21 世紀 COE プログラム：
特異性から見た非線形構造の数学

第 8 回 COE 研究員連続講演会
超平面配置と対数的ベクトル場の幾何

COE 研究員
阿 部　拓 郎

2006.5.30（火），6.6（火）

Series #114. September, 2006

Publication of this series is partly supported by Grant-in-Aid for formation of COE.
'Mathematics of Nonlinear Structures via Singularities'（Hokkaido University）
URL:http://coe.math.sci.hokudai.ac.jp

HOKKAIDO UNIVERSITY
TECHNICAL REPORT SERIES IN MATHEMATICS

#90 J. Saal, 1st COE Lecture Series H^∞-calculus for the Stokes operator on L_q-spaces, 34 pages. 2005.

#91 S. Miyajima, F. Takeo and T. Nakazi (Eds.), 第 13 回関数空間セミナー報告集, 111 pages. 2005.

#92 N. Umeda, 第 4 回ＣＯＥ研究員連続講演会　反応ー拡散方程式の大域解と爆発解について, 8 pages. 2005.

#93 K. Arima, 第 2 回ＣＯＥ研究員連続講演会　極小モデルプログラムの入門およびその正標数への拡張, 25 pages. 2005.

#94 Y. Nakano, 学位論文 Doctoral thesis " OPTIMAL HEDGING IN THE PRESENCE OF SHORTFALL RISK " 43 pages. 2005.

#95 Keiji Matsumoto and Masao Jinzenji (Eds.), 2004 年度談話会・特別講演アブストラクト集, 17 pages. 2005.

#96 T. Ozawa, Y. Giga, S. Jimbo, G. Nakamura, Y. Tonegawa and K. Tsutaya (Eds.), Proceedings of the 30th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 83 pages. 2005.

#97 M. Watanabe, 第 5 回 COE 研究員連続講演会　『逆散乱法』入門, 52 pages. 2005.

#98 M. Takeda, T. Mikami (Eds.), Probability and PDE, 48 pages. 2005.

#99 M. Van Manen, The 6th COE Lecture Series "From the cut-locus via medial axis to the Voronoi diagram and back " 42 pages. 2005.

#100 K. Hayami, T. Nara, D. Furihata, T. Matsuo, T. Sakurai and T. Sakajo (Eds.), 応用数理サマーセミナー「逆問題」, 196 pages. 2005.

#101 B. Forbes, The 7th COE Lecture Series トーリックミラー対称性、56 pages. 2005.

#102 H. Kubo, T. Ozawa and K. Yamauchi, SAPPORO GUEST HOUSE SYMPOSIUM ON MATHEMATICS 20 "Nonlinear Wave Equations", 68 pages. 2005.

#103 A. Miyachi and K. Tachizawa, Proceedings of the Harmonic Analysis and its Applications at Sapporo, 107 pages. 2005.

#104 S. Izumiya (Ed), Y. Numata, J. Ishimoto, I. Sasaki, Y. Nagase and M. Yamamoto, 第 2 回数学総合若手研究集会 - The 2nd COE Conference for Young Researchers -, 274 pages. 2006.

#105 T. Yamamoto, O. Hatori, M. Hayashi and T. Nakazi (Eds.), 第 14 回関数空間セミナー, 112 pages. 2006.

#106 Y. Daido, 学位論文 Doctoral thesis "RECONSTRUCTION OF INCLUSIONS FOR THE INVERSE BOUNDARY VALUE PROBLEM OF HEAT EQUATION USING PROBE METHOD", 68 pages. 2006.

#107 T. Yamamoto, 学位論文 Doctoral thesis "Singular fibers of two colored differentiable maps and cobordism invariants", 333 pages. 2006.

#108 S. Izumiya, Singularity theory of smooth mappings and its applications: a survey for non-specialists, 41 pages. 2006.

#109 J. Cheng, B. Y. C. Hon, J. Y. Lee, G. Nakamura and M. Yamamoto, Inverse Problems in Applied Sciences - towards breakthrough - Organizing Committee, 96 pages. 2006.

#110 K. Matsumoto, 超幾何関数早春学校, 87 pages. 2006.

#111 T. Ozawa, Y. Giga, S. Jimbo, G. Nakamura, Y. Tonegawa, K. Tsutaya and T. Sakajo, The 31th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 91 pages. 2006.

#112 H. Okamoto, D. Sheen, Z. Shi, T. Ozawa, T. Sakajo and Y. Chen, Book of Abstracts of the First China-Japan-Korea Joint Conference on Numerical Mathematics & The Second East Asia SIAM Symposium, 78 pages. 2006.

#113 N. Ishimura, T. Ishiwata, T. Sakajo, T. Sakurai, M. Nagayama, T. Nara, K. Hayami, D. Furihata and T. Matsuo, 応用数理サマーセミナー「確率微分方程式」, 116 pages. 2006.

21 世紀 COE プログラム:
特異性から見た非線形構造の数学

第 8 回 COE 研究員連続講演会
超平面配置と対数的ベクトル場の幾何

COE 研究員
阿部　拓郎

2006.5.30(火), 6.6(火)

北海道大学理学部 3 号館 512 室、4 号館 409 室

超平面配置と対数的ベクトル場の幾何

阿部 拓郎

Abstract

超平面配置とは, ベクトル空間中の超平面の有限族のことをいう. この極めて単純な幾何学的対象にはしかし, 関連する様々な数学分野, 手法による興味深い研究が多く存在する. 本報告においては, まず導入として基本的な用語を定義し, いくつかの結果を紹介する. 次に超平面たちの補集合の部屋の数を, 超平面配置の組み合わせ論的情報から算出するための Zaslavsky の定理を示す. その後, 題目に従い, 超平面配置に付する対数的ベクトル場の概念を導入し, その幾何学的背景が超平面配置に対して指し示す様々な特徴的な振る舞い（寺尾の分解定理, 及び shift 予想など）に関して叙述したい.

0 導入

超平面配置とは, ベクトル空間中の超平面の有限族のことを言う. この極めてシンプルな幾何学的対象にまつわる数学分野は, 組み合わせ論, 代数, 代数幾何, 位相幾何, 微分幾何, 超幾何関数論など多岐にわたり, かつそれらの相互交流が見られる極めて興味深い研究対象である. 本報告においては, 超平面配置の組み合わせ論的側面を基礎とし, それと超平面配置が定める対数的ベクトル場の代数的, あるいは代数幾何的側面との関連を探ってゆく. 特に超平面配置の中でも重要な位置を占めている自由配置と, その代数幾何的な意味での対極といえる安定配置に主眼を当て, 代数幾何的な手法から超平面配置の対数的ベクトル場の解析, 及びその結果を組み合わせ論に再びフィードバックするといった形で, 本分野の最新の研究結果までを報告したい.

本報告の内容は以下の通りである.

第一章においては, 超平面配置の基礎的な定義を行う. 同時に以後頻繁に引用する, いくつかの例も導入する. 第二章においては, 超平面配置の組み合わせ論的側面にスポットを当てて, 記号の定義を行う. 重要な役割を果たすのは, 超平面配置が定める交差格子の上のメビウス関数である. 第三章においては, 実ベクトル空間内の超平面配置に関する結果でもっとも美しいものの一つである, Zaslavsky の定理を紹介し, 完全な証明をつける. この定理は実ベクトル空間内の超平面配置の補空間の部屋（chamber）の数が, 組み合わせ論的に決定されることを主張する結果である. 第四章においては, 超平

面配置から定まる対数的ベクトル場を導入する. これは元来, 斎藤恭司が滑らかな多様体とその上の因子に対して層の形で定義したものであり, 超平面配置の研究に導入されてからはその研究において中心的な役割を果たしている対象である. 第五章においては, 対数的ベクトル場に関連した結果で最も重要なものといえる, 寺尾の分解定理を紹介し, 一部を証明する. 本結果により, 超平面配置の自由性の重要性がクローズアップされる. 他方, 近年吉永や Schenck らの研究により, 対数的ベクトル場の層化が深く研究されている. 第六章においては, その観点から超平面配置に安定性という概念を導入し, コクセター配置の一般化たる A_2 型の超平面配置の族に関して自由性と安定性を考え, その完全な分類を行う. その中で, それぞれの族に見られる組み合わせ論的な興味深い振る舞いに注目することで得られる 3-shift 問題に対して, この分類から部分的な解答を与えたい. 第七章では, 先の分類定理の証明の概略を説明する.

