1.10) と等価な

$$\sup_{\pi \in \mathcal{A}_T} \frac{1}{\gamma} \log E (X_T^{x,\pi})^\gamma = \sup_{\pi \in \mathcal{A}_T} \frac{1}{\gamma} \log E e^{\gamma \log X_T^{x,\pi}}$$

を冪効用成長率最大化 (growth-rate maximization of power-utility), あるいはリスク鋭感的ポートフォリオ最適化 (risk-sensitive portfolio optimization) と呼ぶ。 $\gamma \in (-\infty, 0) \sqcup (0, 1)$ はリスク回避度を表すパラメータだが、 γ に関する形式的なキュムラント展開：

$$\frac{1}{\gamma} \log E e^{\gamma \log X_T^{x,\pi}} = E \log X_T^{x,\pi} + \frac{\gamma}{2} \text{var} \log X_T^{x,\pi} + \dots$$

($\text{var}[\cdot] := E(\cdot)^2 - \{E(\cdot)\}^2$) から想像できるように、ポートフォリオ期待成長率最大化： $\sup_{\pi} E \log X_T^{x,\pi}$ と比べて、 $\gamma < 0$ のときは（分散を“ペナルティ”項として差し引いて最適化するので）よりリスク回避的 (risk averse) な、一方 $\gamma > 0$ のときは（分散項を加えて最適化するので）よりリスク追求的 (risk seeking) な、問題になっていると解釈できる。また

$$\log E (X_T^{x,\pi})^\gamma = \log E (X_T^{1,\pi})^\gamma + \gamma \log x$$

より最適戦略が x に依らないことがわかるので、単純化のため以後 $x = 1$ と置くことにし、 $X^\pi := X^{1,\pi}$ と記す。

本章で我々が扱う

$$(RS)_\infty \quad \bar{V}^{(\infty)} := \sup_{\pi \in \mathcal{A}} \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\gamma T} \log E (X_T^\pi)^\gamma$$

($\gamma \in (-\infty, 0) \sqcup (0, 1)$ は所与のリスク回避パラメータ) は無限期間リスク鋭感的ポートフォリオ最適化 (risk-sensitive portfolio optimization with infinite time horizon). などと呼ばれる。1.4.1 節で触れたように、 $(RS)_\infty$ の最適解は有限期間のそれよりも単純な構造を持っており（期末時間 T に依らない形になるので必要な計算量は軽減される）、また期末時刻 T が“十分大きい”ときには有限期間の最適解を“よく近似”していると考えられる。

2.2.1. 大偏差制御. $(RS)_\infty$ に関連して、以下の“上方チャンス”大偏差確率最大化 (“upside-chance” maximization of large deviations probability) を考えるのは興味深い：これは、ターゲット成長率 $k \in \mathbb{R}$ を与えて

$$(LDC) \quad \Pi(k) := \sup_{\pi \in \mathcal{A}} \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log P (X_T^\pi \geq e^{kT})$$

を解く問題、($T \rightarrow \infty$ の漸近的な意味で) ポートフォリオ価値過程の成長率がターゲット k を上回る確率を最大化する問題、である。

この問題と $(RS)_\infty$ の“双対性”が以下の様に示されている：

定理 2.1. (Pham 2003a, 2003b; [58],[59]) ある $\bar{\gamma} > 0$ が存在して任意の $\gamma \in (0, \bar{\gamma})$ に対して $(RS)_\infty$ に最適戦略 $\hat{\pi}(\gamma) := (\hat{\pi}(t, \gamma))_{t \geq 0} \in \mathcal{A}$ が存在しており

$$(2.2) \quad \Gamma(\gamma) := \sup_{\pi \in \mathcal{A}} \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log E (X_T^\pi)^\gamma = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log E \left(X_T^{\hat{\pi}(\gamma)} \right)^\gamma < \infty$$

が成立しているとする。更に $\Gamma \in C^1((0, \bar{\gamma}))$ とする。 $I : (\Gamma'(0+), \Gamma'(\bar{\gamma}-)) \mapsto (0, \bar{\gamma})$ を $\Gamma'(\cdot)|_{(0, \bar{\gamma})}$ の逆関数とする。（すなわち $I(\Gamma'(d)) = d$, ただし $\Gamma'(\cdot) := \frac{d}{d\gamma} \Gamma(\cdot)$ ）

このとき、

$$(2.3) \quad \Pi(k) = - \sup_{\gamma \in (0, \bar{\gamma})} \{\gamma k - \Gamma(\gamma)\}$$

が任意の $k < \Gamma'(\bar{\gamma}-)$ に対して成立する。また、

$$(2.4) \quad \hat{\pi}_t^{[k,n]} := \hat{\pi}\left(t, I\left((k \vee \Gamma'(0+)) + \frac{1}{n}\right)\right)$$

