HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	非線形科学と複雑ネットワーク
Author(s)	郡, 宏; 蔵本, 由紀
Description	ネットワーク科学最前線ー世界の”つながり”を知る科学と思考(2)
Citation	数理科学, 521, 62-69
Issue Date	2006-11
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/17218
Type	journal article
File Information	suuri521.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

非線形科学と複雑ネットワーク

郡　宏・蔵本　由紀

1. はじめに –非線形科学としてのネットワーク理論–

最近,「非線形科学と複雑系科学はどう違うのか」,「ネットワーク理論」はこれらと関係があるのかないのか，あるとすればどういう関係か」などという質問によく出会う．広く認知された統一見解などあるはずもないが，類似の疑問はさまざまな形で問われ，少なからず混乱を引き起こしていると思われるので，これに対する一つの考え方を提示するのは意味があるだろう．本節で述べるのは「このように考えてはどうだろうか」という一つの提案である．

そのために，まず非線形科学なるものがわが国に根付くようになった歴史的経緯を少し述べてみたい．これには日本独自の事情もあるが，より広い視点からは別途の考察に委ねるとして，ごく約めれば以下のように述べられるだろう．曲りなりにも非線形科学と呼びうるものは１９７０年代の前半に現れたと見てよい．当初は「非線形科学」とは呼ばれず,「非線形・非平衡統計力学」の名の下に，既に名成り功遂げた著名な統計物理学者のリーダーシップで頻繁に研究会が開かれるという「上からの革新」から始まった．周知のように，線形非平衡状態の統計力学は当時すでに確固たる理論的基盤があったが,「これからは非線形非平衡だ」という共通の認識があって，線形理論で世界をリードしたわが国の統計力学を非線形でも，という強い意識が底流にあったようである．このように，非線形現象の科学は統計力学に濃く彩られていた． 同じ頃，I. プリゴジンの散逸構造概念が，P. グランスドルフとの共著「構造・安定性・ゆらぎ—— その熱力学的理論」の出版（１９７１年)[1] とともに当時の研究者に新鮮な刺激をあたえ，新しい科学への予感を増幅させる要因として国内の動向に大きな影響をあたえたが，こちらのほうは非平衡統計力学というより非平衡熱力学の色彩が濃いものであった．

統計力学にせよ熱力学にせよ，初期の非線形科学はエネルギーやエントロピーといった物理的概念と密接に関わっていた．しかし，現実世界の複雑現象の探求にとってこれは一種の桎梏でもある．熱対流実験やベルーソフ・ジャボチンスキー反応での魅力的なパターンは，このような桎梏から解き放たれて「散逸力学系」というものを基本に据えた科学の到来を促していた．この動きを決定的なものにしたのは何といってもカオス概念による学会の席巻であろう．非平衡だの開放系だのエントロピーだと言っていてはカオス現象の理解は少しも進まない．カオス科学に多少とも関わった人はこのことを思い知らされているはずである．もちろん，非平衡状態の統計力学や熱力学が研究するに足りないと思われていたわけではないが，急ピッチの科学の展開にフォローするためには，気にはなってもひとまず目をつぶらざるを得なかったのである．このような，いったんは脇に置かれ

た重要な問題が最近一部の研究者によって真剣に検討されているが，これがどのように評価されるかはもう少し時代を経ないとわからないだろう．

このように，力学系（散逸力学系だけでなく保存力学系を含んでもよいが）を基礎に据えることで非線形科学は非線形科学らしくなったと言える．本項の主題でもある非線形振動子の同期現象にしても，物理やもの`の言葉から離れて，純粋にリズムを刻むものの結合集団という数理的な対象となることで飛躍的な理論的深化が達成される．

物理離れ・もの`離れが進行するにつれて，いわゆる非線形現象に関わる科学者たちの間でひとつの重要な考えかたがしだいに共有されるようになってくる．それは，もの`としての差異を徹底して相対化し，さまざまな異なる対象に共有される数理構造を軸にして複雑な現象世界に接近していこうとする科学の態度である．たとえば，カオスが生み出す複雑さは，観察対象を熱対流に限ってその複雑な流れをどれほど詳しく調べても理解できない．それは複雑さを生み出す動的ルールの本質を知ってこそ理解できるものであり，翻ってそのような理解は流体の枠を遥かに超えた様々なカオス現象の理解へ道を開く．科学としてのそのような態度を共有する限り，それを非線形科学と呼ぼうが複雑系科学と呼ぼうがあまり重要ではない．強いて違いを言うなら，複雑系科学が単純なルールが生む複雑現象の豊かさ`により強い関心を示すのに対して，非線形科学は豊かさを生む基本構造をより執拗に問う姿勢が見られるという違いだろうか．