この報告集のうち, 第一章から第五章までの内容に対する参考文献として, [OT] をあげておく. 超平面配置の勉強及び研究を志す人間にとっては, そのあらゆるジャンルに対する基礎とも言うべき教科書である.

1 超平面配置の基礎

$\mathbb{K}$ を体とし, V を $\mathbb{K}$ 上の l 次元ベクトル空間として, 以後固定する.

定義 1.1. $\mathcal{A}$ が（V 中の）超平面配置であるとは, $\mathcal{A}$ が V 中の超平面の有限族であるときにいう.

定義 1.2. 超平面配置 $\mathcal{A}$ に対して, $T(\mathcal{A}) := \bigcap_{H\in\mathcal{A}} H$ と定める. $T(\mathcal{A}) \neq \emptyset$ のとき, $\mathcal{A}$ を中心的（あるいは中心的な配置）であると呼ぶ.

V^* の $\mathbb{K}$ 上の基底 $\{x_1, \dots, x_l\}$ を一つ固定し, $S := \mathrm{Sym}(V^*) \simeq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_l]$ と置く.

定義 1.3. 各超平面 $H \in \mathcal{A}$ に対して, S の元 $\alpha_H := c_1x_1 + \ldots + c_lx_l - c_0$ ($c_i \in \mathbb{K}$) を, $\{\alpha_H = 0\} = H$ たるものとして一つ固定する（スカラー倍のずれを除いて一意的）. またこれらの元を用いて, $\mathcal{A}$ の定義式 $Q(\mathcal{A})$ を

$$Q(\mathcal{A}) := \prod_{H\in\mathcal{A}} \alpha_H$$

で定義する.

定義 1.4. 超平面配置 $\mathcal{A}$ に対し, ある超平面 $H \in \mathcal{A}$ を一つ固定する. このとき

$$\begin{aligned} \mathcal{A}' : &= \mathcal{A} \setminus H, \\ \mathcal{A}'' : &= \mathcal{A}' \cap H \end{aligned}$$

とおき, $(\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}'')$ を（$\mathcal{A}$ の H に関する）三つ組みと呼ぶ.

例 1. *(i)* $l = 1$ のとき, すなわち一次元ベクトル空間の上の超平面配置のことを点配置と呼ぶ. 点配置 $\mathcal{A}$ が中心的であるための必要十分条件は, $|\mathcal{A}| = 1$ たることである.

(ii) $Q(\mathcal{A}) = \prod_{i=1}^{l} x_i$ で定義される超平面配置を（l 次元）ブール配置と呼ぶ. ブール配置 $\mathcal{A}$ に対して, $T(\mathcal{A})$ は原点のみからなる集合である.

(iii) $l \geq 2$ とし, $H_{ij} := \ker(x_i - x_j)$ $(i < j)$ とする. このとき $\mathcal{A} := \{H_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq l)\}$ で定義される超平面配置を（l 次元の）組みひも配置と呼ぶ. $T(\mathcal{A}) = \{c \cdot (1, 1, \dots, 1) \mid c \in \mathbb{K}\} \simeq \mathbb{K}$ である.

2 超平面配置と組み合わせ論

超平面配置は, 組み合わせ論と非常に関係が深く, また相性も良い. この章では, 超平面配置の組み合わせ論的観点を紹介してゆく.

定義 2.1. 超平面配置 $\mathcal{A}$ に対して, その交差格子 $L(\mathcal{A})$ を,

$$L(\mathcal{A}) := \{\bigcap_{H \in \mathcal{B}} H \mid \mathcal{B} \subset \mathcal{A}\}$$

で定義する. さらにこの集合に半順序 $X \leq Y$ $(X,\ Y \in L(\mathcal{A}))$ を

$$X \leq Y \iff X \supset Y$$

で定める.

明らかに, 上の順序において V は最小元となる. この交差格子を, 超平面配置の組み合わせ論的情報と考える.

定義 2.2. $X \in L(\mathcal{A}) =: L$ とするとき,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_X : &= \{H \in \mathcal{A} \mid H \supset X\}, \\ L_X = L(\mathcal{A})_X : &= \{Y \in L(\mathcal{A}) \mid Y \supset X\} \end{aligned}$$

と定める.

定義から明らかなように, $X \subset Y \iff X \geq Y$ のとき, $\mathcal{A}_X \supset \mathcal{A}_Y$, $L(\mathcal{A})_X \supset L(\mathcal{A})_Y$ がそれぞれ成立する. 交差格子上の関数として, 重要な役割を果たすのが以下のメビウス関数である.

定義 2.3. $L := L(\mathcal{A})$ と置く．このとき関数

$$\mu : L \times L \to \mathbb{Z}$$

がメビウス関数であるとは, μ が以下の二つの条件を満たすときに言う．

(1) $X,\ Y \in L,\ Y \leq X$ のとき,

$$\begin{aligned} Y = X \text{ であれば, } \quad & \sum_{Y \leq Z \leq X} \mu(Y, Z) = 1, \\ Y \neq X \text{ であれば, } \quad & \sum_{Y \leq Z \leq X} \mu(Y, Z) = 0. \end{aligned}$$

(2) $Y \not\leq X$ であれば, $\mu(Y, X) = 0$.

注意 2.1. 定義 *2.3* において, メビウス関数 μ が $L(\mathcal{A}) \times L(\mathcal{A})$ 上に取る値は, 定義の条件 *(1)* と *(2)* から唯一つに決まることが直ちに解る．よってある関数 $\nu : L(\mathcal{A}) \times L(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{Z}$ が定義 *2.3* の条件を満たすならば, それは μ と一致する．

特に $\mu(Y, X)$ $(Y \leq X)$ の $Y = V$ たる場合をよく用いる．言葉の乱用ではあるが, 以下しばしば

$$\mu(X) := \mu(V, X) \ (X \in L(\mathcal{A}))$$

たるメビウス関数を用いる．この μ は, 古典整数論において定義されたメビウス関数の一般化となっている．その証左として, 以下の反転公式が存在する．

命題 2.4 (メビウスの反転公式). A をあるアーベル群とし, $f,\ g : L := L(\mathcal{A}) \to A$ たる関数を取る．この時, 以下が成立：

$$g(X) = \sum_{Y \in L_X} f(Y) \iff f(X) = \sum_{Y \in L_X} \mu(Y, X) g(Y).$$

証明. まず $f(X) = \sum_{Y \in L_X} \mu(Y, X) g(Y)$ を仮定する．このとき

$$\begin{aligned} \sum_{Z \in L_X} f(Z) &= \sum_{Z \in L_X} \sum_{Y \in L_Z} \mu(Y, Z) g(Y) \\ &= \sum_{Y \in L_X} \Big(\sum_{Y \leq Z \leq X} \mu(Y, Z) \Big) g(Y) \\ &= g(X) \end{aligned}$$

となって証明が終わる．逆も同様に証明できる． □

定義 2.5.

$$\begin{aligned} M(\mathcal{A}): &= V \setminus \bigcup_{H\in\mathcal{A}} H. \\ C(\mathcal{A}): &= M(\mathcal{A}) \text{ における連結成分全体の集合.} \\ BddC(\mathcal{A}): &= M(\mathcal{A}) \text{ における有界な連結成分全体の集合.} \end{aligned}$$

定義 2.6. $X \in L(\mathcal{A})$ に対し, $r(X)$, $r(\mathcal{A})$ を以下で定める.

$$\begin{aligned} r(X): &= \operatorname{codim}_V(X), \\ r(\mathcal{A}): &= \max_{X\in L(\mathcal{A})} r(X). \end{aligned}$$

定義 2.7.

$$\begin{aligned} \pi(\mathcal{A},t): &= \sum_{X\in L(\mathcal{A})} \mu(X)(-t)^{r(X)} : \mathcal{A} \text{ のポアンカレ多項式.} \\ \chi(\mathcal{A},t): &= \sum_{X\in L(\mathcal{A})} \mu(X)t^{\dim(X)} : \mathcal{A} \text{ の特性多項式.} \end{aligned}$$

とそれぞれ定義する. これら二つの多項式の間には

$$\pi(\mathcal{A},t) = (-t)^l \chi(\mathcal{A}, -t^{-1})$$

たる関係式が存在する.