で定義されるポートフォリオ戦略の列: $(\hat{\pi}_t^{[k,n]})_{n \in \mathbb{N}}$ はほとんど最適 (*nearly optimal*) である。すなわち

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log P\left(X_T^{\hat{\pi}^{[k,n]}} \geq e^{kT}\right) = \Pi(k) \quad \text{for } k < \Gamma'(\bar{\gamma}-).$$

注意 2.1. 上の定理より、ターゲットレベル: $k (< \Gamma'(\bar{\gamma}-))$ を与えて (ポートフォリオ成長率がそれを上回るような確率を最大にする) 大偏差制御問題を解くことと、リスク回避パラメータ: $I(k \vee \Gamma'(0+)) (\in (0, 1))$ を用いた $(RS)_\infty$ (無限期間版期待冪効用最大化) が “等価” であることがわかる。

注意 2.2.

$$(0, \bar{\gamma}) \subset \{\gamma \in (0, 1); \Gamma(\gamma) < \infty\} =: \mathcal{D},$$

を実現する最大の $0 < \bar{\gamma} \leq 1$ を求めて、“完全な” 双対関係 (2.3) を達成させること (別の言い方をすれば、最大のターゲット成長率: $\Gamma'(\bar{\gamma}-)$ を求めること) は一般には困難である (定理 2.3, 系 2.1 参照)。例外的に、線形・二次モデルで $m = 1$ の場合は、明示的計算を基にした完全な解析が可能である (定理 2.4 参照)。

注意 2.3. 類似問題として、“下方リスク” 大偏差確率最小化:

$$\inf_{\pi \in \mathcal{A}} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log P(X_T^\pi \leq e^{kT})$$

も考えられる (指数的に小さい大偏差確率に関しては、“上方チャンス” 最大化以上に重要に思える) が、その取り扱い筆者の知る限り未だ明らかになっていない。

2.3. 動的計画アプローチ. Bellman による動的計画原理 (Bellman's dynamic programming principle) を用いて最適化問題の値関数が満たす Bellman 方程式を導出してゆく。

2.3.1. 測度変換を用いた書き直し. 最初に、有限終末時刻 $T > 0$ を持つリスク鋭感的ポートフォリオ最適化問題に関する Bellman 方程式を導出する。連続半マルチンゲール Z に対して記法 $\mathcal{E}(Z)_t := e^{Z_t - \frac{1}{2}\langle Z \rangle_t}$ を用いる。すると、

$$X_t^\pi = \mathcal{E}\left(\int_0^t \pi'_s \sigma_0 dw\right) \exp\left[\int_0^t \{r(Y_u) + \pi'_u \theta(Y_u)\} du\right],$$

また

$$(X_T^\pi)^\gamma = \mathcal{E}\left(\gamma \int_0^T \pi'_s \sigma_0 dw\right) \exp\left\{\gamma \int_0^T \ell(Y_t, \pi_t) dt\right\},$$

ただし

$$\ell(y, p) := r(y) + \theta(y)'p - \frac{1-\gamma}{2} |\sigma'_0 p|^2$$

である。ここで、

$$\pi \in \tilde{\mathcal{A}}_T := \left\{ (\pi_t)_{t \in [0, T]} \left| \begin{array}{l} n\text{-次元発展的可測, } \int_0^T |\pi_t|^2 dt < \infty, \\ E\mathcal{E}\left(\gamma \int \pi'_s \sigma_0 dw\right)_T = 1 \end{array} \right. \right\},$$

に対して、 $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ 上に確率測度 $P^{(\gamma\pi)}$ を

$$\frac{dP^{(\gamma\pi)}}{dP} \Big|_{\mathcal{F}_t} := \mathcal{E}\left(\gamma \int_0^t \pi'_s \sigma_0 dw\right)_t$$

で定義する。また $P^{(\gamma\pi)}$ に関する期待値を $E^{(\gamma\pi)}[\cdot]$ で表す。Cameron-Martin-丸山-Girsanov の定理より $w_t^{(\gamma\pi)} := w_t - \gamma \int_0^t \sigma'_0 \pi_u du$ は $P^{(\gamma\pi)}$ -Brown 運動であり、よって確率測度 $P^{(\gamma\pi)}$ の下でファクター過程のダイナミクスが

$$dY_t = \{\lambda(Y_t) + \gamma\eta_0\sigma'_0\pi_t\} dt + \eta_0 dw_t^{(\gamma\pi)}$$