もの`を度外視した，複雑世界に通底する数理構造としてフラクタルほどわかりやすくまた重要な概念もないだろう．一般に特徴的なスケールをもたないランダム現象，統計法則としては冪法則で表されるような現象がこの世界にいかに広く存在しているかはフラクタル概念の普及から明らかになってきたことである．フラクタルとそれに関連する諸現象の科学がもの`との関連を徹底して相対化した目で見る科学の中心に居座っているのは，それゆえ当然と言えよう．

ここまで述べれば，ネットワーク科学が非線形科学・複雑系科学といかに親和性の高いものかはもはや説明を要しないだろう．ノードとリンクから成る抽象化されたネットワークの上にどのような実体が乗るか，それをこと細かく問うことなしに理解できることが山ほどある．とりわけ，スケールフリー性という，フラクタル世界と重なりをもつネットワークの遍在性が明らかにされたことで，最も物離れしたレベルにおける考察から現実のネットワークについての多くの重要な性質が明らかになってきた．それは，ロジスティックの分岐構造の研究から現実のカオス発生へのシナリオが理解されることや，結合振動子モデルの研究から蛍の集団発光同期やサーカディアン・リズムの発生機構が理解されることと，科学的探究の態度としては同一である．再度言うがこうした態度を共有する科学をこそ非線形科学あるいは複雑系科学と呼びたい．したがって，「非線形」も「複雑」も実はあまり重要な修飾語ではないのである．

2. ネットワーク上のダイナミクス：形と機能

ネットワークの科学は，実在のネットワークのノードとリンクの関係のみを抽出して，その統計的性質を記述する所から始まった．90 年代後半にスケールフリーネットワークの存在が知られて以後，ありとあらゆるネットワークが研究対象になり，ほんの数年間で爆発的な進展を遂げてしまった．今ではほぼ研究され尽くされたのではないかという印象すら覚えるほどだ．しかしながら，これはネットワーク科学の終わりを意味するものではなく，新たな段階に進んだことを意味するのではないだろうか．つまり，ネットワークの「骨組み」の基本的理解が得られた今，ネットワーク上で繰り広げられるダイナミクスを記述する段階に来たのである．

多くのネットワークは固有の機能を担っており，機能は往々にしてダイナミクスによって形成される．例として，細胞ネットワークが構成する生体組織を考えてみよう．細胞ネットワークは，リンク (細胞間結合経路) を伝わる細胞伝達物質やイオ

ンなどの化学物質と，ノード (細胞) での代謝が複雑に結合したシステムである．組織のネットワーク構造は，機能を実現するべく適切にデザインされているはずである．例えば，心筋細胞のネットワーク構造，つまり心臓の形が，ポンプという動的な機能を実現するためにデザインされていることは疑いようもない．神経細胞になると，その結合経路は複雑で直感的に捕らえづらいものになるが，「形」という言葉をトポロジカルな性質に拡張して考えれば，やはり各機能に応じた特徴的な「形」を持っていると言えよう．

本項では，複雑なネットワーク上で繰り広げられる非線形ダイナミクスの中で最も理論研究が進んでいる題材の１つである，振動子集団の同期・非同期転移について紹介する．振動子集団の同期現象には，重要な応用が多数ある[2~5]．もっともインパクトのある例は，我々の概日 (つまり約 24 時間周期の) リズムであろう．哺乳類では，視交叉上核と呼ばれる脳内組織が体全体の一日のリズムを指揮するペースメーカーとなっている[6]．この組織を構成する神経細胞は，単一細胞で約 24 時間のリズムを生成することができる自励振動子である．視交叉上核では，この細胞集団が細胞間結合を介して振動のタイミングを同期させ，マクロなリズムを作り上げている[7]．つまり，視交叉上核という振動子ネットワークの同期能力があってはじめて，体内時計は機能するのである．

では，同期を能率的に達成するためには，ネットワークはどのような「形」を持つべきであろうか？この問いを軸にして，最近の研究をいくつか紹介しよう．

3. ２つの振動子の同期現象

まず，ネットワーク系に進む前の準備として，結合された２つの振動子の数理モデルとその性質について説明する．ここでいう「振動子」とは，(生) 化学反応系で頻繁に現れるリミットサイクル振動子，つまり安定な周期軌道解を持つシステムのことを意味する．これは散逸系 (エネルギーの流入と散逸が存在する系) に特有な振動子であり，例えば，振子時計や前述の時計細胞の周期的なダイナミクスはリミットサイクル振動子として記述される．リミットサイクル振動子は，エネルギー保存系の振動子，つまり，普通の振子のように摂動を受けると自己のエネルギー状態が変化し，結果として，解軌道や振動周期が変化してしまう受動的な振動子とは質的に異なるものである．