3 Zaslavsky の定理

この章では, 超平面配置が定める組み合わせ論的不変量のもっとも基礎的な情報である, 超平面配置の補集合の部屋の数について考える. この関係は Zaslavsky によって, 以下の定理の形に纏められた.

定理 3.1 (Zaslavsky). $\mathcal{A}$ を $\mathbb{R}^l$ $(l \geq 1)$ 内の超平面配置とする. このとき, 以下の等式が成立.

$$|C(\mathcal{A})| = \pi(\mathcal{A},1).$$

特に $r(\mathcal{A}) = \dim V$ であれば, 以下の等式も成立.

$$|BddC(\mathcal{A})| = |\pi(\mathcal{A},-1)|.$$

よって特に, 超平面配置の補集合 $M(\mathcal{A})$ の連結成分の数（すなわち部屋の数）は, 組み合わせ論的情報 $L(\mathcal{A})$ から, より詳しく述べれば, $L(\mathcal{A})$ が定めるポアンカレ多項式 $\pi(\mathcal{A},t)$ から定まることが解る. 以下, この定理の証明を [OT] にそって与える. まず準備として, 以下の二つの補題を示す.

補題 3.2. $X, Y \in L := L(\mathcal{A})$ で, $Y \leq X$ たるものを取る.

$$S(Y,X) := \{\mathcal{B} \subset \mathcal{A} \mid \mathcal{A}_Y \subset \mathcal{B},\ T(\mathcal{B}) = X\}$$

と置こう. このとき,

$$\mu(Y,X) = \sum_{\mathcal{B}\in S(Y,X)} (-1)^{|\mathcal{B}\setminus\mathcal{A}_Y|} \tag{1}$$

が成立.

証明. まず, 次の等式に注意する.

$$\bigcup_{Y\leq Z\leq X} S(Y,Z) = \{\mathcal{A}_Y \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{A}_X\}$$

ここで左辺の和は disjoint であることも直ちに解る. ここで (1) の右辺を $\nu(Y,X)$ と置くと,

$$\begin{aligned}
\sum_{Y\leq Z\leq X} \nu(Y,Z) &= \sum_{Y\leq Z\leq X} \sum_{\mathcal{B}\in S(Y,Z)} (-1)^{|\mathcal{B}\setminus\mathcal{A}_Y|} \\
&= \sum_{\mathcal{A}_Y\subset\mathcal{B}\subset\mathcal{A}_X} (-1)^{|\mathcal{B}\setminus\mathcal{A}_Y|} \\
&= \sum_{\mathcal{C}\subset\mathcal{A}_X\setminus\mathcal{A}_Y} (-1)^{|\mathcal{C}|} \qquad (2)
\end{aligned}$$

となる. 明らかに

$$\begin{aligned}
(2) = 1 &\iff X = Y, \\
(2) = 0 &\iff X \neq Y
\end{aligned}$$

であるから, $\mu : L \times L \to \mathbb{Z}$ は定義 2.3 の条件を満たす. メビウス関数はその条件から唯一つ決定される関数であったから, $\mu = \nu$ が成立. $\square$

定理 3.3. $\mathcal{A} \ni H$ を一つ固定し, これから定まる三つ組みを $(\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}'')$ と書く. このとき

$$\pi(\mathcal{A},t) = \pi(\mathcal{A},t) + t\pi(\mathcal{A}'',t)$$

が成立.

証明. まず, 次の等式が成立することに注意する.

$$\pi(\mathcal{A},t)=\sum_{\mathcal{B}\subset\mathcal{A},\ T(\mathcal{B})\neq\emptyset}(-1)^{|\mathcal{B}|}(-t)^{r(\mathcal{B})}. \tag{3}$$

$\emptyset=\mathcal{A}_V$ に注意すると, これは以下のように証明される.

$$\begin{aligned}\pi(\mathcal{A},t) &= \sum_{X\in L(\mathcal{A})}\mu(X)(-t)^{r(X)}\\ &= \sum_{X\in L(\mathcal{A})}\sum_{\mathcal{B}\in S(V,X)}(-1)^{|\mathcal{B}\setminus\mathcal{A}_V|}(-t)^{r(\mathcal{B})}\\ &= \sum_{\mathcal{B}\subset\mathcal{A},\ T(\mathcal{B})\neq\emptyset}(-1)^{|\mathcal{B}|}(-t)^{r(\mathcal{B})}\end{aligned}$$

さて, (3) の右辺の和を $R'+R''$ と分ける. ただしここで R' は $\mathcal{B}\not\ni H$ たる部分配置 $\mathcal{B}\subset\mathcal{A}$ に関する, R'' は $\mathcal{B}\ni H$ たる部分配置 $\mathcal{B}\subset\mathcal{A}$ に関する和である. 上の計算より, 直ちに

$$R'=\pi(\mathcal{A}',t)$$

がわかる. R'' について考えよう. $H\in\mathcal{B}\iff\mathcal{A}_H=\{H\}\subset\mathcal{B}$ に注意する. $T(\mathcal{B})=:Y$ とおけば, $\mathcal{B}\in S(H,Y)$ となることがわかる. $L'':=L(\mathcal{A}'')$ とすると,

$$\begin{aligned}R'' &= \sum_{H\in\mathcal{B}\subset\mathcal{A}}(-1)^{|\mathcal{B}|}(-t)^{r(\mathcal{B})}\\ &= \sum_{Y\in L''}\sum_{\mathcal{B}\in S(H,Y)}(-1)^{|\mathcal{B}|}(-t)^{r(\mathcal{B})}\\ &= t\sum_{Y\in L''}\sum_{\mathcal{B}\in S(H,Y)}(-1)^{|\mathcal{B}\setminus\mathcal{A}_H|}(-t)^{r(Y)-1}\\ &= t\sum_{Y\in L''}\mu(H,Y)(-t)^{r(Y)-1}\\ &= t\pi(\mathcal{A}'',t)\end{aligned}$$

となり, 証明が終わる. □

定理 3.1 の証明. $|C(\mathcal{A})|=\pi(\mathcal{A},1)$ を示す. $\mathcal{A}=\emptyset$ ならば, 定理は正しい. また $l=1$ の場合も容易に定理は正しいことが確かめられる. よって以下, 次元 l と超平面配置の本数 $|\mathcal{A}|$ に関する帰納法で証明する. まず容易に,

$$|C(\mathcal{A})|=|C(\mathcal{A}')|+|C(\mathcal{A}'')|$$

となることが確かめられる．よって帰納法とあわせて，

$$\begin{aligned}\pi(\mathcal{A},1) &= \pi(\mathcal{A}',1)+\pi(\mathcal{A}'',1)\\ &= |C(\mathcal{A}')|+|C(\mathcal{A}'')|\\ &= |C(\mathcal{A})|\end{aligned}$$

となって，証明が終わる．有界領域に関しても，証明は同様に出来る． □

4　超平面配置の対数的ベクトル場

ここまでの章で，超平面配置 $\mathcal{A}$ のベクトル空間内での補集合の連結成分の数 $|C(\mathcal{A})|$ は，$\mathcal{A}$ の組み合わせ論的情報である交差格子 $L(\mathcal{A})$ から決定されることがわかった（より正確には，$L(\mathcal{A})$ から定まるポアンカレ多項式 $\pi(\mathcal{A},t)$ から）．では，このほかにどのような量が組み合わせ論的に決まる，あるいは決まらないのであろうか．ここではその一例として，次のような問題を考えてみよう．

問題． ポアンカレ多項式が $\pi(\mathcal{A},t)=\prod_{i=1}^{l}(1+d_it)$ と分解しているなら，その因子に現れる整数 $(d_1,\ldots,d_l)$ はどのような意味を持つか？