と表されることに注意する。上の測度変換を用いれば、有限終末時刻 $T > 0$ を持つリスク鋭感的ポートフォリオ最適化問題は、(discount rate $-\gamma\ell(Y_t, \pi_t)$ で terminal gain 1 の) “標準的” 確率制御問題と看做することができる。時刻 $t \in [0, T]$ を開始時刻とする

$$\bar{V}_t^{(T)} := \operatorname{esssup}_{\pi \in \tilde{\mathcal{A}}_{t,T}} \frac{1}{\gamma} \log E^{(\gamma\pi)} \left[\exp \left\{ \gamma \int_t^T \ell(Y_u, \pi_u) du \right\} \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

(ここで $\tilde{\mathcal{A}}_{t,T} := \{\pi 1_{[t,T]} := (\pi_u)_{u \in [t,T]}; \pi := (\pi_u)_{u \in [0,T]} \in \tilde{\mathcal{A}}_T\}$ と記した) に対して動的計画原理を適用すると、Bellman 方程式：

$$\begin{cases} -\partial_t v = \frac{1}{2} \left\{ \operatorname{Tr}(\eta_0 \eta'_0 \partial_{yy} v) + \gamma |\eta'_0 \partial_y v|^2 \right\} \\ \quad + \sup_{\pi \in \mathbb{R}^n} \left\{ (\lambda(y) + \gamma\eta_0\sigma'_0\pi)' \partial_y v + \ell(y, \pi) \right\} \\ v(T, y) = 0 \end{cases}$$

が得られる (導出については [50], [56] など参照)。更に右辺の $\sup$ が

$$\tilde{\pi}(t, y) := \frac{1}{1-\gamma} (\sigma_0 \sigma'_0)^{-1} \{\theta(y) + \gamma \sigma_0 \eta'_0 \partial_y v\},$$

で実現されることに注意して、上の方程式は

$$\begin{cases} -\partial_t v = \frac{1}{2} \left\{ \operatorname{Tr}(\eta_0 \eta'_0 \partial_{yy} v) + \gamma |\eta'_0 \partial_y v|^2 \right\} + \lambda(y)' \partial_y v \\ \quad + \frac{1}{2(1-\gamma)} |\sigma'_0 (\sigma_0 \sigma'_0)^{-1} \{\theta(y) + \gamma \sigma_0 \eta'_0 \partial_y v\}|^2 + r(y) \\ v(T, y) = 0, \end{cases}$$

すなわち

$$(2.5) \quad \begin{cases} -\partial_t v = \frac{1}{2} \operatorname{Tr}(\eta_0 \eta'_0 \partial_{yy} v) + \frac{1}{2} \partial_y v' \eta_0 \hat{R}^{-1} \eta'_0 \partial_y v + a(y)' \partial_y v + b(y) \\ v(T, y) = 0, \end{cases}$$

と書き直される。ただしここで、関数

$$\begin{cases} a(y) := \lambda(y) + \frac{\gamma}{1-\gamma} \eta_0 \sigma'_0 (\sigma_0 \sigma'_0)^{-1} \theta(y) = \hat{d} + \hat{A}y, \\ b(y) := r(y) + \frac{1}{2(1-\gamma)} \theta(y)' (\sigma_0 \sigma'_0)^{-1} \theta(y) = \hat{f} + \hat{e}'y + \frac{1}{2} y' \hat{C}y \end{cases}$$

行列・ベクトル・定数

$$(2.6) \quad \begin{cases} \hat{A} = \hat{A}(\gamma) := \lambda_1 + \frac{\gamma}{1-\gamma} \eta_0 \sigma'_0 (\sigma_0 \sigma'_0)^{-1} \theta_1, \\ \hat{R} = \hat{R}(\gamma) := \frac{1}{\gamma} \left(I + \frac{\gamma}{1-\gamma} \sigma'_0 (\sigma_0 \sigma'_0)^{-1} \sigma_0 \right)^{-1}, \\ \hat{C} = \hat{C}(\gamma) := r_2 + \frac{1}{1-\gamma} \theta'_1 (\sigma_0 \sigma'_0)^{-1} \theta_1, \\ \hat{d} = \hat{d}(\gamma) := \lambda_0 + \frac{\gamma}{1-\gamma} \eta_0 \sigma'_0 (\sigma_0 \sigma'_0)^{-1} \theta_0, \\ \hat{e} = \hat{e}(\gamma) := r_1 + \frac{1}{1-\gamma} \theta'_1 (\sigma_0 \sigma'_0)^{-1} \theta_0, \\ \hat{f} = \hat{f}(\gamma) := r_0 + \frac{1}{1-\gamma} \theta'_0 (\sigma_0 \sigma'_0)^{-1} \theta_0, \end{cases}$$