少し具体的に考えた方が理解しやすいので，ホイヘンスのエピソード[8] を紹介してから数理モデルの解説に入ろう．ホイヘンスは 17 世紀に活躍した科学者で、土星の輪の発見や，光の波動説とホイヘンスの原理の提唱者として有名であるが，振子時計の発明者でもある．ホイヘンスの自作時計は一日の誤差が数分程度と極めて精巧だったが，完全に同一な「1 秒」を刻む時計を複数作ることは当然不可能である．ホイヘンスは彼の自作の振子時計２つを一本の板に固定しておいたところ，驚くべきことを発見した．２つの振り子時計の振子の振動周期 (つまり両者の「１秒」) が，完全に一致していたのである．これが同期現象の世界で最初の発見である．ホイヘンスはさらに詳しく観察をし，板を伝わる微弱な揺れを通して振子時計同士が相互作用し，それによって同期が引き起こされたこと、さらに、２つの時計が常に逆向きに振れる状態 (つまり逆相状態) に落ち着くことを明らかにした．しかし，この現象が数理的に理解できるようになったのは 20 世紀になってからである．以下，対象の詳細に捕われないという非線形科学の精神にのっとって，一般的な数理モデルの構築と解析を通し，同時に，振子時計の問題に１つの「解法」を示す．

リミットサイクル振動子のダイナミクスは，通常，多変数の複雑な非線形微分方程式で記述され，またその解軌道は少数の例外を除いて解析的に求まらない．まして，複数の相互作用する振動子を直接的に数理的に取り扱うことは極めて困難である．そこで，運動方程式を近似理論を用いて簡略化することから始める．ここで用いる近似理論は「位相縮約法」と呼ばれ，文献 3) で確立されてい

る．紙面の都合上，完全な解説はできないので，詳細は文献 3, 4) を参照して頂きたい．なお，この近似理論は，運動方程式に対する近似法 (摂動論) であり，解軌道に対する近似法ではないことを注意しておく．

まず，２つの相互作用する振動子の一般的なモデル方程式を次のような形で記述する．

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}_1 &= \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_1) + \epsilon \boldsymbol{G}_1(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2),\\ \dot{\boldsymbol{x}}_2 &= \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_2) + \delta\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_2) + \epsilon \boldsymbol{G}_2(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1)\end{aligned} \tag{1}$$

ここで，ベクトル $\boldsymbol{x}_i$ $(i = 1, 2)$ は，振動子 i の状態を表す変数である．$\boldsymbol{F}(+\delta\boldsymbol{F}_2)$ は振動子の固有 (つまり外部との接触が一切ない状況) のダイナミクスを記述し，振動子の性質の差を $\delta\boldsymbol{F}$ で表す．$\boldsymbol{F}$ と $\delta\boldsymbol{F}$ は一般には複雑な非線形関数であるが，ここでは，$\epsilon = 0$ のときに，それぞれがリミットサイクル軌道 (以下，単に周期軌道と呼ぶ) に収束することのみを仮定しておく．ϵ は正の定数であり，相互作用の強さを表すパラメタである．$\boldsymbol{G}_i(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_{i'})$ は，振動子 i' が振動子 i に与える影響を記述する．

ここで，摂動論を用いるために以下の２つを仮定する．まず，２つの振動子の性質が近いこと，つまり $\delta\boldsymbol{F}$ が $\boldsymbol{F}$ に比べて，周期軌道の近傍で十分小さいことを仮定する．さらに，相互作用が弱いこと，つまり ϵ が小さいことと仮定する．この仮定のもとでは，振動子はそれぞれ，固有の類似した安定周期解の近傍を運動する。したがって、各振動子の自由度は実効的に１次元であり，各振動子の運動を１変数のみで記述できそうなものである．この予想は摂動論の意味で正しく，式 (1) は ϵ の最低次で，次の方程式に簡単化される．