　ここで $(d_1,\ldots,d_l)$ は組み合わせ的に決まる量であることに注意する．この問題について一定の解答を与えたのが，寺尾の分解定理である．寺尾の分解定理により，超平面配置の組み合わせ論的情報と，それが定める対数的ベクトル場と呼ばれる幾何学的対象の間に，極めて美しい関係のあることが証明される．本章と次章を通して，この結果を証明することを目標とする．

仮定． 以下断りがない限り，全ての超平面配置は空ではなく，中心的であるとする．特に適当に座標を取り替えて，全ての超平面が原点を通るものとする．

定義 4.1.

$$\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(S) := \oplus_{i=1}^{l} S\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

$$D(\mathcal{A}) := \{\theta\in\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(S)\mid \theta(\alpha_H)\in S\alpha_H\ (\forall H\in\mathcal{A}\}.$$

　$D(\mathcal{A})$ を $\mathcal{A}$ に付随した対数的ベクトル場と呼ぶ．幾何学的には，$D(\mathcal{A})$ はベクトル空間 V の中のベクトル場であって，$\mathcal{A}$ の元であるような超平面に接しているようなもの全体を集めたもの，となっている．$\mathrm{rank}_S\, D(\mathcal{A})=l$ となっていることに注意．さて，$\theta\in\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(S)$ が次数 $p\ (\in\mathbb{Z}_{\geq 0})$ の斉次元であるとは，$\theta=\sum_{i=1}^{l} f_i\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ であって全ての $f_i\neq 0$ に対して $\deg(f_i)=p$ が成立しているときに呼ぶこととしよう．

定義 4.2. 超平面配置 $\mathcal{A}$ が自由である，あるいは自由配置であるとは，$D(\mathcal{A})$ が階数 l の自由 S 加群となっているときに言う．このとき，$D(\mathcal{A})$ の S 上の斉次基底を $\theta_1, \dots, \theta_l$ としたとき，自由配置 $\mathcal{A}$ の *exponents* を $\exp(\mathcal{A})$ と書き，以下で定義する．

$$\exp(\mathcal{A}) := (\deg(\theta_1), \dots, \deg(\theta_l)).$$

明らかに $\exp(\mathcal{A})$ は $D(\mathcal{A})$ の基底の取り方によらない．

一般的に対数的ベクトル場は自由加群ではない．このような例は，容易に多数構成することが出来る．自由性を判定するための，強力な方法を以下で紹介しよう．$\theta_1, \dots, \theta_l \in \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(S)$ に対して，S 係数の $(l \times l)$ 行列 $M(\theta_1, \dots, \theta_l)$ を，

$$M(\theta_1, \dots, \theta_l) := \{\theta_j(x_i)\}_{1 \le i,j \le l}$$

で定義する．

定理 4.3 (齋藤の判定法). $\theta_1, \dots, \theta_l \in D(\mathcal{A})$ に対して，

$$\theta_1, \dots, \theta_l \text{ は } D(\mathcal{A}) \text{ の自由基底} \iff \det M(\theta_1, \dots, \theta_l) \in \mathbb{K}^* \cdot Q(\mathcal{A}).$$

ただしここで $\mathbb{K}^* := \mathbb{K} \setminus \{0\}$ とする．

証明. まず，次の事実を示す．

$$\det M(\theta_1, \dots, \theta_l) \in S \cdot Q(\mathcal{A}).$$

これを示すために，$H \in \mathcal{A}$ を固定する，$\alpha_H = x_1 + \dots$ としても一般性を失わない．$M(\theta_1, \dots, \theta_l)$ の一行目を $(\theta_1(x_1), \theta_2(x_1), \dots \theta_l(x_1))$ から $(\theta_1(\alpha_H), \theta_2(\alpha_H), \dots \theta_l(\alpha_H))$ へと変えた行列を M' とおくと，$\det M(\theta_1, \dots, \theta_l) = \det M'$ である．よって

$$\det M(\theta_1, \dots, \theta_l) \in S\alpha_H$$

となり，証明が終わる．それでは，定理を示そう．

まず，$\theta_1, \dots, \theta_l$ が $D(\mathcal{A})$ の自由基底であるとする．上で示したことにより，

$$M(\theta_1, \dots, \theta_l) = fQ \in SQ \ (Q := Q(\mathcal{A}))$$

とかけている．よって $f \in \mathbb{K}^*$ を示せば十分．$H \in \mathcal{A}$ を取り，$Q_0 := Q(\mathcal{A})/\alpha_H$ とおこう．$H = \{x_1 = 0\}$ としてもよい．すると，

$$Q\frac{\partial}{\partial x_1},\ Q_0\frac{\partial}{\partial x_2},\ \dots, Q_0\frac{\partial}{\partial x_l}$$

は全て $D(\mathcal{A})$ の元である．よって

$$S \cdot fQ \ni \det M(Q\frac{\partial}{\partial x_1},\ Q_0\frac{\partial}{\partial x_2},\ \dots, Q_0\frac{\partial}{\partial x_l}) = QQ_0^{l-1}$$

であるから, f は $(Q_0)^{l-1} = (Q(\mathcal{A})/\alpha_H)^{l-1}$ の因数. これは全ての H について成立するので, $f \in \mathbb{K}^*$ が解る.

続いて, $\det M(\theta_1, \ldots, \theta_l) \in \mathbb{K}^* Q$ とする. $\det M(\theta_1, \ldots, \theta_l) = Q$ としても一般性を失わない. 線型代数より, 任意の $\theta \in D(\mathcal{A})$ に対して $Q\theta = \sum_{i=1}^{l} f_i \theta_i$ $(f_i \in S)$ とかけていることが解る. よって $Q | f_i$ $(\forall i)$ を言えば十分. これは

$$S \cdot Q^2 \ni Q \det M(\theta_1, \ldots, \theta_{i-1}, \theta, \theta_{i+1}, \ldots, \theta_l) = f_i \det M(\theta_1, \ldots, \theta_l) = f_i Q$$

より, 直ちに従う. □

系 4.4. 二次元ベクトル空間内の超平面配置は全て自由.

証明. $\mathcal{A} = \emptyset$ ならば自明より, $\mathcal{A} \neq \emptyset$ としてよい. 適当に座標を取り替えることで, $\{x_1 = 0\} \in \mathcal{A}$ としてよい. このとき

$$\begin{aligned} \theta_1 : &= x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}, \\ \theta_2 : &= \frac{Q(\mathcal{A})}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} \end{aligned}$$

と置けば, $\theta_i \in D(\mathcal{A})$ $(i = 1, 2)$ は直ちに解り, 定理 4.3 よりこれらが自由基底となっていることは明らか. □

さて, $D(\mathcal{A})$ に関するいくつかの性質を見ておこう. まず明らかなことであるが, $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ たる関係のある超平面配置については, $D(\mathcal{B}) \supset D(\mathcal{A})$ が成立する. さらにオイラー微分 θ_E を

$$\theta_E := \sum_{i=1}^{l} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

と定義すると, $\theta_E \in D(\mathcal{A})$ もすぐにわかる. さらに対数的ベクトル場には, その双対的概念として次の対数的微分加群が存在する.

定義 4.5.

$$\Omega(\mathcal{A}) := \{\omega \mid V \text{ 上の有理 1 形式で}, \ Q(\mathcal{A})\omega, \ Q(\mathcal{A})d\omega \text{ はともに正則.}\}$$

するとこれら二つの加群については, 次の著しい性質がある.

定理 4.6.

$$D(\mathcal{A}) \simeq \Omega(\mathcal{A})^*, \ \Omega(\mathcal{A}) \simeq D(\mathcal{A})^*.$$

特に $D(\mathcal{A})$, $\Omega(\mathcal{A})$ はともに反射的.

反射的であるという事実からも, 系 4.4 は導かれる.

5 分解定理.

それでは第四章の最初で提示した問題に対する解答を与える.