の表記を用いた。 I は対応する次元を持つ単位行列である。

2.3.2. エルゴード型ベルマン方程式. さて、 $(RS)_\infty$ に対応するエルゴード型ベルマン方程式は、上の (2.5) の $(T-t \rightarrow \infty)$ としたときの) 極限方程式として記述される。形式的には、 $T-t \rightarrow \infty$ のとき、 $v(t, y) \sim \chi \cdot (T-t) + \xi(y)$, $\partial_t v(t, y) \rightarrow -\chi$, $\partial_y v(t, y) \rightarrow \nabla \xi(y)$, $\partial_{yy} v(t, y) \rightarrow \nabla \nabla \xi(y)$ と振舞うと見做して得られる

$$(2.7) \quad \chi = \frac{1}{2} \text{Tr}(\eta_0 \eta'_0 \nabla \nabla \xi) + \frac{1}{2} \nabla \xi' \eta_0 \hat{R}^{-1} \eta'_0 \nabla \xi + a(y)' \nabla \xi + b(y),$$

あるいは

$$\begin{aligned} \chi = & \frac{1}{2} \left\{ \text{Tr}(\eta_0 \eta'_0 \nabla \nabla \xi) + \gamma |\eta'_0 \nabla \xi|^2 \right\} \\ & + \max_{\pi \in \mathbb{R}^n} \left\{ (\lambda(y) + \gamma \eta_0 \sigma'_0 \pi)' \nabla \xi + \ell(y, \pi) \right\}, \end{aligned}$$

である。ただしここで $\max$ が $\hat{\pi}(t, y) := \frac{1}{1-\gamma} (\sigma_0 \sigma'_0)^{-1} \{ \theta(y) + \gamma (\sigma_0 \eta'_0) \nabla \xi(y) \}$ で実現されることを使った。

実は、(2.7) の「適切」な解 $(\hat{\chi}, \hat{\xi}) \in \mathbb{R} \times C^2(\mathbb{R}^m)$ を用いて、 $(RS)_\infty$ の解は構成される。すなわち、

$$(2.8) \quad \begin{cases} \hat{\pi}_t := \hat{\pi}(t, Y_t), \quad \text{ただし} \\ \hat{\pi}(t, y) := \frac{1}{1-\gamma} (\sigma_0 \sigma'_0)^{-1} \left\{ \theta(y) + \gamma (\sigma_0 \eta'_0) \nabla \hat{\xi}(y) \right\}, \end{cases}$$

と定義して

$$(2.9) \quad \begin{cases} \bar{V}^{(\infty)} = \hat{\chi} \in (-\infty, +\infty). \\ (2.8) \text{ で定義される } \hat{\pi} \in \mathcal{A} \text{ は } (RS)_\infty \text{ の最適ポートフォリオ戦略.} \end{cases}$$

が主張できる (次節参照)。

2.4. **諸結果.** 最後に $(RS)_\infty$ に関して、特に 2.2.1 節で触れた大偏差制御とも関連する

$$\gamma \in (0, 1)$$

の場合に限って [64] に沿った結果紹介をする。 $\gamma < 0$ の場合に関しては [12], [40] で詳しく調べられている。その他 [2], [28], [51] なども参照されたい。 $\gamma < 0$ と $\gamma > 0$ の各場合で (関連する Riccati 方程式の可解性に関して) 状況が大きく異なっていることは注意すべきである。

最初に代数 Riccati 方程式 (Algebraic Riccati Equation, 以下 ARE と略記)

$$A'Q + QA + QBR^{-1}B'Q + C = 0,$$

ただし $A, C \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times l}$, $R \in \mathbb{R}^{l \times l}$, C, R 対称、に関する記法を導入する。この方程式の実対称解 Q は $A + BR^{-1}B'Q$ が安定であるとき安定化解 (stabilizing solution) と呼ばれる。安定化解は存在するときは一意に定まることが知られており、それを

$$\text{Ric} \begin{pmatrix} A & BR^{-1}B' \\ -C & -A' \end{pmatrix},$$

と記す。というのも ARE の解は対応するハミルトン行列: $\begin{pmatrix} A & BR^{-1}B' \\ -C & -A' \end{pmatrix}$ を用いてよく解析されるので。さて (2.6) を用いて

$$(2.10) \quad \hat{H} = \hat{H}(\gamma) := \begin{pmatrix} \hat{A} & \eta_0 \hat{R}^{-1} \eta_0' \\ -\hat{C} & -\hat{A}' \end{pmatrix},$$

と定義する。ここで $\hat{R}, \hat{C} > 0$ に注意。以下が示される。

定理 2.2. (2.1) を仮定する。記法 (2.6), (2.10) を用いる。 $\hat{Q} := \text{Ric} \hat{H} > 0$ が存在するとする。 $\hat{q} \in \mathbb{R}^m$ を

$$(\hat{A} + \eta_0 \hat{R}^{-1} \eta_0' \hat{Q})' \hat{q} + \hat{Q} \hat{d} + \hat{e} = 0$$