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_1 &= \omega_1 + \epsilon \boldsymbol{h}(\phi_1) \cdot \boldsymbol{g}_1(\phi_1, \phi_2),\\ \dot{\phi}_2 &= \omega_2 + \epsilon \boldsymbol{h}(\phi_2) \cdot \boldsymbol{g}_2(\phi_2, \phi_1).\end{aligned} \tag{2}$$

この式のパラメタや関数の定義の説明は少し後回しにして，位相 ϕ_i がどのように定義されているかを先に説明する。

まず，振動子 1 の固有のダイナミクス，$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ において，状態 $\boldsymbol{x}$ に対する位相 $\phi(\boldsymbol{x})$ を定義する．周期軌道を $\boldsymbol{x}^*$ と記す．最所に，位相を周期軌道の運動に対して，位相が一定の固有振動数 $\omega_1 \equiv T_1/2\pi$(T_1 は周期軌道の固有周期) で増加するように定義する．つまり，$\dot{\phi}(\boldsymbol{x}^*) = \omega_1$ とする．$\phi(\boldsymbol{x}_1^*) = 0 (= 2\pi)$ の点をどう決めるかに任意性があるが，これは好きに決めて構わない．次に，位相の定義を軌道以外に拡張するのだが，次のように行うのがもっとも自然である．任意の初期点から始まるダイナミクスに対し，周期 T_1 ごとのストロボ的観測をする．すると，周期軌道上の点は不動点である．周期軌道外のある初期点 $\boldsymbol{x}^0$ は，$t \to \infty$ で，周期軌道に収束するのだが，この収束点の位相 ϕ が，点 $\boldsymbol{x}^0$ の位相であると定義する．つまり，ある時刻に位相 ϕ を持つ状態の集合は，$t \to \infty$ で同一の点に収束する．同一の位相を持つ状態の集合 $\mathrm{I}(\phi)$ は，振動子の状態空間を n 次元とすると $n-1$ 次元の超曲面であり，アイソクロン (等位相曲面) と呼ばれる (図 3 参照)．なおこの位相の定義は，$\dot{\phi}(\boldsymbol{x}) = \omega_1$ という条件を状態空間全体に課すことと同一である．振動子の性質の差が小さいことを仮定しているので，この位相の定義を他の振動子に適応することができる．つまり，振動子 i の位相は，$\phi_i \equiv \phi(\boldsymbol{x_i})$ と定義される．

さて，モデル (2) について説明する．ω_i は振動子それぞれの固有振動数で，$\boldsymbol{F}(+\delta\boldsymbol{F}_i)$ が決定する．２つの振動子の固有の性質が近いという仮定から，$\omega_1 - \omega_2 \equiv \delta\omega$ は微小量である．両者の結合は，右辺第２項に変化しており，$\boldsymbol{h}$ と $\boldsymbol{g}$ は ϕ_i の 2π 周期関数である．関数 $\boldsymbol{g}_i$ は $\boldsymbol{G}_i$ を単に変数変換したものである．一方，関数 $\boldsymbol{h}$ は状態変数の変換 $(\boldsymbol{x}_i \to \phi_i)$ に伴って現れる関数であり，振動子 1 の状態空間の構造，つまり，$\boldsymbol{F(x_i)}$ が決定する．関数 $\boldsymbol{h}$ は，元の変数 $\boldsymbol{x}_i$ で受ける影響が，新しい変数 ϕ_i でどのような影響に変換されるかを記述しており，「位相感受性」と呼ばれる関数である．ちなみに，$\boldsymbol{g}_i(\phi_i, \phi_i')$ が 1 成分しかもたない場合 (つまり，もとのモデルで結合が 1 つの変数のみを介して行われる場合) は，このモデルは Winfree が生体リズムの数理モデルとして提案したものに帰着し，Winfree モデルとも呼ばれている[2)]．

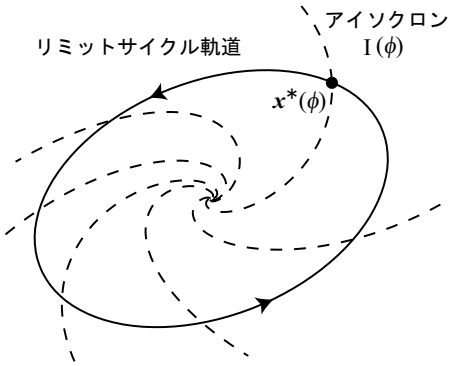

図 1　アイソクロン $\mathrm{I}(\phi)$.