定理 5.1 (寺尾の分解定理). $\mathcal{A}$ が自由配置で, $\exp(\mathcal{A}) = (d_1, \ldots, d_l)$ となっていれば, $\pi(\mathcal{A}, t) = \prod_{i=1}^{l}(1 + d_i t)$ とポアンカレ多項式は分解している. よって特に, 自由配置 $\mathcal{A}$ の *exponents* は $L(\mathcal{A})$ から決定される.

本章では, この定理を証明することを目標とする. 証明の方針は, 論文 [ST] に沿って行う. かなり細かく証明を記述するが, いくつか省く箇所もあるので, 完全な証明には, 原論文を参照されたい. まず次の準備を行う.

定義 5.2.

$$\begin{aligned} \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}^{p}(S): &= \wedge^p \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(S). \\ D^p(\mathcal{A}): &= \{\theta \in \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}^{p}(S) \mid \theta(Q, f_2, \ldots, f_p) \in SQ(\mathcal{A})\ (\forall f_i \in S)\}. \end{aligned}$$

次数付き S 加群 M に対して, そのポアンカレ多項式 $P(M, x)$ を

$$P(M, x) := \sum_{p \in \mathbb{Z}} (\dim_{\mathbb{K}} M_p) t^p$$

で定義する. ただしここで M_p は次数付き加群 M の次数 p の部分全体である. このとき, 次の定理が成立.

定理 5.3 ([ST], Theorem 1.2).

$$\chi(\mathcal{A}, t) = \lim_{x \to 1} (-1)^l \sum_{p \geq 0} P(D^p(\mathcal{A}), x)(t(x-1) - 1)^p.$$

まず定理 5.3 を認めて, 定理 5.1 を証明しよう. $\mathcal{A}$ を自由配置とし, $D(\mathcal{A})$ の斉次基底を $\theta_1, \ldots, \theta_l$ と取り, $\deg(\theta_i) = d_i$ と置こう. すると定理 4.3 より $D^p(\mathcal{A})$ もやはり自由加群で, 基底として $\{\theta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{i_p}\}_{i_1 < \imath_2 < \ldots < \imath_p}$ が取れることが解る. $\deg(\theta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{i_p}) = \sum_{j=1}^{p} d_{i_j}$ に注意すると,

$$\begin{aligned} P(D^p(\mathcal{A}), x) &= \sum_{k \geq 0,\ d_{i_1} < \ldots < d_{i_p}} {}_{l+k-1}C_k\, x^k \cdot x^{d_{i_1} + \ldots + d_{i_p}} \\ &= \sum_{i_1 < \ldots < i_p} \frac{x^{d_{i_1} + \ldots + d_{i_p}}}{(1-x)^l} \end{aligned}$$

が解る. すると

$$\sum_{p=0}^{l} P(D^p(\mathcal{A}), x) y^p = \prod_{i=1}^{l} \frac{1 + y x^{d_i}}{1 - x}$$

が解り, ここで定理 5.3 を用いれば

$$\begin{aligned}\chi(\mathcal{A},t) &= \lim_{x\to 1}(-1)^l\prod_{i=1}^{l}\frac{1+x^{d_i}(t(x-1)-1)}{1-x}\\ &= \lim_{x\to 1}(-1)^l\prod_{i=1}^{l}(1+x+x^2+\ldots+x^{d_i-1}-x^{d_i}t)\\ &= \prod_{i=1}^{l}(t-d_i)\end{aligned}$$

を得る. ポアンカレ多項式と特性多項式の間には $\pi(\mathcal{A},t)=(-t)^l\chi(\mathcal{A},-t^{-1})$ たる関係式があるので, 定理 5.1 の証明が終わる.

それでは定理 5.3 の証明を行う. 証明はいくつかの段階にわけて行われる.

命題 5.4 ([ST], Proposition 6.2). $G : L = L(\mathcal{A}) \to \mathbb{Q}[t]$ を, 以下の四条件を満たすような関数とする.

(1) $G(V)=t^l$.

(2) $V\neq X\in L$ に対して, $G(X)|_{t=1}=0$.

(3) $t^{\dim X}|G(X)$.

(4) $\deg_t(\sum_{Y\in L_X}\mu(Y,X)G(Y))\leq \dim X$.

するとこのとき,

$$G(X)=\chi(\mathcal{A}_X,t)$$

が成立する.

証明. $G'(X):=\sum_{Y\in L_X}\mu(Y,X)G(Y)$ とおこう. まず (3) より $t^{\dim X}|G'(X)$ が成立. かつ (4) より $\deg_t G'(X)\leq \dim X$ であるから, ある関数 $g : L\to\mathbb{Q}$ が存在して, $G'(X)=g(X)t^{\dim X}$ がわかる. すると (1) と (2) より,

$$\begin{aligned}g(X) &= G'(X)|_{t=1}=\sum_{Y\in L_X}\mu(Y,X)G(Y)|_{t=1}\\ &= \mu(V,X)\end{aligned}$$

を得る. よって $G'(X)=\mu(V,X)t^{\dim X}$ である. よって命題 2.4 より

$$G(X)=\sum_{Y\in L_X}G'(Y)=\sum_{Y\leq X}\mu(Y)t^{\dim Y}=\chi(\mathcal{A}_X,t)$$

となって証明が終わる. □

それでは

$$\Psi(\mathcal{A};x,t) := (-1)^l \sum_{p\geq 0} P(D^p(\mathcal{A}),x)(t(x-1)-1)^p$$

とおき, 上の命題で $G(X) := \Psi(\mathcal{A}_X;1,t)$ とおいて条件を全て確かめることで, 定理 5.3 を示そう. ただしここで, 次の事実を使っている.

命題 5.5 ([ST], Proposition 5.3). $\Psi(\mathcal{A};x,t)$ は変数 x と t に関する多項式.

よって上の記号でいうところの $G(X)$ は定義可能である.

さて, 条件 (1) は明らかである. 条件 (2) を見よう. $V \neq X \in L(\mathcal{A})$ をとる. このとき $\mathcal{A}_X \neq \emptyset$ であることに注意する. ここで $H \in \mathcal{A}_X$ を固定して得られる次の複体を考えよう.

$$0 \to D^l(\mathcal{A}_X) \xrightarrow{\partial} D^{l-1}(\mathcal{A}_X) \xrightarrow{\partial} \ldots \xrightarrow{\partial} D(\mathcal{A}_X) \xrightarrow{\partial} D^0(\mathcal{A}_X) \to 0. \qquad (4)$$

ここで $\theta \in D^p(\mathcal{A}_X)$ に対して $\partial(\theta) \in D^{p-1}(\mathcal{A}_X)$ を,

$$\partial(\theta)(f_2,\ldots,f_p) := \frac{\theta(\alpha_H, f_2,\ldots,f_p)}{\alpha_H}$$

で定める. $\partial \circ \partial = 0$ は容易に解る. かつ $\partial(\theta) = 0$ たる $\theta \in D^p(\mathcal{A}_X)$ に対して, オイラー微分 $\theta_E \in D^1(\mathcal{A}_X)$ を用いることで,

$$D^{p+1}(\mathcal{A}_X) \ni \theta_E \wedge \theta \overset{\partial}{\mapsto} \theta \in D^p(\mathcal{A}_X)$$

が示せるので, (4) は完全列である. これを用いてポアンカレ多項式を計算することで,

$$(-x)^l \sum_{p\geq 0} P(D^p(\mathcal{A}_X),x)(-x^{-1})^p = \sum_{p\geq 0} P(D^p(\mathcal{A}_X),x)(-x^{l-p}) = 0$$

がわかる. ゆえに

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}[x,x^{-1}] \ni \Psi(\mathcal{A}_X;x,x^{-1}) &= (-1)^l \sum_{p\geq 0} P(D^p(\mathcal{A}_X),x)(x^{-1}(x-1)-1)^p \\ &= (-1)^l \sum_{p\geq 0} P(D^p(\mathcal{A}_X),x)(-x^{-p}) = 0\end{aligned}$$

が解る. これに $x=1$ を代入することで, $\Psi(\mathcal{A}_X;1,1) = G(X)|_{t=1} = 0$ が解る.