を満たすものとし、

$$(2.11) \quad \begin{cases} \hat{\chi} := \frac{1}{2} \text{Tr}(\eta_0 \eta_0' \hat{Q}) + \frac{1}{2} \hat{q}' \eta_0 \hat{R}^{-1} \eta_0' \hat{q} + \hat{d}' \hat{q} + \hat{f}, \\ \hat{\xi}(y) := \hat{q}' y + \frac{1}{2} y' \hat{Q} y \end{cases}$$

と定義する。 $(\hat{\chi}, \hat{\xi}) \in \mathbb{R} \times C^2(\mathbb{R}^m)$ は (2.7) の解であり $(\text{RS})_\infty$ の最適解を構成する。すなわち (2.9) が成立する。また最適ポートフォリオ戦略 $\hat{\pi} \in \mathcal{A}$ は (2.2) を満たす。

注意 2.4. Black-Scholes 型モデルの結果も導くことができる: $r_1 = 0, r_2 = \lambda_1 = 0, \theta_1 = 0$ (よって $\hat{A} = \hat{C} = 0$ and $\hat{e} = 0$) としてみる。 $(\hat{\chi}, \hat{\xi}) := (\hat{f}, 0)$ が (2.7) を解くこと、そして (2.9) が従うことがわかる。

更に ARE の安定化解が存在するための条件を調べることで以下が得られる。

定理 2.3. (2.1) を仮定する。

1. $\tilde{R} = \tilde{R}(\gamma) := (\eta_0 \eta_0')^{-1} \eta_0 \hat{R} \eta_0' (\eta_0 \eta_0')^{-1}$ と置く。更に $s \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned} \hat{N}(s) = \hat{N}(s; \gamma) &:= \begin{pmatrix} s^2 \tilde{R} + (\hat{A}' \tilde{R} \hat{A} - \hat{C}) & s(\hat{A}' \tilde{R} - \tilde{R} \hat{A}) \\ -s(\hat{A}' \tilde{R} - \tilde{R} \hat{A}) & s^2 \tilde{R} + (\hat{A}' \tilde{R} \hat{A} - \hat{C}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} sI & \hat{A}' \\ -\hat{A}' & sI \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{R} & 0 \\ 0 & \tilde{R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} sI & -\hat{A} \\ \hat{A} & sI \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \hat{C} & 0 \\ 0 & \hat{C} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と定義する。もし $\hat{N}(s) \geq \epsilon I$ が任意の $s \in \mathbb{R}$ とある $\epsilon > 0$ について成立するならば、 $\text{Ric} \hat{H}$ が存在する。更にこれは、もし $\hat{A}$ が安定ならば、正定置である。

2. ある $\bar{\gamma} > 0$ が存在し、 $\text{Ric} \hat{H}(\gamma) > 0$ が任意の $\gamma \in [0, \bar{\gamma})$ について存在する。

注意 2.5. $\gamma < 0$ のときも同様の考察より $-\hat{N}(s) \geq \epsilon I, \forall s \in \mathbb{R}, \exists \epsilon > 0$ が $\text{Ric} \hat{H} > 0$ 存在のための十分条件として得られる。 $-\tilde{R} \geq \epsilon_1 I, \hat{C} \geq \epsilon_2 I$ ($\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$) に留意すればこの条件は自動的に満たされることがわかる。

定理 2.1-3 を組み合わせて大偏差制御問題に関する以下の系を得る。

系 2.1. (2.1) を仮定する。ある $\bar{\gamma} > 0$ が存在し、 $(\text{RS})_\infty$ と (LDC) は任意の $\gamma \in (0, \bar{\gamma})$ について可解である: (2.11) を用いて (2.9) 及び (2.2) が成立する。 $(\Gamma(\gamma) = \gamma \cdot \hat{\chi} \cdot)$ また “双対関係” (2.3) が成立し、ほとんど最適な戦略が (2.4) 式で、任意のターゲット成長率 $k < \Lambda'_\alpha(\bar{\gamma}-)$ に対して構成される。

定理 2.2 より $\hat{Q} := \text{Ric}\hat{H} > 0$ の存在が $(\text{RS})_\infty$ の可解性のための十分条件であることがわかった。そして、これを定理 2.3 と組み合わせて

$$\tilde{\mathcal{D}} \subset \mathcal{D},$$

ただし

$$\begin{cases} \mathcal{D} := \{\gamma \in (0, 1); \Gamma(\gamma) < \infty\} \\ \tilde{\mathcal{D}} := \left\{ \gamma \in (0, 1); \hat{N}(s; \gamma) \geq \epsilon I, \forall s \in \mathbb{R}, \exists \epsilon > 0, \hat{A}(\gamma) : \text{安定} \right\} \end{cases}$$