実は，モデル (2) もまだ解析がやっかいである．そこで，次の操作をする．相互作用が弱いことを仮定しているので，振動子間の位相差 $\Delta\phi \equiv \phi_1 - \phi_2$ の変化は，一周期の間で小さい．したがって，$\Delta\phi$ の変化を無視し，次のように相互作用項を一周期に渡って平均化することが，近似的に許される．

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \kappa \boldsymbol{g}(\phi_1)\cdot\boldsymbol{h}(\phi_1, \phi_1 - \Delta\phi)d\phi_1 \equiv f(\Delta\phi), \tag{3}$$

この平均化も微小量 ϵ/ω_i の最低次で正しい近似となっている[3]．振動子 2 に対しても同様の平均化をすることにより，結局式 (2) は以下のように簡略化される．

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_1 &= \omega_1 + \epsilon f_1(\phi_1 - \phi_2),\\ \dot{\phi}_2 &= \omega_2 + \epsilon f_2(\phi_2 - \phi_1),\end{aligned} \tag{4}$$

辺々引くと，位相差で閉じた運動方程式が得られる．

$$\dot{\Delta\phi} = \delta\omega + \epsilon f_{\mathrm{a}}(\Delta\phi). \tag{5}$$

ここで $f_{\mathrm{a}}(\phi) \equiv f_1(\phi) - f_2(-\phi)$ であり，これも 2π 周期関数である．

この一般的な数理モデル (5) からできる予言は，かなり強力である．図 3 をまず見てもらいたい．ある適当な関数 $f_i(\phi)$ を用いて，$\dot{\Delta\phi}$ がプロットされている．$f_{\mathrm{a}}(\phi)$ が周期関数なので，$y = 0$ の解は一般には，偶数個あるか全く存在しないかであり，これは ϵ と $\delta\omega$ の大きさによって決まる．特に，$\delta\omega$ が $-\epsilon f_{\mathrm{a}}(\phi)$ の最小値と最大値の間にある

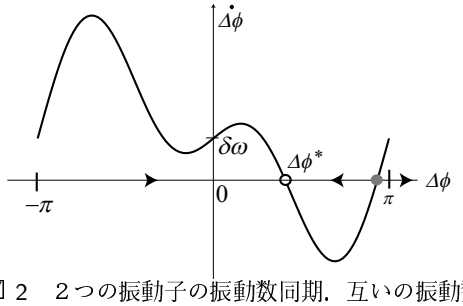

図 2　2 つの振動子の振動数同期．互いの振動数が一致する位相差 $\Delta\phi^*$ がアトラクターになっている．

場合は，最低でも 2 個の解を持つ．図 3 は，2 個の解を持つ場合である．解の安定性を知るために，解の近傍の $y = \dot{\Delta\phi}$ の符号に従って，$\Delta\phi$ 軸上に流れ (矢印で表示) を考慮すると，一方の解が安定解 (アトラクタ) であることがわかる．この解を特に $\Delta\phi^*$ と記述する．さて，この解は $\dot{\Delta\phi} = 0$，つまり，$\dot{\phi}_1 = \dot{\phi}_2$ に対応しており，これは振動数が一致した状態である．従って，2 つの振動子は十分時間がたつと，お互いの振動数が厳密に一致する，つまり $\omega_1 + f_1(\Delta\phi^*) = \omega_2 + f_2(-\Delta\phi^*)$ となる位相差に自発的にたどり着く．振動数が一致することから，このような同期を特に「振動数同期」と呼ぶ．これは，系の非線形性が生み出す自己組織化現象である．

ホイヘンスの時計の例に戻ろう．2 つの振り子時計がどのようなしくみで自励振動していようと，どのように相互作用しようと，振り子時計の固有の性質の差が十分小さく，相互作用がそれなりに強ければ，振動数同期は自発的に達成されるのである．近似理論を用いることによって，系の解析が格段に簡単化されたのだが，同時に，もの詳細に捕われない一般性の高い結論を得ることができたわけである．

4. ランダムネットワークでの同期転移

次に振動子が多数ある場合を考える．この場合は，現象は格段に複雑になるが，ある特殊なケースの場合については詳しい解析が可能である．さ

きほどのモデルを振動子集団に拡張し，$f(\phi)$ として $-\sin(\phi)$ を仮定した次のモデルを考えよう．

$$\dot{\phi}_i = \omega_i + \frac{K}{\langle k \rangle} \sum_{j=1}^{N} A_{ij} \sin(\phi_j - \phi_i). \quad (6)$$