続いて (3) を確かめる. これは, $\mathcal{A}_X = \mathcal{A}_X^{\mathrm{ess}} \times \Phi_X$ と, 次の命題より直ちに従う. ただしここで $\mathcal{A}_X^{\mathrm{ess}}$ は, $\mathcal{A}_X$ を $l - \dim X$ 次元ベクトル空間 V/X へ制限して考えたもので, Φ_X は $(\dim X)$ 次元ベクトル空間の中の, 空集合からなる超平面配置である.

命題 5.6 ([ST], Proposition 5.8). $\mathcal{A}_i$ $(i=1,2)$ を, ベクトル空間 V_i 内の超平面配置とする.

$$\begin{aligned} V: &= V_1 \oplus V_2, \\ \mathcal{A}: &= \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2, \\ S: &= Sym(V^*) \end{aligned}$$

と定義するとき, 以下が成立.

$$D(\mathcal{A}) \simeq S \cdot D(\mathcal{A}_1) \otimes_{\mathbb{K}} S \cdot D(\mathcal{A}_2)$$

最後に条件 (4) を確かめる. この部分が定理 5.3 の証明の要諦であり, 難しい部分である. 証明は省くが, 何段階かの議論を経て得られる次の結果が重要である.

命題 5.7 ([ST], Proposition 6.9).

$$(x-1)^{\dim X}\Big(\sum_{Y \in L(\mathcal{A})_X} \mu(Y,X)P(D^p(\mathcal{A}),x)\Big)$$

は多項式.

これを認めて, 条件 (4) を確かめよう. 示すべきは式

$$\sum_{Y \in L(\mathcal{A})_X} G(Y) = \sum_{p \geq 0}(-1)^l\Big(\sum_{Y \in L(\mathcal{A})_X} \mu(Y,X)P(D^p(\mathcal{A}),x)(t(x-1)-1)^p\Big)\Big|_{x=1} \tag{5}$$

の t に関する次数が $\dim X$ 以下となることであるが, これは先の命題と合わせれば明らかである.

これらの結果を合わせることで, 定理 5.3 の証明は終わる.

少し話はそれるが, 定理 5.1 は後に Mustaţă 及び Schenck によって, 対数的ベクトル場の層化のチャーン多項式の言葉に, 以下のように拡張, 翻訳された.

定理 5.8 ([MS], Theorem 4.1). $\mathcal{A}$ を, l 次元ベクトル空間 V 内の中心的な超平面配置とする. 対数的ベクトル場の層化 $\widetilde{D(\mathcal{A})}$ が $\mathbf{P}(V)$ 上局所自由であれば, そのチャーン多項式 $\widetilde{D(\mathcal{A})}$ と $\mathcal{A}$ の間に等式

$$c_t(\widetilde{D(\mathcal{A})}) = \pi(\mathcal{A}, -t)$$

が成立する.

定理 5.1 からわかる通り, 超平面配置の理論において, 特に対数的ベクトル場の研究においては, 自由配置は極めて重要な役割を果たす. それではこの自由配置というカテゴリは, 全ての超平面配置の中でどのような位置を占めているのだろうか. それに関連する有名な未解決問題が, 次の寺尾予想である.

予想 5.9 (寺尾予想). 超平面配置 $\mathcal{A}$ が自由配置であるかどうかは, その組み合わせ論的情報 $L(\mathcal{A})$ からのみ決まる.

この予想は全ての次元において未解決問題である（無論, 全ての超平面配置が自由であるような 2 次元は除く）.

注意 5.1. 定理 *5.1* の逆は正しくない. つまり, ポアンカレ多項式が分解していても, 自由でない超平面配置は存在する. 例として

$$Q(\mathcal{A}) = XYZ(Y-X+1)(Y+X+1)(Y-2X+1)(Y+2X+1)$$

で定義される三次元ベクトル空間内の超平面配置のポアンカレ多項式は $\pi(\mathcal{A},t) = (1+t)(1+3t)^2$ と分解しているが, これは自由配置ではない. 証明はいくつかの方針があるが, 後に述べる吉永による自由性の特徴づけを用いる方針がもっとも容易である.

本章の最後に, 自由配置をめぐるいくつかの重要な結果を紹介しておく. 最初に紹介する自由配置に関する加除定理は, 超平面配置の組み合わせ論的側面を, 自由配置と見事に結びつけた結果である.

定理 5.10 (自由配置に関する加除定理). 超平面配置 $\mathcal{A} \neq \emptyset$ を取る. その中の一枚の超平面 $H \in \mathcal{A}$ を固定し, これから構成される三つ組み $(\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}'')$ を考える. このとき, 以下の三つのうちの二つが成立していれば, 残りの一つも成立する.

(a) $\mathcal{A}$ は自由配置で, $\exp(\mathcal{A}) = (d_1, d_2, \ldots, d_i, \ldots, d_{l-1}, d_l)$

(b) $\mathcal{A}'$ は自由配置で, $\exp(\mathcal{A}') = (d_1, d_2, \ldots, d_i, \ldots, d_{l-1}, d_l - 1)$

(c) $\mathcal{A}''$ は自由配置で, $\exp(\mathcal{A}'') = (d_1, d_2, \ldots, d_i, \ldots, d_{l-1})$

この加除定理は, 自由配置を作るためのもっとも有名, かつ有効な方法である. 他方, 自由配置と関連の深い概念に, Ziegler によって導入された重複度付き超平面配置がある.

定義 5.11 ([Z]). $(\mathcal{A}, m)$ が重複度付き超平面配置であるとは, $\mathcal{A}$ が超平面配置であり, m が $\mathcal{A}$ から $\mathbb{Z}$ への関数であるときに言う. m は重複度と呼ばれる.

大雑把に言えば, 超平面配置の元であるような各超平面に, 重さが付いたものが重複度付き超平面配置である. こちらの言葉を用いれば, 重複度が恒等的に1であるような重複度付き超平面配置が, いわゆる超平面配置である. 重複度付き超平面配置についても, 一般の超平面配置と同様に対数的ベクトル場や自由性が, 以下のように定義できる.

定義 5.12. 重複度付き超平面配置 $(\mathcal{A}, m)$ に対して, その対数的ベクトル場 $D(\mathcal{A}, m)$ を,

$$D(\mathcal{A}, m) := \{\theta \in \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(S) \mid \theta(\alpha_H) \in S \cdot \alpha_H^{m(H)} \ (\forall H \in \mathcal{A})\}.$$

として定義する. $D(\mathcal{A}, m)$ が自由 S 加群となるとき, $(\mathcal{A}, m)$ は自由配置である, あるいは自由であるといい, $\theta_1, \ldots, \theta_l$ をその斉次基底としたとき, 自由配置 $(\mathcal{A}, m)$ の *exponents* を

$$\exp(\mathcal{A}, m) := (\deg(\theta_1), \ldots, \deg(\theta_l))$$

と定義する.

証明は省くが, 重複度なしの超平面配置のときと同様, $D(\mathcal{A}, m)$ は反射的であることが知られている. よって特に二次元ベクトル空間内の重複度付き超平面配置は自由である.

重複度付き超平面配置は, 代数幾何的な視点から見ると非常に自然な対象である. これらがもっとも自然に現れる例として, 超平面配置の制限があげられるので, それを見ておこう. $\mathcal{A}$ を空でない超平面配置とし, その中から一枚の超平面 $H \in \mathcal{A}$ を固定する. 先に見たとおり, この一枚から三つ組み $(\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}'')$ が定まる. このとき, 一次元低いベクトル空間に定義された超平面配置 $\mathcal{A}''$ に, 自然な重複度 $m_H : \mathcal{A}'' \to \mathbb{Z}$ を, 以下で定義することが出来る.

$$\mathcal{A}'' \ni H'' \mapsto m_H(H'') := |\{H' \in \mathcal{A}' \mid H \cap H' = H''\}.$$

すなわち, H'' の文字通りの重複度を測るものとして, 定義されるのである. 重複度を考えるという観点は代数幾何, スキーム論では自然な考え方であり, これらの観点から吉永は次の興味深い自由配置の特徴づけに成功した.