が得られた。

一方、実対称・安定化可能・正值な ARE の解 $\hat{Q}$ の存在が $(\text{RS})_\infty$ を解くのに「必要」なのかについて、筆者にはまだはっきりわかっていない。ただし、 $m = 1$ （ファクターが 1 次元線形ガウス過程）の場合は例外的に「必要性」を論じることができる。これはこの場合 ARE が単純な 2 次方程式になっていること、また有限期間問題もスカラー値リッカチ微分方程式を明示的に計算することで完全に解かれること、などに因っている。

定理 2.4. (2.1) 及び $m = 1$ を仮定する。 $\tilde{\mathcal{D}}$ は以下の表現を持つ。

$$\tilde{\mathcal{D}} = \left\{ \gamma \in (0, 1); \hat{D}(\gamma) > 0, \hat{A}(\gamma) < 0 \right\},$$

ただし

$$\hat{D} = \hat{D}(\gamma) := \left[\hat{A}^2 - (\eta_0 \hat{R}^{-1} \eta'_0) \hat{C} \right] (\gamma).$$

更に

$$\tilde{\mathcal{D}} \subset \mathcal{D} \subset \text{Cl}(\tilde{\mathcal{D}}).$$

ここで $\text{Cl}(\cdot)$ は集合 $(\cdot)$ の $(0, 1)$ における閉包を表す。

注意 2.6. 定理 2.4 の設定下で、更に集合 $\tilde{\mathcal{D}}$ を明示的に表現してその中に含まれる最大の开区間 $(0, \bar{\gamma})$ を決定すること、そして境界での微分値 $\Gamma'(\bar{\gamma}-)$ ((LDC) の最大のターゲット成長率) を調べること、が可能である。例えば [63] を参照されたい。

REFERENCES

- [1] BAUDOIN, F. AND L. NGUYEN-NGOC : The financial value of weak information on a financial market. *Finance and Stochastics* **8**, 415–435 (2004).
- [2] BIELECKI, T.R. AND S.R. PLISKA : Risk sensitive Intertemporal CAPM, with application to fixed-income management. *IEEE Trans. Automatic Control* (special issue on stochastic control methods in financial engineering) **49**(3), 420–432 (2004).
- [3] BLACK, F. AND M. SCHOLES : The pricing of options and corporate liabilities, *J. Political Economy*, **81**, 637–659 (1973).
- [4] BORDIGONI, G., A. MATOUSSI AND M. SCHWEIZER : A stochastic control approach to a robust utility maximization problem. To appear in *Proceedings of Abel Symposium 2005*, Springer (2006). Downloadable from http://www.math.ethz.ch/~mschweiz/ms_publ_eng.html
- [5] CONT, R. AND P. TANKOV : *Financial Modelling with Jump Processes*, Chapman & Hall/CRC. 2004.
- [6] CORCUELA, J.M., P. IMKELLER, A. KOHATSU-HIGA, AND D. NUALART : Additional utility of insiders with imperfect dynamical information. *Finance and Stochastics* **8**, 437–450 (2004).
- [7] CVITANIC, J. AND I. KARATZAS : On portfolio optimization under “drawdown” constraints. *IMA Lecture Notes in Mathematics & Applications* **65**, 77–88 (1995).
- [8] DELBAEN, F. : *Coherent risk measures*. PISA Lecture notes, 2001. Downloadable from <http://www.math.ethz.ch/~delbaen/>
- [9] DETEMPLE, J., R. GARCIA AND M. RINDISBACHER : A Monte Carlo method for optimal portfolios. *Journal of Finance* **58** (1) 401–446, (2003).