ϕ_i は振動子 i $(i = 1, \ldots, N)$ の位相である．振動子の総数 N は十分大きい数であるとし，解析部分では転移を厳密に議論するために $N \to \infty$ を仮定する．A_{ij} は，結合ネットワークを表す行列である．ここではネットワークの性質として以下のことを仮定する．まず，A_{ij} は 1 か 0 の 2 つの値しかとらない．つまり，振動子 i と振動子 j は，接続か非接続の二者択一で，接続している場合の強度は一定である．さらに，結合は常に両方向性 $(A_{ij} = A_{ji})$，つまり，振動子 i が振動子 j に結合を与えているとき，振動子 j が振動子 i にも結合与える．振動子 i の持つ総リンク数をその振動子の次数 $k_i \equiv \sum_j^N A_{ij}$ と呼ぶ．$\langle k \rangle$ は次数の平均，$\sum_{i,j}^N A_{ij}/N$ である．自然振動数 ω_i は分布関数 $g(\omega)$ にしたがってランダムに分布している．$g(\omega)$ はある振動数 ω_0 を中心とする対称な一山の滑らかな関数である．結合関数として $f(\phi) = -\sin(\phi)$ を仮定したが，これは相互作用を持つ 2 つの振動子が位相をなるべく近付けようとする効果を表している．特に，固有振動数が同一の場合 $(\omega_i = \omega_0)$ は，位相が完全に一致した状態 (位相同期状態) が安定解になる．

モデル (6) には，「相転移現象の種」が見て取れる．右辺第一項は，位相をバラバラにする効果をもつ．したがって $K = 0$ では非同期状態である．それに対し，第二項はお互いの位相を揃えようとする効果を表し，$K \to \infty$ では，ω_i の効果が無視され，位相が完全に揃った同期状態が得られる．この両極端の間に，非同期状態から，なんらかの秩序が形成されている同期状態への転移点が存在すると期待できる．

振動子集団がどのような同期状態にあるかは，次の量で考えるのが適当である．

$$Re^{i\Phi} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} e^{i\phi_j}. \quad (7)$$

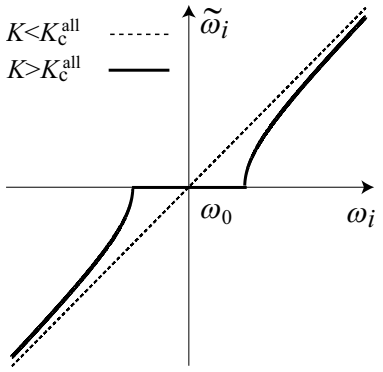

図 3　固有振動数 ω_i と真の振動数 $\tilde{\omega}_i$ の関係.

ここで R と Φ は共に実数であり，Φ がネットワーク全体の平均位相で，R が集団振動の振幅，つまりネットワーク全体のリズムシグナルの強度を表す．この量は，位相が完全に一致した状態であれば $R = 1$ となり，完全にばらばらだと $R = 0$ になる．(磁性体の磁化と類似した量である)．$R > 0$ であれば，ネットワークはマクロなリズムシグナルを生成する．

まず，全てが全てに結合する，つまり $A_{ij} = 1$ のときの，モデルの性質を説明する．このモデルは，著者の一人によって提出されたモデルであり，しばしば蔵本モデルと呼ばれる．まず，十分小さな K では，全ての振動子が固有の振動数を保って完全にバラバラな運動を続け，ネットワーク全体としてのリズムシグナルは存在せず $(R = 0)$，つまり非同期状態である．K を大きくしていくと，ある臨界値 $K = K_c^{\rm all}$ を境に定性的な変化が現れる．分布の平均値 ω_0 に近い固有振動数を持つ振動子同士の位相がロックし，全く同じ振動数をもって運動するようになる．この変化の様子は図 4 に示させる．縦軸の $\tilde{\omega}_i$ は振動子 i の真の振動数であり，位相の瞬間振動数 $d\phi_i/dt$ の長時間平均，$\tilde{\omega}_i = T^{-1} \int_{t_0}^{t_0+T} (d\phi_i/dt) dt$ で定義されている．ここで，t_0 と T はともに十分大きな量である．$K < K_c^{\rm all}$ では，ω_i と $\tilde{\omega}_i$ が一致している (点線) が，$K > K_c^{\rm all}$ では，平均振動数 ω_0 に近い振動子が「振動数凝縮」を起こし，それらの振動子の真の振動数は ω_0 と完全に一致している (実線)．つ