定理 5.13. $\mathcal{A}$ を l 次元ベクトル空間中の空でない超平面配置とする. 対数的ベクトル場 $D(\mathcal{A})$ の層化 $\widetilde{D(\mathcal{A})}$ は, これまでに見た一般論から, $l-1$ 次元射影空間 $\mathbf{P}(V)$ 上の反射層である. $H \in \mathcal{A}$ を任意に一枚取ると, これは自然に $\mathbf{P}(V)$ の元と思うことが出来る. それを $\overline{H} \subset \mathbf{P}(V)$ と書こう. このとき, 以下が成立.

(i) $l \geq 4$ のとき, $\mathcal{A}$ が自由であるための必要十分条件は, 全ての $x \in \overline{H}$ に対して $\widetilde{D(\mathcal{A})}_x$ が自由となり, かつ重複度付き超平面配置 $(\mathcal{A}'', m_H)$ が自由となることである.

(ii) 三次元空間内の超平面配置 $\mathcal{A}$ が自由となるための必要十分条件は, $c_2 = d_1 d_2$ となっていることである. ただしここで

$$\begin{aligned} \pi(\mathcal{A}, t) &= (1+t)(1+c_1 t + c_2 t^2), \\ \exp(\mathcal{A}'', m_H) &= (d_1, d_2) \end{aligned}$$

である.

この結果から, 超平面配置の自由性は一次元低いベクトル空間における重複度付き超平面配置の自由性にほぼ帰着できることがわかった. 特に三次元ベクトル空間内の場合においては, 組み合わせ論的情報たるポアンカレ多項式と, 二次元空間内の重複度付き超平面配置の exponents が解れば, 自由性が完全に特定できることとなる. しかし一般に, 二次元ベクトル空間内においてすら, 重複度付き自由配置の exponents を求めることはきわめて難しいことが知られており, 今後の研究課題といえる.

超平面配置から定まる対数的ベクトル場が射影空間上になす層の性質は, その由来が特別なものであるがゆえに非常に特殊なものと思われがちであるが, 時にその性質は全ての反射層へと一般化できることもある. 以下の定理は, 定理 5.13 の結果を全ての反射層へと一般化したという, その一例である.

定理 5.14 ([AY], Theorem 0.2). *E を, 射影空間 $\mathbf{P}^n_{\mathbb{K}}$ $(n \geq 3)$ 上の反射層とする. このとき E が直線束の直和に分裂しているための必要十分条件は, ある $H \in \mathbf{P}^n_{\mathbb{K}}$ が存在して, $E|_H$ が直線束の直和に分裂していることである.*

この結果は, E がベクトル束の場合には古くから知られていた結果であり, その結果の反射層のカテゴリへの拡張である（ちなみに捩れのない層に対しては, この結果は正しくない）. 同時に先にも言及したとおり, 超平面配置から構成される対数的ベクトル場たる反射層において成立していた結果の, 全ての反射層への一般化でもある. このように超平面配置からの示唆を元に, 反射層の性質を考えるという試みは, 様々な研究発展の可能性がある方針であると思われる（例えば [MS] を参照）.

6 A_2 型の超平面配置

本章を, 次のような問題意識を基礎として始めたいと思う. すなわち, 対数的ベクトル場の層化が保持する各種性質のうち, 組み合わせ論的に決まりうるもの, あるいは組み合わせ論と相性がよいものはなにがあるだろうか. 寺尾予想は, 組み合わせ論と自由性, すなわち層の理論の言葉で言うならベクトル束の分裂という, 古典的かつ重要な未解決問題とを組み合わせるものであった. ここでは, ベクトル束のモジュライ理論において重要な役割を果たす, 安定性という概念にスポットを当てて考えて行きたい. ここで安定性, 及び半安定性とは, 以下で定義される性質である.

定義 6.1. n (≥ 1) 次元射影空間 $\mathbf{P}^n_{\mathbb{K}}$ 上の反射層 E が安定であるとは全ての部分層 $F \subset E$ で $0 < \mathrm{rank}(F) < \mathrm{rank}(E)$ たるものに対して

$$\mu(F) := \frac{c_1(F)}{\mathrm{rank}(F)} < \mu(E)$$

が成立するときにいい, 半安定であるとは

$$\mu(F) \leq \mu(E)$$

たる時に言う.

この性質を, 特に三次元ベクトル空間内で考えてみたい.

以下, 本章の記号を次のように固定する. $\mathbb{K}$ を標数 0 の代数的閉体とし, $V \simeq \mathbb{K}^3$ たる三次元ベクトル空間及びその基底 $S := \mathrm{Sym}(V^*) \simeq \mathbb{K}[X, Y, Z]$ を固定する. 超平面配置 $\mathcal{A}$ は断りがない限り空ではないとし, 適当に座標変換することで常に $\{Z = 0\} \in \mathcal{A}$ を満たしているとする. かつ中心的であり, $T(\mathcal{A})$ は常に原点を含んでいるものとしよう. すると先の章における議論により, $D(\mathcal{A}) \ni \theta_E = X\dfrac{\partial}{\partial X} + Y\dfrac{\partial}{\partial Y} + Z\dfrac{\partial}{\partial Z}$ が成立している.

定義 6.2. 階数 2 の S 加群 $D_0(\mathcal{A})$ を,

$$D_0(\mathcal{A}) := D(\mathcal{A})/S \cdot \theta_E \simeq \{\theta \in D(\mathcal{A}) \mid \theta(Z) = 0\}.$$

で定義し, その層化を

$$E(\mathcal{A}) := \widetilde{D_0(\mathcal{A})}$$

と置く. これは $\mathbf{P}^2_{\mathbb{K}}$ 上の階数 2 の反射層であるが, 反射層の一般論により, これはベクトル束（局所自由層）となることがわかる. 超平面配置 $\mathcal{A}$ が安定, あるいは半安定であるとは, $E(\mathcal{A})$ が安定, あるいは半安定なベクトル束であるときにいう.

それでは本章の主たる興味の対象である A_2 型の超平面配置を定義する. 容易にわかるように, これは古典的な A_2 型のコクセター配置の一般化といえるものである.

定義 6.3. 三次元ベクトル空間内の超平面配置の族 $\{\mathcal{A}(k)\}$ $(k \in \mathbb{Z}_{>0})$ が A_2 型の超平面配置の族であるとは, ある整数 a, b, c, f が存在して, $\mathcal{A}(k)$ が以下の定義式たちで定まっているときに言う.

$$\begin{aligned}
X &= (-k+1)Z, (-k+2)Z, \ldots, (k+c-1)Z, \\
Y &= (-k+1)Z, (-k+2)Z, \ldots, (k+f-1)Z, \\
X+Y &= (-k+a)Z, (-k+a+1)Z, \ldots, (k+a+b-1)Z, \\
Z &= 0.
\end{aligned}$$

A_2 型の超平面配置の族を構成する各超平面配置 $\mathcal{A}(k)$ を, 単純に A_2 型の超平面配置と呼ぶ. これらは余次元 2 で正規交差ではないことに注意する. 余次元 2 で正規交差であるような超平面配置の安定性に関しては, [DK] などにおいていくつかの考察があるが, そうでないものに対する考察は一切行われていない. よって A_2 型の配置の安定性について考察を行うことには意味がある.

他方, この A_2 型の配置に関しては, 組み合わせ論的な興味深い振る舞いが起きることが観察されている. それは以下の補題として纏められる.

補題 6.4. $\{\mathcal{A}(k)\}$ を A_2 型の超平面配置の族とし, $\chi_0(\mathcal{A},t) := \dfrac{\chi(\mathcal{A},t)}{t-1}$ とおく. このとき $k \gg 0$ に対して, 等式

$$\chi_0(\mathcal{A}(k+1),t) = \chi_0(\mathcal{A}(k),t-3)$$

が成立する. 特に定理 *5.8* により, チャーン多項式の間の等式

$$c_t(E(\mathcal{A}(k+1))) = c_t(E(\mathcal{A}(k)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(-3))$$

が成り立つ.