- [10] DETEMPLE, J. AND M. RINDISBACHER : Closed-form solutions for optimal portfolio selection with stochastic interest rate and investment constraints. *Mathematical Finance* **15**(4), 539–568 (2005).
- [11] ELLIOTT, R. J. AND P. KOPP : *Mathematics of Financial Markets*. Springer Finance, Springer-Verlag, New-York, 1999.
- [12] FLEMING, W.H. AND S.J. SHEU : Risk-sensitive control and an optimal investment model. II. *Ann. Appl. Probab.* **12**(2), 730–767 (2002).
- [13] FÖLLMER, H. AND A. SCHIED : *Stochastic Finance, An Introduction in Discrete Time*. Walter de Gruyter, Berlin, New-York, 2002.
- [14] FOUQUE, J.P., G. PAPANICOLAOU AND K.R. SIRCAR : *Derivatives in Financial Markets with Stochastic Volatility*, Cambridge University Press, 2000.
- [15] FUJIWARA, T. : From the minimal entropy martingale measures to the optimal strategies for the exponential utility maximization: the case of geometric Lévy processes. To appear in *Asia-Pacific Financial Markets* (2006).
- [16] FUJIWARA, T. AND Y. MIYAHARA : The minimal entropy martingale measures for geometric Lévy processes. *Finance and Stochastics* **7**, 509–531 (2003).
- [17] FUKAYA, R. : Applications of stochastic flows to optimal portfolio strategies. *Journal of Mathematical Sciences, the University of Tokyo* **12**(3), 349–397 (2005).
- [18] FUKAYA, R. AND T. HONDA : Optimal bond portfolio for investors with long time horizons. *Asia-Pacific Financial Markets* **8**, 291–320 (2001).
- [19] GUNDEL, A. : Robust utility maximization for complete and incomplete market models. *Finance and Stochastics* **9**, 151–176 (2005).
- [20] HATA, H. AND Y. IIDA : A risk-sensitive stochastic control approach to an optimal investment problem with partial information. To appear in *Finance and Stochastics*. (2005)
- [21] HERNÁNDEZ-HERNÁNDEZ, D. AND A. SCHIED : Robust utility maximization in a stochastic factor model. To appear in *Statistics & Decisions* **23**, (4), Special Volume on Risk Measures. (2006).
- [22] HOBSON, D. AND L.C.G. ROGERS : Complete models with stochastic volatility. *Mathematical Finance* **8** (1), 27–48 (1998).
- [23] HU, Y., P. IMKELLER AND M. MÜLLER : Utility maximization in incomplete markets, *Annals of Applied Probability*, **15**(3), 1691–1712 (2005).
- [24] INOUE, A. AND Y. NAKANO : Optimal long term investment model with memory. To appear in *Applied Mathematics and Optimization* (2006).
- [25] ISHIJIMA, H. AND H. SHIRAKAWA : The optimal log-utility asset management under incomplete information. *Asia Pacific Financial Markets*. **7**(2), 145–154 (2000).
- [26] ISHIKAWA, Y. : Optimal control problem associated with jump processes. *Appl. Math. Optim.* **50**(1), 21–65 (2004).
- [27] ISHIMURA, N. AND T. SAKAGUCHI : Exact solutions of a model for asset prices by K. Takaoka. To appear in *Asia Pacific Financial Markets*. (2006).
- [28] KAISE, H. AND S.J. SHEU : Risk sensitive optimal investment: solutions of the dynamical programming equation. *Mathematics of finance. Contemp. Math.*, **351**, Amer. Math. Soc. 217–230 (2004).
- [29] KAMIZONO, K. : Multivariate utility maximization under transaction costs. *Stochastic processes and applications to mathematical finance*, 133–149, World Sci. Publ., River Edge, NJ, (2004).
- [30] KARATZAS, I. : *Lectures on the Mathematics of Finance*. CRM Monograph Series, **8**. American Mathematical Society, 1997.
- [31] KARATZAS, I. AND S. SHREVE : *Methods of Mathematical Finance*. Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [32] KARATZAS, I. AND X. ZHAO : Bayesian adaptive portfolio optimization. Handbook of Mathematical Finance, Optimization, Pricing, Interest-Rates, and Risk Management. *Cambridge University Press*, 632–669 (2001).
- [33] KLODEN, P. E. AND E. PLATEN : *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Springer, New York, 1992.
- [34] KOHATSU-HIGA, A. AND A. SULEM : A large trader-insider model. Proceedings of the Ritsumeikan Congress on Stochastic Process and Mathematical Finance. 2005.
- [35] KOHATSU-HIGA, A. AND A. SULEM : Utility maximization in an insider influenced market. To appear in *Mathematical Finance* (2006).