まり，前節の同期状態と同様に，位相差が固定された振動数同期状況が，集団内の一部の振動子群で達成されるのである．同じ振動数をもつ振動子数は，$K > K_{\rm c}^{\rm all}$ では K の増加とともに単調に増えて行き，それに伴って，R も増加する．詳しい計算は省くが，この同期を可能にする結合強度の臨界値 $K_{\rm c}^{\rm all}$ は，次のように解析的に求まる．

$$K_{\rm c}^{\rm all} = \frac{2}{\pi g(\omega_0)} \sim \Delta\omega \qquad (8)$$

ここで $\Delta\omega$ は振動数分布関数 $g(\omega)$ の標準偏差で，最後の近似式は $1 = \int g(\omega)d\omega \sim g(\omega_0)\Delta\omega$ から見積もられたものである．つまり，振動数の分布の特徴的な幅 $\Delta\omega$ と結合強度 K がほぼバランスしたときに初めて同期が始まる．ここで前の２振動子系との違いに注意したい．N が十分大きい場合は，振動数差がほとんどない振動子が多数存在するので，$\delta\omega \sim 0$ である部分集団が常に存在し，どんなに小さい結合強度でも同期が起こりそうなものである．しかし実際は，全体の振動数分布の幅 $\Delta\omega$ 程度の結合強度がなければ，同期が全く起こらないのである．

次に本題であるランダムネットワークに移ろう．２つのクラスのランダムネットワークを考える．１つは，完全にランダムなネットワーク，もう１つはその遍在性がよく知られているスケールフリーネットワーク (以後，SF ネットワークと呼ぶ) である．前者のネットワークは，全てのノードのペアに対し，確率 p $(0 \le p \le 1)$ で接続していくことにより得られ，これは Erdös-Rényi(ER) ネットワークと呼ばれる．平均次数 $\langle k\rangle$ は pN となる．次数の分布関数 P_k は，ER ネットワークの場合は二項分布となり，ノード数が十分大きいとポアソン分布 $P_k = (pN)^k e^{-pN}/k!$ に漸近する．これに対し，SF ネットワークは次数の分布が特殊な形になるように生成されるネットワークである．まず，$P_k = Ck^{-\gamma}$ を仮定する．γ は分布の形を決めるパラメタで，C は適当な規格化定数である．この分布からランダムな数列 k_i $(i = 1, \ldots, N)$ を作り，ノード i の次数を k_i とする．この時点では，ノード i からリンクの「芽」が k_i 本出ている状態

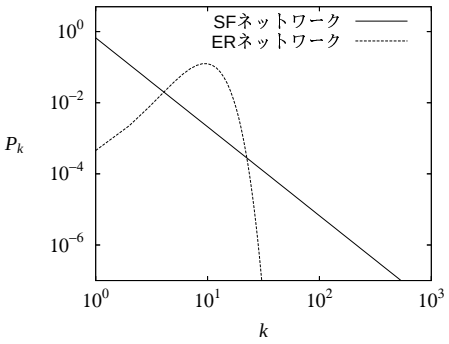

図 4　ランダムネットワークの次数分布．

である．この芽をランダムに 2 つ選んで結合させリンクにする．これを芽がなくなるまで続ければ，SF ネットワークが完成する．これら２つのネットワークの次数分布を図 4 に例示する．

これらのランダムネットワークで振動子を接続した系でも，同期･非同期転移が存在することが知られている．我々の興味は，ランダムネットワークでの結合強度のの臨界値が一様結合の場合に比べてどう変化するかである．一宮はある種の平均場近似を用いて，ランダムネットワークにおける臨界値を解析的に導出した[9]．

$$K_{\rm c}^{\rm ran} = K_{\rm c}^{\rm all}\frac{\langle k\rangle^2}{\langle k^2\rangle}, \qquad (9)$$

ここで，$\langle k^2\rangle$ は次数分布の分散で，次式で定義される．

$$\langle k^2\rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} k^2 \simeq \int_0^\infty k^2 P(k)dk. \quad (10)$$

まず，ER ネットワークを考える．ER ネットワークの場合は p の値によらず，$\langle k^2\rangle = \langle k\rangle^2 = (pN)^2$ であり，つまり，$K_c^{\rm ran} = K_c^{\rm all}$ で一様結合の場合と一致する．つまり，1 振動子あたりのリンク数を pN 本に減らしても，その分リンク当りの結合強度を増加させる必要があり，その意味で同期は能率的になっていない．

ところが，SF ネットワークの場合は，状況が大きく変わる．式 (9) は分布の偏りが大きくなると，同期に必要な結合強度が劇的に下がることを予言する．SF ネットワークの特徴は，図 4 からもみて取