この結果は, A_2 型の超平面配置の族に関して, 組み合わせ論的に統制の取れた振る舞いがあることを示唆している. 特に 3 とは, A_2 型のコクセター群あるいはルート系のコクセター数でもあることも, より上の等式に含まれる意味を想起させる. これを元に, 吉永は下のような予想を提起した.

予想 6.5 (吉永). k が十分大きい場合, 同型

$$E(\mathcal{A}(k+1)) \simeq E(\mathcal{A}(k)) \otimes \mathcal{O}(-3)$$

が成立.

これを 3-shift 問題と呼ぶ. 同種の定義及び問題設定は B_2 型に対しても行うことができ, そのコクセター数及びずれ方が 4 であることを鑑みて 4-shift 問題と呼ばれる. またこの問題は, 寺尾の分解定理の際に説明した, 超平面配置の組み合わせ論的な振る舞いの裏には, その対数的ベクトル場の幾何学が存在する, といった考え方, 研究方針に基づいたものでもある.

以下, この問題に対して, 超平面配置の安定性及び自由性の側面からアプローチしたい. 結果として纏めると, 次のように書き下すことが出来る.

定理 6.6 ([A1], Theorem 0.3, 0.4). A_2 型の超平面配置の族 $\{\mathcal{A}(k)\}$ $(k \in \mathbb{Z}_{>0})$ が, $f=0$ あるいは $f=1$ を満たしているとする. このとき

$$N := 2a+b-c-f$$

と置くと, 以下が成立.

(i) ある整数 k_0 が存在して, 全ての $k \geq k_0$ に対して $\mathcal{A}(k)$ が自由となるための必要十分条件は $N = 0, 1, 2$ となることである.

(ii) ある整数 k_0 が存在して, 全ての $k \geq k_0$ に対して $\mathcal{A}(k)$ が安定となるための必要十分条件は, $N \leq -1$ あるいは $3 \leq N$ となっていることである.

この定理の系として, 今まで挙げてきたいくつかの問題に対する答えが導かれる.

系 6.7. *(i)* k が十分大きいとき, A_2 型の超平面配置の安定性及び自由性は, 組み合わせ論的に決定される.

(ii) 3-*shift* 問題は, $-1 \leq N \leq 3$ を満たす場合には正しい.

注意 6.1. 先述したとおり, 全く同種の問題の定式化が B_2 型に対しても可能である. 詳しくは *[A2]* を参照されたいが, そこでは B_2 型の超平面配置の自由性及び安定性を完全に分類しており, その系としてそれらが組み合わせ論的に決まることが示されている. また同様に, 4-*shift* 問題に対しても部分的な解答を与えている.

注意 6.2. 系 *6.7*は, 正規交差でないような超平面配置の安定性と組み合わせ論的情報との関連を明確にした初めての結果である. さらに上の注意にある B_2 型に関する結果ともあわせて, 次のような予想を提起したい.

予想 6.8. 超平面配置の安定性は, 組み合わせ論的情報にのみ依存して決まる.

7 定理 6.6 の証明

それでは定理 6.6 の証明の概略を述べる. 詳細は [A1] を参照されたい. 本質的には同じことなので, $f = 0$ の場合のみを述べる.

第一段階. チャーン多項式.

まずチャーン多項式を算出する. 定理 5.8 より, そのためには超平面配置のポアンカレ多項式を算出すればよく, それは地道な計算で以下のように求めることが出来る.

補題 7.1. A_2 型の超平面配置の族 $\{\mathcal{A}(k)\}$ に対し, $k \gg 0$ ならば以下が成立.

$$\begin{aligned} c_t(D_0(\widetilde{\mathcal{A}(k)})) &= \frac{\pi(\mathcal{A}(k), -t)}{1-t} \\ &= 1 - (6k + b + c - 2)t + [(3k + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c - 1)^2 + \frac{1}{4}(2a + b - c)^2 - \frac{1}{4}]t^2. \end{aligned}$$

第二段階. 自由性.

[W] の結果より, ある一般的な条件を満たす, 三直線からなる二次元重複度付き超平面配置 $(\mathcal{A}, m)$ に対して, $\exp(\mathcal{A}) = (d_1, d_2)$（ただし $|d_1 - d_2| = 0$ あるいは 1）となることが知られている. これに定理 5.13 をあわせて, A_2 型の超平面配置を $\{Z = 0\}$ へと制限することで, 定理 6.6 の自由性に関する分類を得ることが出来る.

第三段階. 安定性.

$N = 0, 1, 2$ のときの自由性は上で見たので, $N = -1,\ 3$ の場合を次に見てみる. このとき, 容易にわかることだが, ある平面 H_k が存在して,

$$\mathcal{A}(k) \cup H_k \text{ あるいは } \mathcal{A}(k) \setminus H_k \text{ は自由で } \exp(\mathcal{A}(k)) = (1, u, u)$$

となっていることが, 第一段階と第二段階をあわせればわかる. そこで次の定理とあわせて, 安定性が示せる.

定理 7.2 ([A2], Theorem 2.5). $\mathcal{A}$ を三次元ベクトル空間内の自由でない中心的な超平面配置とし, ある平面 H が存在して, $\mathcal{A} \cup H$ あるいは $\mathcal{A} \setminus H$ が自由であるとする. このとき, 以下が成立.

$$\mathcal{A} \text{ は安定な超平面配置 } \iff \exp(\mathcal{A} \cup H)\ (\textit{resp:}\ \exp(\mathcal{A} \setminus H)) = (1, u, u)\ (\exists u \in \mathbb{Z}$$

よってこの $N = -1,\ 3$ の場合の安定性を出発点として, 以下の Schenck の判定法を用いることで安定性の分類が終わる.

定理 7.3 ([Sch], Theorem 4.5). $\mathcal{A}$ を三次元ベクトル空間内の中心的な超平面配置とする. $H \in \mathcal{A}$ を一つ固定し, $(\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}'')$ を H に関する三つ組みとする. このとき $\mathcal{A}'$ が安定で, かつ $|\mathcal{A}''| > \dfrac{|\mathcal{A}| + 1}{2}$ ならば, $\mathcal{A}$ も安定な配置である.

注意 7.1. B_2 型の超平面配置の族に関する分類も, この章と同様の手法で証明される. 詳しくは *[A2]* を参照されたし.

References

[A1] T. Abe, The stability of the family of A_2-type arrangements. Journal of Mathematics of Kyoto University. To appear.

[A2] T. Abe, The stability of the family of B_2-type arrangements. Hokkaido University Preprint Series in Mathematics **790** (2006).

[AY] T. Abe and M. Yoshinaga, Splitting criterion for reflexive sheaves. arxiv, math.AG/0503710.

[DK] I. Dolgachev and M. Kapranov, Arrangements of hyperplanes and vector bundles on $\mathbf{P}^n$, Duke. Math. J. **71** (1993), no. 3, 633–664

[MS] M. Mustaţă and H. Schenck, The module of logarithmic p-forms of a locally free arrangement. J. Algebra **241** (2001), no. 2, 699–719.

[OSS] C. Okonek, M. Schneider, H. Spindler, Vector Bundles on Complex Projective Spaces. **3** (1980), Birkhäuser.

[OT] P. Orlik and H. Terao, Arrangements of hyperplanes. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **300**. Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[Sch] H. Schenck, Elementary modifications and line configurations in $\mathbf{P}^2$. Comment. Math. Helv. **78** (2003), no. 3, 447–462.

[ST] L. Solomon and H. Terao, A formula for the Characteristic polynomial of an arrangement. Adv. in Math. **64** (1987), 305–325.

[W] A. Wakamiko, On the Exponents of 2-Multiarrangements. Master dissertation.

[Y1] M. Yoshinaga, Characterization of a free arrangement and conjecture of Edelman and Reiner. Invent. Math. **157** (2004), no. 2, 449–454.

[Y2] M. Yoshinaga, On the freeness of 3-arrangements. Bull. London Math. Soc. **37** (2005), no. 1, 126–134.

[Z] G. M. Ziegler, Multiarrangements of hyperplanes and their freeness. in *Singularities* (Iowa City, IA, 1986), 345–359, Contemp. Math., **90**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989.