- [36] KORN, R. : *Optimal Portfolios, Stochastic Models for Optimal Investment and Risk Management in Continuous Time*. World Scientific, Singapore. 1997.
- [37] KUNITA, H. : Representation of martingales with jumps and applications to mathematical finance. “*Stochastic Analysis and Related Topics*”, Advanced Studies in Pure Mathematics **41** 209–232 (2004).
- [38] 国友 直人、高橋 明彦 : **数理ファイナンスの基礎, マリアバン解析と漸近展開の応用**, 東洋経済新報社 2003.
- [39] KUNITOMO, N. AND A. TAKAHASHI : Applications of the asymptotic expansion approach based on Malliavin-Watanabe calculus in financial problems. *Stochastic Processes and Applications to Mathematical Finance*, 195–232, World Scientific (2004).
- [40] KURODA, K. AND H. NAGAI : Risk sensitive portfolio optimization on infinite time horizon. *Stochastics and Stochastics Reports*, **73**, 309–331 (2002).
- [41] LAKNER, P. : Utility maximization with partial information. *Stoch. Proc. and their Appl.* **56**, 247–273 (1995).
- [42] LAKNER, P. : Optimal trading strategy for an investor: the case of partial information. *Stoch. Proc. and their Appl.* **76**, 77–97 (1998).
- [43] MATSUMOTO, K. : Optimal portfolio of low liquid assets with a power utility function. *Journal of Mathematical Sciences, The University of Tokyo*, **10**, 681–726 (2004).
- [44] MATSUMOTO, K. : Optimal portfolio of low liquid assets with a log-utility function. *Finance and Stochastics*, **10**, 121–145 (2006).
- [45] MERTON, R.C. : Lifetime portfolio selection under uncertainty: the continuous time case. *Review of Economics and Statistics*, **51**, 247–257 (1969).
- [46] MERTON, R.C. : Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model. *Journal of Economic Theory*, **3**, 373–413 (1971).
- [47] MERTON, R.C. : An intertemporal capital asset pricing model, *Econometrica*, **41**, 867–887 (1973a).
- [48] MERTON, R.C. : Theory of rational option pricing. *Bell J. Econ. Manag. Sci.*, **4**, 141–183 (1973b).
- [49] 宮原 孝夫 : **株価モデルとレヴィ過程**, 朝倉書店, 2003.
- [50] 長井 英生 : **確率微分方程式**, 共立出版, 1999.
- [51] NAGAI, H. : Optimal strategies for risk-sensitive portfolio optimization problems for general factor models. *SIAM J. Cont. Optim.* **41** 1779–1800 (2003).
- [52] NAGAI, H. : Risk-sensitive portfolio optimization with full and partial information. “*Stochastic Analysis and Related Topics*”, Advanced Studies in Pure Mathematics **41** 257–278 (2004).
- [53] NAGAI, H. : Risk-sensitive quasi-variational inequalities for optimal investment with general transaction costs. To appear in *Asymptotic Analysis*. (2006)
- [54] NAGAI, H. AND S. PENG : Risk-sensitive dynamic portfolio optimization with partial information on infinite time horizon. *Ann. Appl. Probab.* **12**(1), 173–195 (2002).
- [55] NAGAI, H. AND W. RUNGGALDIER : PDE approach to utility maximization for market model with hidden Markov factors. *Suuriken Koukyuuroku* **1462**, RIMS, Kyoto University. 116–130 (2006)
- [56] NISIO, M. : *Stochastic Control Theory*, ISI Lecture notes **9**, 1981.
- [57] OCONE, D. AND I. KARATZAS : A generalized Clark representation formula, with application to optimal portfolios, *Stochastics and Stochastics Reports*, **34**, 187–220 (1991).
- [58] PHAM, H. : A large deviations approach to optimal long term investment. *Finance and Stochastics*, **7**, 169–195 (2003a).
- [59] PHAM, H. : A risk-sensitive control dual approach to a large deviations control problem. *Systems and Control Letters*, **49**, 295–309 (2003b).
- [60] PHAM, H. AND M.-C. QUENEZ : Optimal portfolio in partially observed stochastic volatility models. *Ann. Appl. Probab.* **11**(1), 210–238 (2001).
- [61] SASS, J. AND U. G. HAUSSMANN : Optimizing the terminal wealth under partial information: The drift process as a continuous time Markov chain. *Finance and Stochastic* **5**, 553–577 (2004).
- [62] SCHACHERMEYER, W. : Utility maximisation in incomplete markets. *Lecture Notes in Mathematics*, **1856**, 225–288. Springer. (2004).

- [63] SEKINE, J. : On a large deviations control for a linear-quadratic model: the complete dual solution. To appear in *Proceedings of 4th JSIAM-SIMAI meeting*, (2006a). Downloadable from <http://www.kier.kyoto-u.ac.jp/~sekine/>
- [64] SEKINE, J. : A note on long-term optimal portfolios under drawdown constraints. To appear in *Advances in Applied Probability*. (2006b).
- [65] TAKAHASHI, A. AND N. YOSHIDA : An asymptotic expansion scheme for optimal investment problems, *Statistical Inference for Stochastic Processes*, **7**(2), 153–188 (2004).
- [66] TAKAOKA, K. : A complete-market generalization of the Black-Scholes model. To appear in *Asia-Pacific Financial Markets* (2006).
- [67] TAMURA, T. : Maximizing the growth rate of a portfolio with fixed and proportional transaction costs. *Applied Mathematics and Optimization* **54**(1), 95–116 (2006).

〒 606-8501 京都府左京区吉田本町 京都大学経済研究所
E-mail address: sekine@kier.kyoto-u.ac.jp