れる通り，分布の広がりがERネットワークよりもずっと大きいことである．つまり，SFネットワークは同期の能率が抜群にいい．特に，$2 \leq \gamma < 3$かつ$N \to \infty$では，$\langle k^2 \rangle$が発散するため，$K_c^{\rm ran} \to 0$，つまりどんなに小さい結合強度でもマクロリズムが生まれることが予言される．

SFネットワークで同期が能率よく達成される理由は，おおざっぱに言うと次のようなメカニズムによる．今，臨界強度を少し超えた結合強度があると想定しよう．SFネットワークには少数ではあるが，入力と出力が共に集中している，いわゆる「ハブ」がある．ネットワーク全体のうちからハブだけに着目すると，総結合強度が極端に強いサブネットワークが存在していることに気づく．つまり，ハブの構成するサブネットワークはかなり低い結合強度でも同期できる．いったん，(例え少数でも) 一部の振動子集団が同期すれば，ネットワークはマクロなリズムシグナルを生成する (つまり$R > 0$となる)．このハブの構成するマクロなリズムシグナルが，他の結合数のやや低い振動子群も同期させ，Rが増加していく．これに伴い，さらに結合数の低い振動子群が同期されていき，最終的に，Rはある値へと収束する．つまり，少数のハブが同期の「核」をまず作り，これが結合数の少ない集団を引き込んでいきながら成長するのである．ハブの役割は，仮想的にハブを取り除いたネットワークを想定するとわかりやすい．結合強度Kを小さな値に固定したまま，振動子を結合数の多いものから取り除いていく．すると，ある時点から，ネットワークは全く同期できなくなる．この思考実験からもハブの同期における重要性は明らかであろう．このように，ERネットワークのように全ての振動子が同程度の結合数を持つよりも，一部の振動子に結合数を集中させるSFネットワークの方が，極端に低い結合強度で同期が可能であり，はるかに能率的である．なお，この節の解析の詳細は他書を参照して頂きたい．大域結合系に関しては蔵本の文献3, 4) にまとまっている．ランダムネットワークに関しては一宮の論文9) と，別の近似理論を使った解析と詳細な数値シミュレーションを行っているRestrepoらの論文10) を参照してもらいたい．

5. まとめ

連載第２回では非線形科学の視点から，ネットワーク上のダイナミクス，特に振動子ネットワークの同期・非同期転移について解説した．ネットワーク科学という新たなパラダイムを得て，非線形科学はさらに豊富な世界に突入した．より応用に近い研究が，問題を過度に細分化することなく行われ始めており，これからの発展が非常に楽しみである．次回連載も，振動子ネットワークについての解説を続ける．なお，ランダムネットワークの同期転移については一宮尚志氏から有益なコメントを頂いた．この場を借りて感謝したい．

参考文献

1) P. グランスドルフ, I. プリゴジン, 松本元［訳］. 構造・安定性・ゆらぎ–その熱力学的理論. みすず書房, 2000.
2) A. T. Winfree. *The Geometry of Biological Time*. Springer, New York, 1980.
3) Y. Kuramoto. *Chemical Oscillation, Waves, and Turbulence*. Springer, New York, 1984.
4) 蔵本由紀［編］. リズム現象の世界. 東京大学出版会, 2005.
5) A. Pikovsky, M. Rosenblum, and J. Kurths. *Synchronization*. Cambridge University Press, 2001.
6) S. M. Reppert and D. R. Weaver. Coordination of circadian timining in mammals. *Nature*, Vol. 418, p. 935, 2002.
7) S. Yamaguchi, H. Isejima, T. Matsuo, R. Okura, K. Yagita, M. Kobayashi, and H. Okamura. Synchronization of cellular clocks in the suprachiasmatic nucleus. *Science*, Vol. 302, p. 1408, 2003.
8) M. Bennett, M. F. Schatz, H. Rockwood, and K. Wiesenfeld. Huygen's clocks. *Proc. R. Soc. Lond. A*, Vol. 458, p. 563, 2002.
9) T. Ichinomiya. Frequency synchronization in a random oscillator network. *Phys. Rev. E*, Vol. 70, p. 026116, 2004.
10) J. G. Restrepo, E. Ott, and B. R. Hunt. Onset of synchronization in large networks of coupled oscillators. *Phys. Rev. E*, Vol. 71, p. 036151, 2005.

（こおり・ひろし，北海道大学大学院理学研究院）
（くらもと・よしき，北海道大学大学院理学研究院）